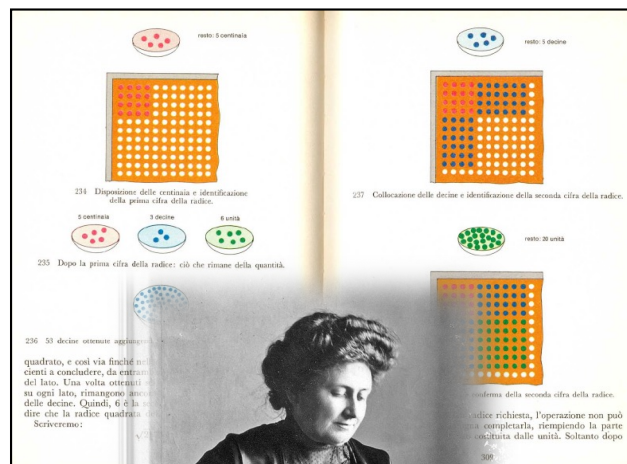
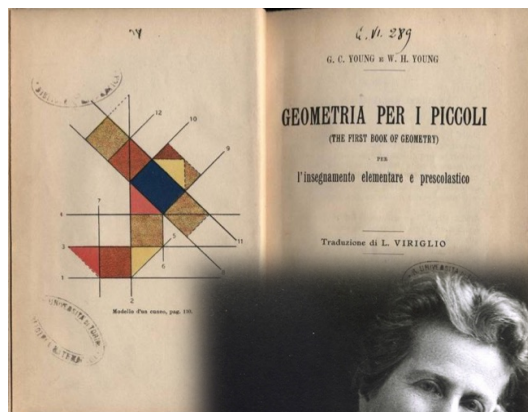




Grace Chisholm, Maria Montessori, Margherita Beloch

Una comune passione per la matematica e per il suo insegnamento

Livia Giacardi

Mathesis Subalpina, Torino, 30 novembre 2023



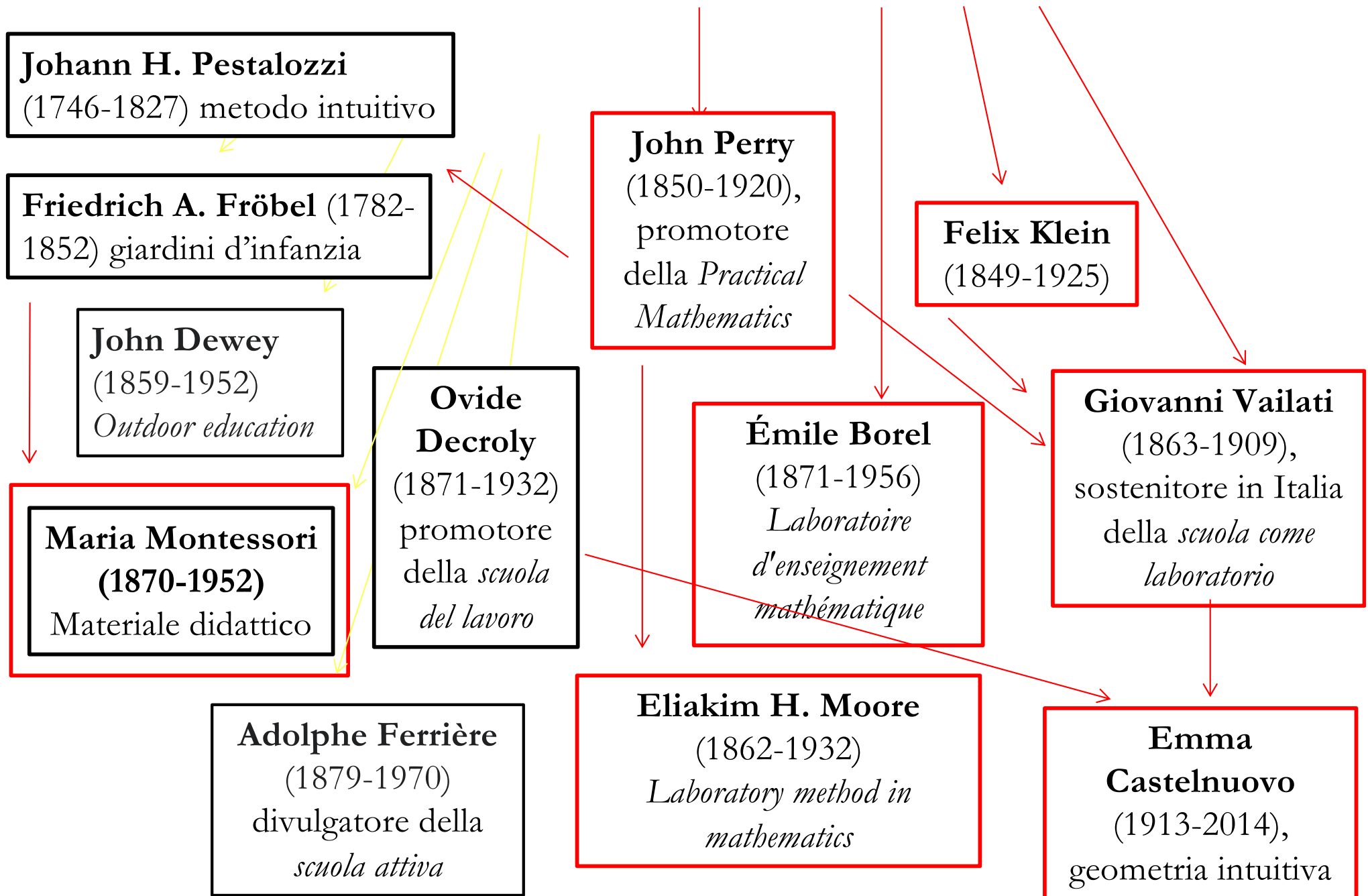
Donne e scienza fra '800 e '900

- 1863** L'università di Lione è la prima ad ammettere l'iscrizione delle donne
- 1865** In Italia il Codice riconosce alle donne diritti civili, ma conserva la preventiva autorizzazione del marito
- 1870** Sofja Kovalewskaja ottiene a Gottinga il titolo di dottore sotto la guida di Weierstrass e nel 1889 un posto di professore a Stoccolma.
- 1876** In Italia nei nuovi Regolamenti si ammette l'iscrizione all'università delle donne: le prime due donne laureate si laureano in medicina
- 1880** L'enciclica *Arcanum Divinae Sapientiae*, di Leone XIII si pronuncia sui rapporti fra i coniugi: «*Il marito è il principe della famiglia e il capo della moglie; la quale, ...deve essere soggetta ed obbediente al marito, non a guisa di ancella, ma di compagna*»
- 1884** Edwin Abbott nel suo romanzo *Flatlandia* scrive a proposito delle donne: «*Le donne in Flatlandia sono del tutto prive di facoltà di raziocinio. E non hanno potere riflessivo, né giudizio, né capacità di previsione, né quasi memoria*»
- 1888** In Italia per l'opposizione di Crispi è respinto il progetto di legge per il voto alle donne.
- 1891** Cornelia Fabri, allieva di Vito Volterra si laurea in matematica a Pisa
- 1892** Ida Terracini si laurea in matematica a Torino.

- 1901** Gino Loria tiene a Padova la conferenza *Donne Matematiche*, in cui sostiene a proposito le donne negli studi più ardui possono passare dallo stato di larva a quello di crisalide «*ma le sono vietati i liberi voli della farfalla*».
- 1902** Le donne laureate in Italia sono 224 di cui 24 in Medicina, 20 in Matematica e 30 in Scienze Fisiche, Chimiche, Naturali (Ravà 1902)
- 1903** Marie Curie riceve il primo premio Nobel per la fisica e nel **1911** quello per la chimica.
- 1921** Pia Nalli è la prima donna ad ottenere la cattedra di matematica (di analisi all'Università di Cagliari).
- 1923** L'art. 12 della riforma della pubblica istruzione firmata da G. Gentile impedisce alle donne di diventare presidi delle scuole superiori.
- 1926** Il ministro P. Fedele firma il decreto che esclude le donne dai concorsi per le cattedre di lettere classiche nei licei, di lettere italiane e storia negli istituti tecnici e magistrali, e di lettere italiane, latine, storia e filosofia nei licei.
- 1932** Emmy Noether è la prima matematica a tenere una *Plenary Lecture* all'International Congress of Mathematicians a Zurigo
- 1946** Le donne italiane votano per la prima volta il 2 giugno del 1946, in occasione del referendum istituzionale monarchia-repubblica.



Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento





Grace Chisholm Young

(Haslemere (Londra) 1868 – Croydon 1944)

È educata in casa dalla madre fino all'età di 17 anni

1889-92 – studia **Matematica** al **Girton College** dell'Università di Cambridge, l'unico cui accedevano le donne. Fra i docenti c'erano **Arthur Cayley** e **William Young** che aveva « *il dono di far emergere il talento latente nei suoi studenti* » (Grattan-Guinness 2006, p. 221)

1892 - consegue il *First Class Award*

Perfeziona gli studi in matematica a **Gottinga**, dove insegnava **Felix Klein** che riconosce le sue doti, la ammette al dottorato.

1895 – consegue il dottorato *magna cum laude* con una tesi sulla teoria dei gruppi.



William Young
(1863-1942)

*«Ieri ho avuto un colloquio con il professor Klein. Quest'uomo è sicuramente una delle persone più schiette al mondo, che non schiva i guai e le responsabilità. [...] **Nello statuto non si dice nulla circa il fatto che chi riceve il titolo sia un uomo, semplicemente perché nessuno si è mai sognato potesse essere diversamente;** però è possibile che sia necessario fare richiesta al Governo. Comunque, per prima cosa porterà la questione in Facoltà all'inizio del prossimo semestre. Oh, cielo! **Come vorrei che i ricchi inglesi si prendessero più a cuore l'educazione, in America mi sarebbero semplicemente saltati addosso con le loro borse di studio per consentirmi di restare e per non farmi sentire di peso!**»* (G-G 2006, pp. 224-225)

1896 Grace e William si sposano, dalla loro unione nasceranno **6 figli** il primo dei quali, 'Bimbo' morirà in battaglia durante la I Guerra Mondiale

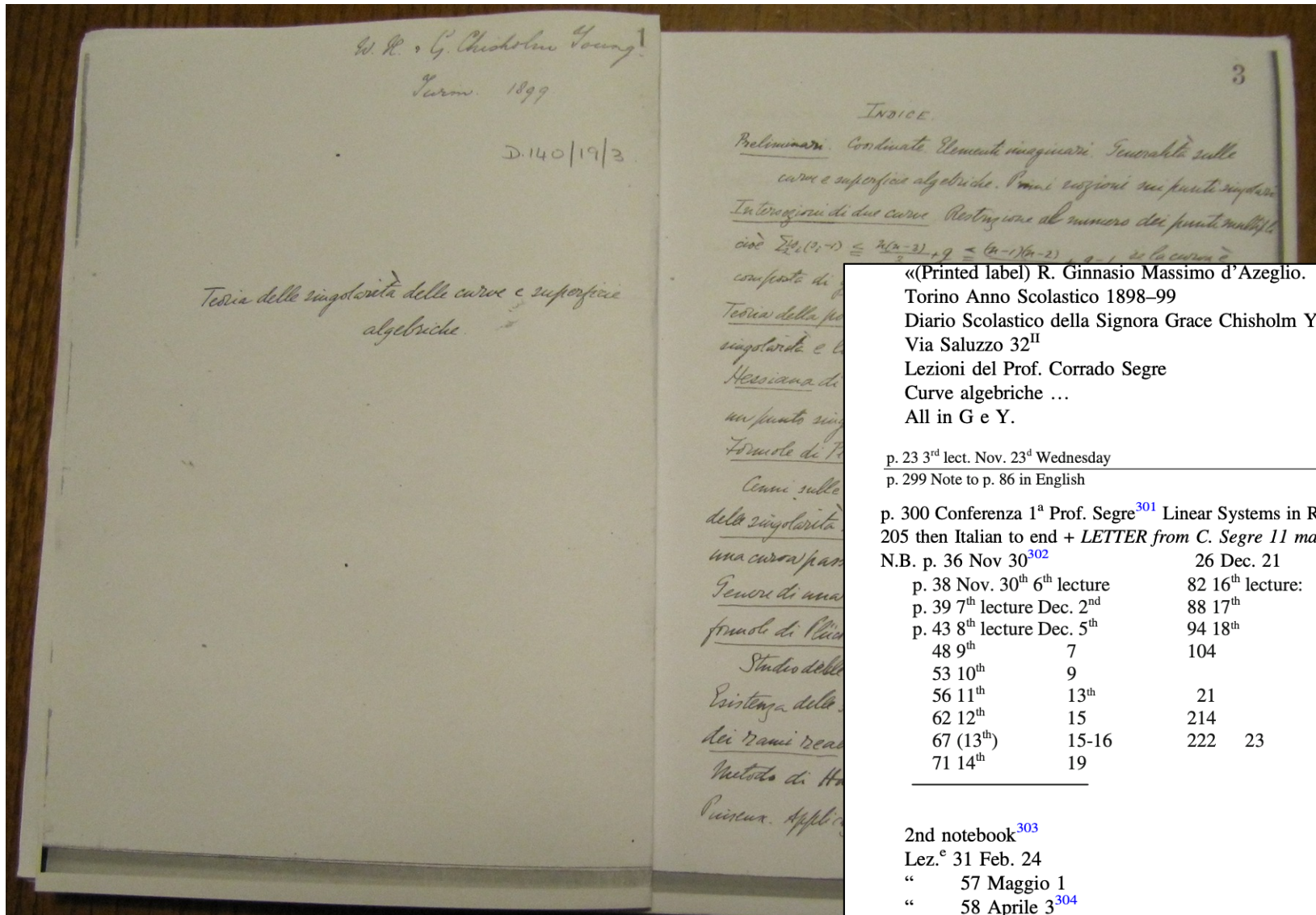
1898-1899 soggiorno a **Torino** per seguire i corsi di Geometria Superiore di **Corrado Segre**.

Inizia il periodo più creativo della collaborazione scientifica di Grace e William.

Pubblicazioni: 3 libri e 18 articoli di Grace, 13 a due nomi e numerosi altri del solo William

Importante lavoro di integrazione revisione di Grace.

È Grace che stimola William a riprendere la ricerca
 È Grace che a Torino prende la maggior parte degli appunti delle lezioni,
 parte in italiano, parte in inglese (AUL, (D.140/9/183)



«(Printed label) R. Ginnasio Massimo d'Azeglio.

Torino Anno Scolastico 1898-99

Diario Scolastico della Signora Grace Chisholm Young Phil Doc. Gött.

Via Saluzzo 32^{II}

Lezioni del Prof. Corrado Segre

Curve algebriche ...

All in G e Y.

p. 23 3rd lect. Nov. 23rd Wednesday

p. 299 Note to p. 86 in English

p. 300 Conferenza 1^a Prof. Segre³⁰¹ Linear Systems in Reciprocation etc. in English to 205 then Italian to end + LETTER from C. Segre 11 marzo "Ella ha ragione"...

N.B. p. 36 Nov 30³⁰²

		26 Dec. 21		
p. 38 Nov. 30 th	6 th lecture	82 16 th lecture:	Jan. 4	25 Jan 30
p. 39 7 th lecture	Dec. 2 nd	88 17 th	Jan. 11	Feb. 1
p. 43 8 th lecture	Dec. 5 th	94 18 th	13	Feb. 20
48 9 th	7	104	16 th	
53 10 th	9		18 th	20-22
56 11 th	13 th	21	20	
62 12 th	15	214	23	
67 (13 th)	15-16	222 23	25	
71 14 th	19			

2nd notebook³⁰³

Lez.^c 31 Feb. 24

" 57 Maggio 1

" 58 Aprile 3³⁰⁴

Has large chunk W. H. pp. 213 seg. »³⁰⁵

*«Spero che tu ti diverta a lavorare per me. ... Il lavoro non è di un tipo che possa suscitare rivendicazioni conflittuali. Sono molto felice che tu prosegua a lavorare su quei concetti. **Mi sento in parte come se ti stessi insegnando, sottoponendoti dei problemi che io stesso non sono interamente in grado di risolvere da solo, ma posso rendere te in grado di farlo.** Di nuovo penso a me stesso come un Klein, fornitore del vapore necessario, dell'iniziativa, della guida. Ma sono anche molto fiducioso che insieme saliremo nuove vette. [...]*

Il fatto è che i nostri saggi dovrebbero essere pubblicati con entrambi i nostri nomi ma, se lo faremo, nessuno dei due ne trarrà vantaggio. No. Mie le glorie ora e il sapere. Per te soltanto il sapere. Tutto con il mio nome ora e, più tardi, quando non ci dovremo più procurare pani e pesci in quel modo, tutto o molto con il tuo nome. Questo è il mio programma. Al momento tu non puoi intraprendere una carriera. Hai i tuoi bambini. Io invece posso e lo farò. [...]

Così lavoro senza smettere di pensare. Ogni cosa sembra confermare che siamo sulla strada buona. Ma dobbiamo inondare la società di saggi. Non tutti devono essere al livello di quelli del continente, ma devono dimostrare conoscenze che gli altri non hanno acquisito ed essere numerosi.» (G.-G. 2006, p. 231)

1906 – pubblicano il trattato *The Theory of Sets of Points*

1908 - si trasferiscono a **Ginevra**, dove continuano gli studi in Teoria degli Insiemi, poi a **Losanna.**, dove Grace completa gli studi in medicina.

Dal 1925 Grace non scriverà più di matematica.

Dal 1911 la carriera di William decolla: insegna prima a Liverpool, poi a Calcutta e infine nel 1919 all'università di Aberystwith in Galles. Ottiene vari riconoscimenti fra cui la presidenza della London Mathematical Society

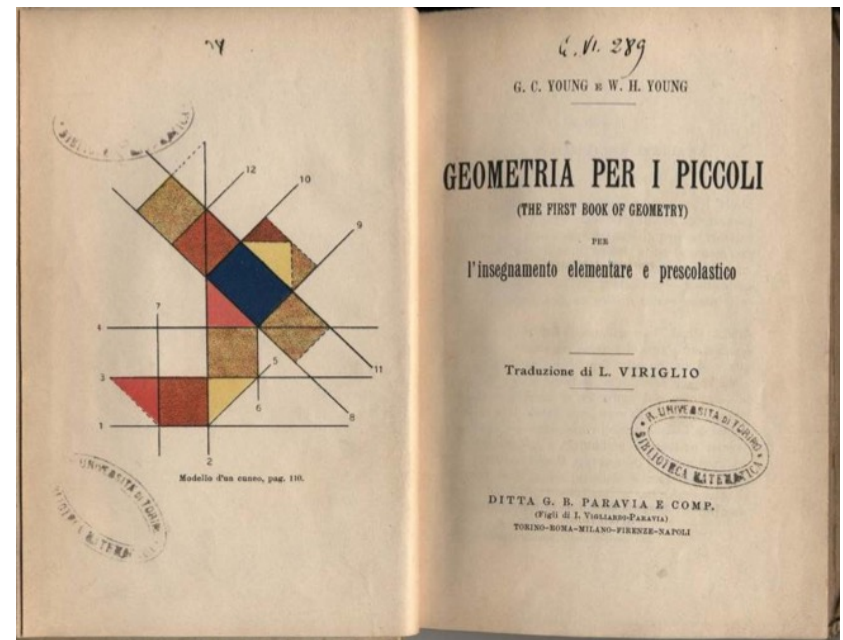
La II Guerra Mondiale separa la famiglia che era all'epoca in Svizzera: Grace rientra in Inghilterra con i nipoti, mentre William rimane.

1942 William muore lontano dalla famiglia,

1944 – muore anche Grace



**Grace and William Young A
First Book of Geometry (1905),
tradotto in italiano da Luisa Viriglio
su suggerimento del suo professore
Corrado Segre.**



Caratteri principali:

- ❑ La scoperta della proprietà geometriche e dei teoremi nasce dall'uso della carta piegata e dalla costruzione e dalla manipolazione di modelli di cartone.

*Quelli costruiti da un bimbo saranno naturalmente imperfetti da principio, ma egli li può costruire da sé e ripeterli quante volte gli piaccia: e **intanto non solo acquista l'abilità manuale, ma si familiarizza colle verità che egli sa essere rappresentate da ogni modello.** Appunto perché fa da sé egli non riceve idee da un altro, **ma impara per conto proprio**, e svolge ciò che si può chiamare il suo senso geometrico. (p. 10)*

❑ **Maggiore importanza alla geometria solida** di solito considerata
«come uno dei più difficili e astrusi soggetti matematici di studio. Non la si affronta seriamente che nelle scuole secondarie superiori e nelle Università, dove è svolta sopra tutto con metodi analitici» (p. VI)

❑ **Lavorare con le mani e con la mente:**

Costruzione e manipolazione dei modelli

Processo di scoperta della verità geometriche

Visualizzazione mentale

Uso della carta piegata per semplici dimostrazioni: *«Le dimostrazioni fatte con piegature di carta possono essere ben condotte da fanciulli che non riuscirebbero a disegnare una buona figura:»* (p. XI)

Domande mirate e esercizi.

*... non è un libro di testo che si debba studiare. Si spera che [questo libro] possa essere un **aiuto per l'insegnante** o per una persona adulta la quale desideri guidare e aiutare un fanciullo e **non dare semplicemente un insegnamento meccanico.***

Servirà anche al fanciullo stesso, dato il gran numero di figure. [...] Il libro è fatto per aiutare il fanciullo a lavorare e ad acquistare idee, che, non prive di importanza al momento in cui egli le acquista, saranno più tardi per lui di un valore incalcolabile. (p. VIII)

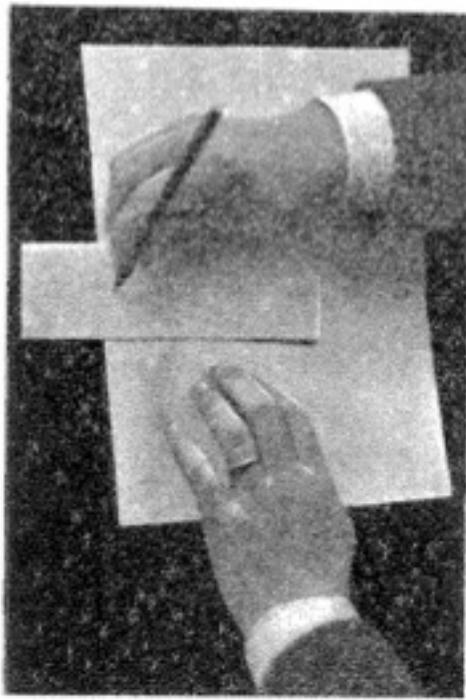


Fig. 23.

Come si disegna una circonferenza.

La circonferenza

Costruzione della circonferenza con una riga di cartone, uno spillo, una matita e un foglio di carta.

Praticando due fori nella riga di cartone (uno per lo spillo e l'altro per la matita) e facendo ruotare la riga, la traccia della matita descrive una circonferenza.

La costruzione materiale offre lo spunto per porre domande, fare osservazioni e dare definizioni

giustificate:

«La circonferenza è detta il luogo di un punto mobile la cui distanza dal foro è sempre la stessa. Il foro è detto centro della circonferenza.»

Ogni segmento congiungente il centro con un punto della circonferenza viene chiamato un suo raggio. Tutti i raggi di una circonferenza sono eguali» (pp. 42-43)

Facendo invece ruotare il foglio di carta, e tenendo fissa la matita, si può far constatare che: *«la circonferenza ruota su se stessa rimanendo fisso il suo centro»* (p. 43)

→ cerchio

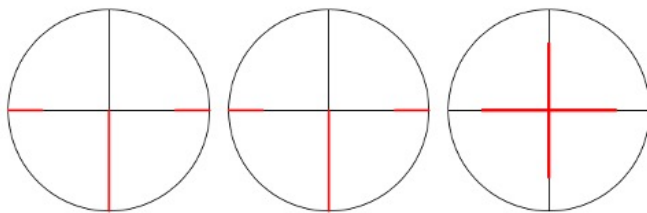
La sfera

La **sfera** è introdotta subito dopo il cerchio, come **solido di rotazione**.

Si invita il bambino a **fare un esperimento** ritagliando un cerchio di cartone, facendo passare un cordino per il centro, annodando i due capi e attorcigliando il filo il più possibile e poi lasciandolo andare. Il cerchio girerà attorno a un suo diametro e ...

Modelli della sfera:

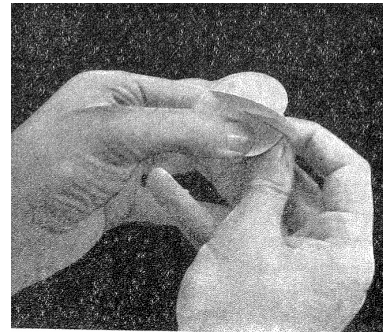
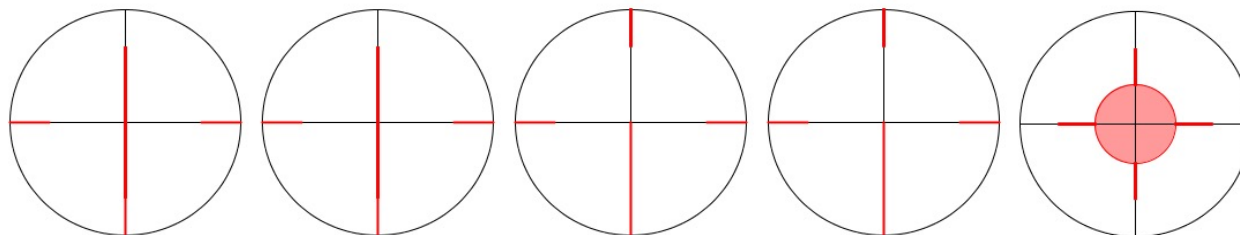
3 cerchi di carta tagliati lungo le linee rosse



meridiani

equatore

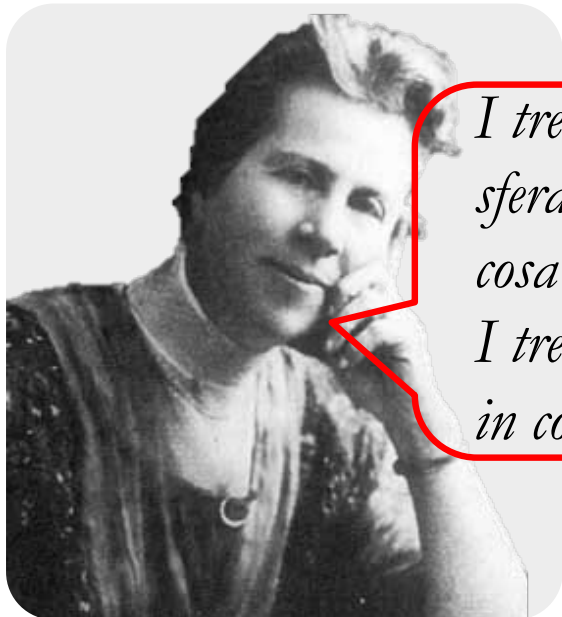
5 cerchi di carta tagliati lungo le linee rosse (4 meridiani e l'equatore)



→ Domande, osservazioni, terminologia (asse di rotazione, centro, poli, ...)

Questa costruzione dà modo di porre alcune domande, fare osservazioni e introdurre la terminologia specifica:

Per esempio



I tre pezzi di carta che avete riunito per costruire il modello della sfera, sono porzioni di tre piani. A due a due essi si tagliano: in che cosa?

I tre pezzi di carta si tagliano anche fra tutti e tre. Che cosa hanno in comune?

Facendo notare che quando si fa ruotare il modello uno dei cerchi ruota intorno al suo centro mantenendosi sempre nello stesso piano, si introduce il nome di equatore.

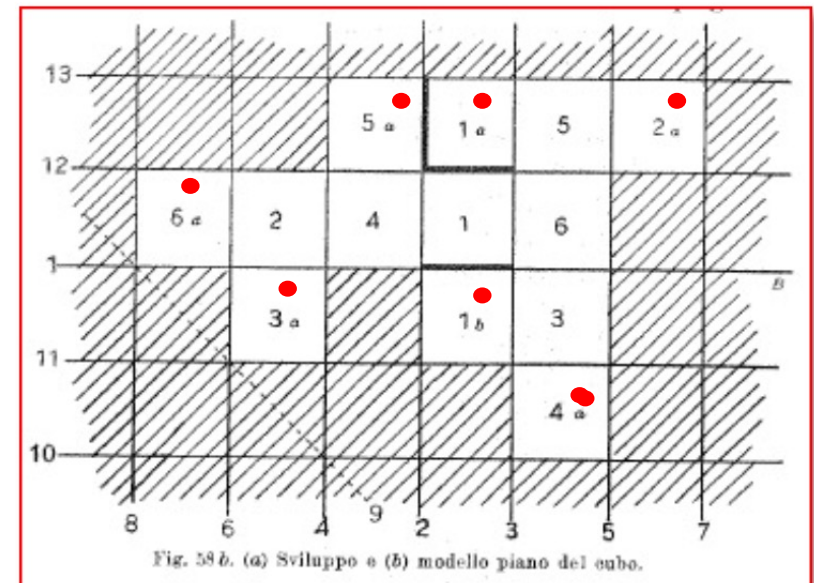
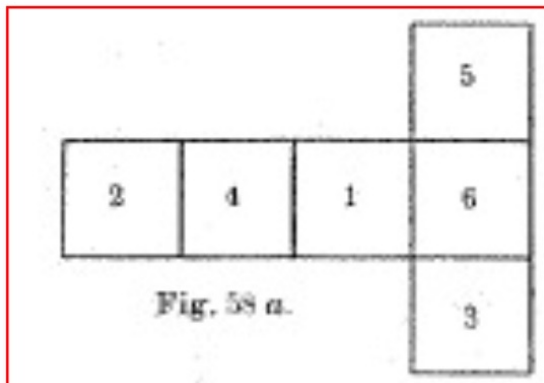
Questo offre lo spunto per spiegare la collocazione dell'Italia sulla terra rispetto all'equatore.

Geometria solida

Viene trattata in parallelo con la geometria piana

- Utilizzo di «modelli piani».
- Differenza tra sviluppo e modelli piani dei poliedri.

*La fig.58 a è ciò che si dice lo **sviluppo del cubo**: è un modello di cubo senza facce superflue da ripiegare. Disegnando lo sviluppo di un cubo sopra un pezzo di cartone, passando leggermente con un temperino lungo le linee di separazione delle facce, e poi ritagliando lo sviluppo, si può ad esso far prendere la forma del cubo, e farlo stare a posto con liste di carta da francobolli o di altra carta gommata. Non daremo perciò mai gli sviluppi, ma dei **modelli da piegare**. È facile da uno di questi ottenere lo sviluppo omettendo le facce in più che vengono adoperate per ripiegare in dentro. **Per ogni figura l'alunno potrà costruire da solo lo sviluppo, come esercizio.** (pp. 102-103)*



Dal cubo al tetraedro

- Il **tetraedro regolare** viene introdotto a partire da un cubo mediante quattro tagli consecutivi di tetraedri di punta. (pp. 130 segg.)
- Nella costruzione dei modelli l'alunno deve porre l'attenzione alle facce, in particolare alle figure introdotte precedentemente: il **triangolo equilatero** e il **triangolo rettangolo isoscele**.
- Ad ogni passo nel libro sono raffigurati:

un modello piano della parte da tagliare e della parte rimanente

una fotografia o un disegno che presenta la parte rimanente in seguito al taglio

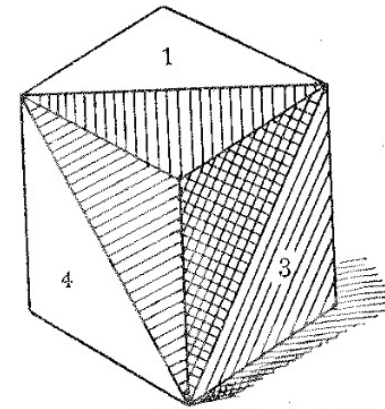


Fig. 75. Punta di un cubo.

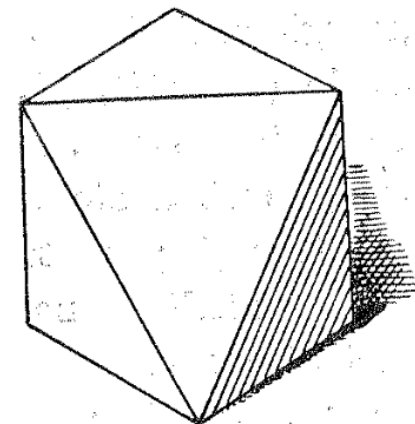


Fig. 78.

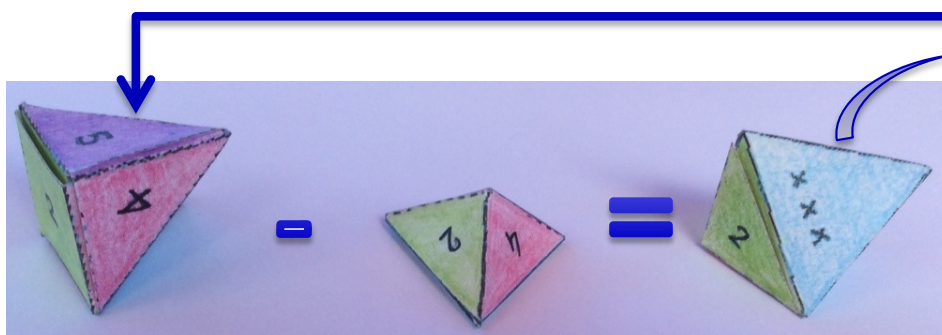
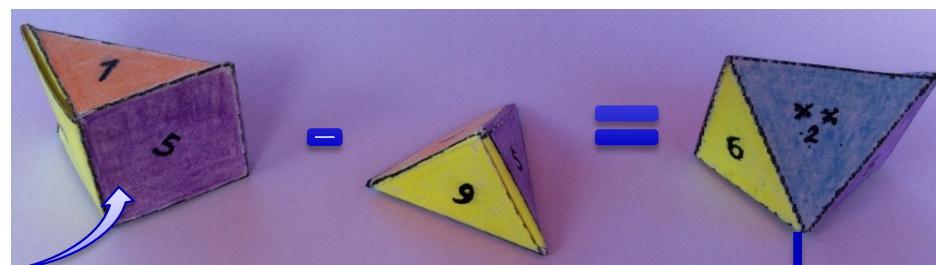
CUBO

TETRAEDRO
DI PUNTA

CUBO MANCANTE
DI UNA PUNTA

TETRAEDRO
DI PUNTA

BATTELLO
DI PUNTA



BATTELLO
DI PUNTA

TETRAEDRO
DI PUNTA

DOPPIO
TETRAEDRO

TETRAEDRO
DI PUNTA

TETRAEDRO
REGOLARE

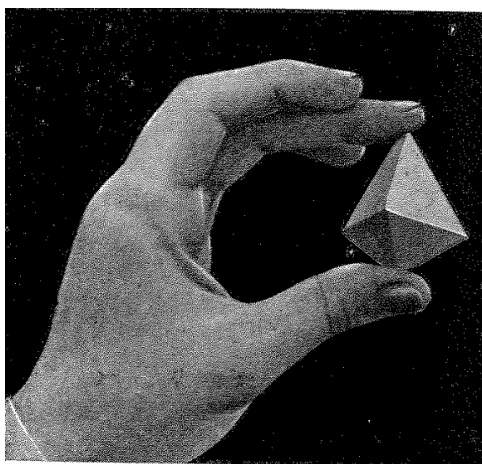


Fig. 82. Doppio tetraedro ottenuto dal cubo.

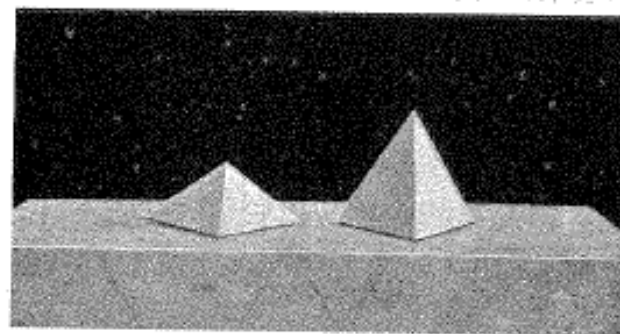
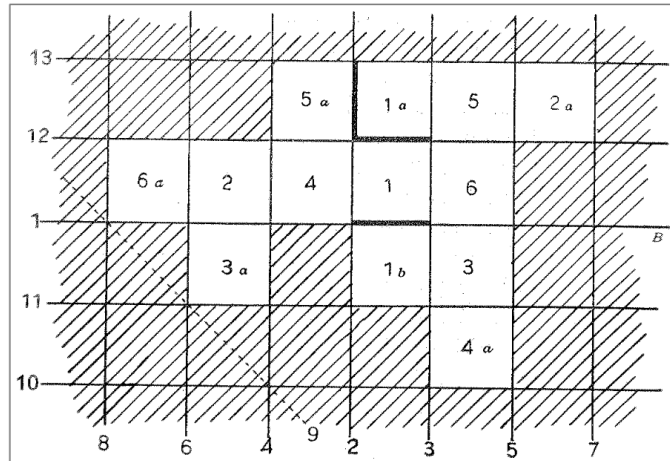


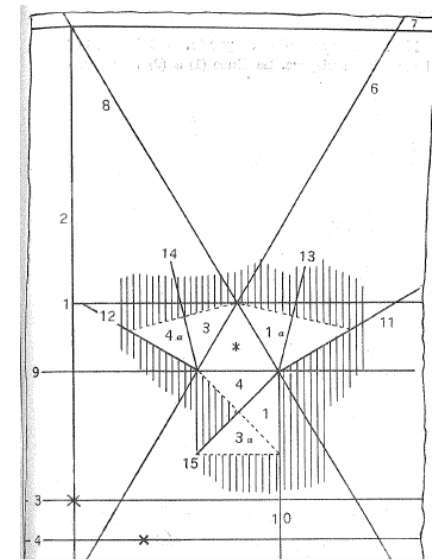
Fig. 84. Tetraedro di punta e tetraedro regolare.

Di tutti questi solidi che abbiamo ottenuto dal cubo, il **tetraedro regolare** è il primo le cui facce siano tutte congruenti. Vedete pure che in ogni vertice occorre lo stesso numero di facce disposte nello stesso modo. Perciò il tetraedro con quattro facce equilateri, dicesi regolare, è regolare come il cubo. (p. 140)

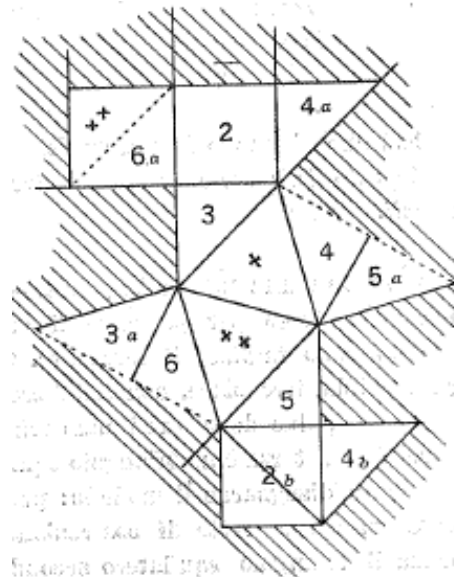
Costruendo, poi, un doppio tetraedro regolare, si mostra anche che un solido a facce congruenti non è necessariamente regolare.



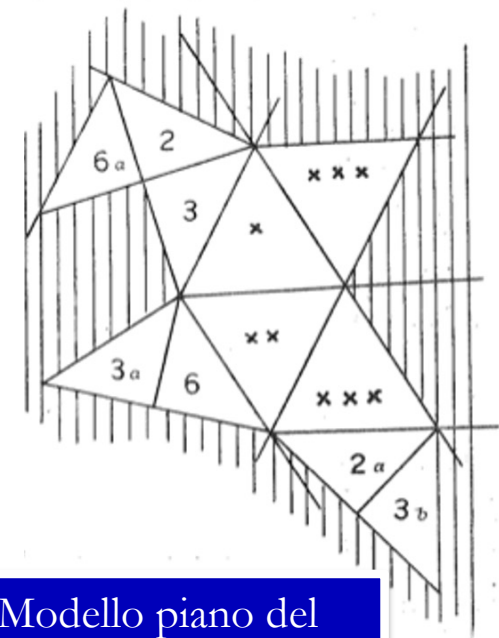
Modello piano del cubo



Modello piano del tetraedro di punta



Modello piano del battello di punta



Modello piano del doppio tetraedro

TEOREMA.

La somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti, (180°).

Costruiamo un triangolo qualunque. Due almeno dei suoi angoli essendo acuti, chiamiamo B e C i loro vertici, e il terzo vertice sia A . Allora, se AP (fig. 112) è la perpendicolare condotta da A su BC , PA e PB s'incontrano in P , e s'incontrano così che i due an-

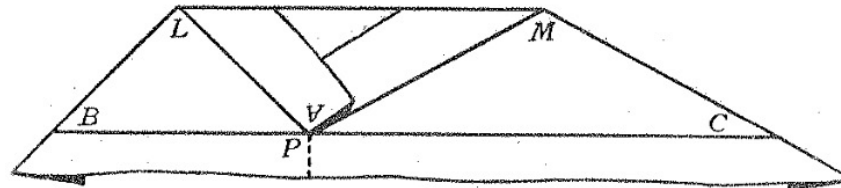


Fig. 112.

goli interni dalla stessa banda di BP da cui sta A danno meno di due angoli retti e uno di essi, quello in P , è retto: quello in B dovrà essere acuto, quindi P si trova fra B e C .

Se ripieghiamo A su P , la piega biseca AP ad angolo retto, ed è perciò parallela a BC , e taglia in conseguenza (cfr. Eserc. 2, pag. 173) AB e AC in due punti L ed M , tali che $AL=LB$ e $AM=MC$. Possiamo perciò portare tanto B quanto C a giacere in P , così che LB giaccia lungo LP ed MC lungo MP : allora i tre angoli del triangolo ricoprono per l'appunto in P due angoli retti, il che dimostra il teorema.

Problemi

La sezione finale *Applicazioni*, contiene 122 esercizi

58. - Si taglia una circonferenza con due rette parallele. Fate vedere, piegando, che la circonferenza è divisa in quattro archi di cui due almeno sono eguali (§ 26).

87. Costruire un triangolo in cui il punto medio di un lato sia equidistante dai tre vertici. Che cosa sappiamo riguardo agli angoli di un tale triangolo? (§ 30)

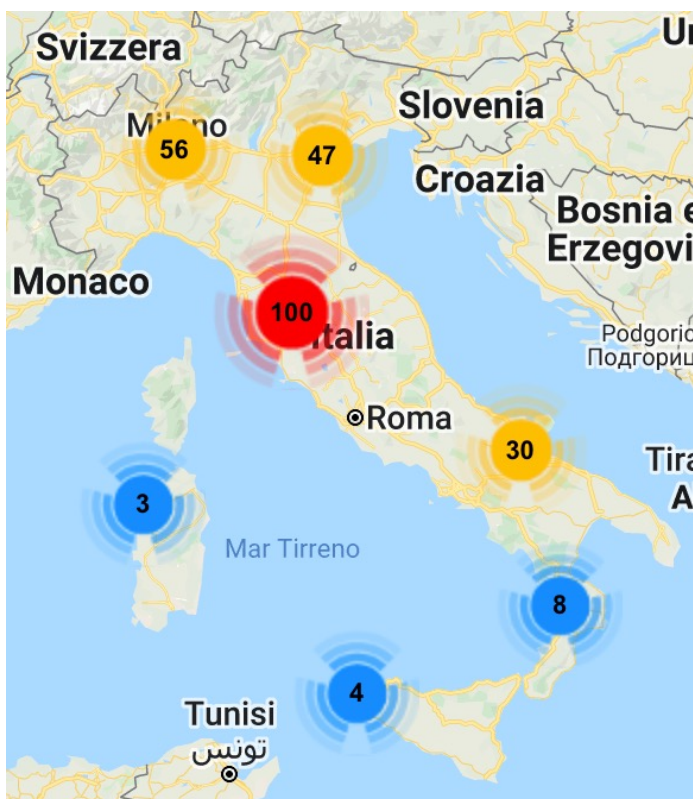
91. Dimostrare che il quadrato della diagonale di un cubo è tripla del quadrato del suo spigolo (§ 32)

115. Le bisettrici degli angoli di un parallelogramma danno luogo incontrandosi a un rettangolo. (§ 33)

Maria Montessori

(Chiaravalle 1870 - Noordwijk 1952)

Maria Tecla Artemisia Montessori, medico, educatrice, pedagogista, è internazionalmente nota per il metodo educativo che da lei prende il nome.



Particolarmente versata nelle scienze, frequentò la facoltà di medicina dell'Università “*La Sapienza*” di Roma.
Docenti:

il fisiologo Jacob Moleschott,
il medico e igienista Luigi Pagliani
e del clinico Guido Baccelli.

<https://www.operanazionalemontessori.it>

1896 - terza donna italiana a laurearsi in medicina
(specializzazione in neuropsichiatria).

Assistente presso la clinica psichiatrica dell'Università di Roma, si dedica al recupero dei bambini con problemi psichici.

1898 - promuove e realizza, insieme a Giuseppe Ferruccio Montesano la *Lega nazionale per la cura e l'educazione dei deficienti*

1898 – presenta i risultati delle sue prime ricerche al Congresso pedagogico di Torino.



Si accosta ai movimenti femminili

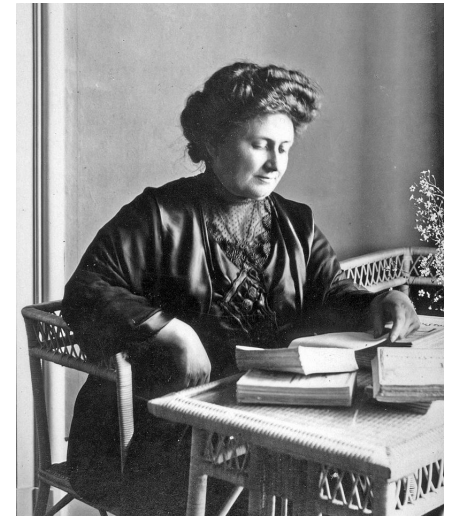
e partecipa ai congressi internazionali di **Berlino (1896) e di Londra (1899)** parlando dell'istruzione delle donne in Italia e della condizione di lavoro delle maestre.



«Erano donne nuove, ben lungi dal rassomigliare al tipo così poco simpatico che gli uomini, ignoranti del tutto i principi del femminismo, classificarono col nome di terzo sesso... donne cioè piangenti sulla loro sorte; critiche spietate e malevoli dell'uomo... Zitelle brutte e schizzanti dal cuore sterile il veleno dell'astinenza forzata... Erano donne nuove, ... donne che lavorano al progresso sociale che contribuiscono all'universale benessere, (Montessori 1899, p. 854)

Visione della scienza come **strumento di democratizzazione, di emancipazione sociale e civile** che la porterà gradualmente ad impegnarsi per una **nuova pedagogia**.

1904 - libera docenza in antropologia e inizia ad occuparsi dell'organizzazione degli asili infantili.



*Teniamo gli scolari in iscuola compressi tra quegli strumenti degradanti il corpo e lo spirito che sono: il banco, e il premio e i castighi esteriori, al fine di ridurli alla **disciplina dell'immobilità e del silenzio**, per condurli dove?... Si tratta di **travasare meccanicamente il contenuto di programmi** nella loro intelligenza: programmi compilati spesso nei ministeri e imposti per legge... Veramente oggi si impone ... il **rinnovamento di metodi per l'educazione e per l'istruzione: chi lotta per questo, lotta per la rigenerazione umana.** (Montessori 1909, II ed 1951, p. 19)*

1907 - nel quartiere San Lorenzo di Roma dà vita alla prima *Casa dei Bambini*, aperta a tutti i bambini, non solo ai portatori di handicap, che diventa un vero e proprio laboratorio per il suo nuovo metodo pedagogico:

La magnifica idea era di riformare un quartiere pieno di rifugiati e di misera gente, come quello di San Lorenzo a Roma, dove una popolazione di circa 30.000 abitanti era stipata, in condizioni che sfuggivano ad ogni controllo civico. (Montessori 1951, p. 36)

1909 – pubblica *Il metodo della pedagogia scientifica*, tradotto in varie lingue (nel 1912 in inglese, francese, nel 1913 in tedesco, polacco, russo, nel 1914-1917 in giapponese, romeno, irlandese, spagnolo, olandese e danese)
II ed. integrata nel 1951 con il titolo *La scoperta del bambino*:

- Internazionalismo culturale
(Wundt, Binet, Itard, Séguin, Bourneville, Manouvrier, ...)
- positivismo scientifico
conoscenze mediche, psichiatriche
e antropologiche
- e istanze del femminismo



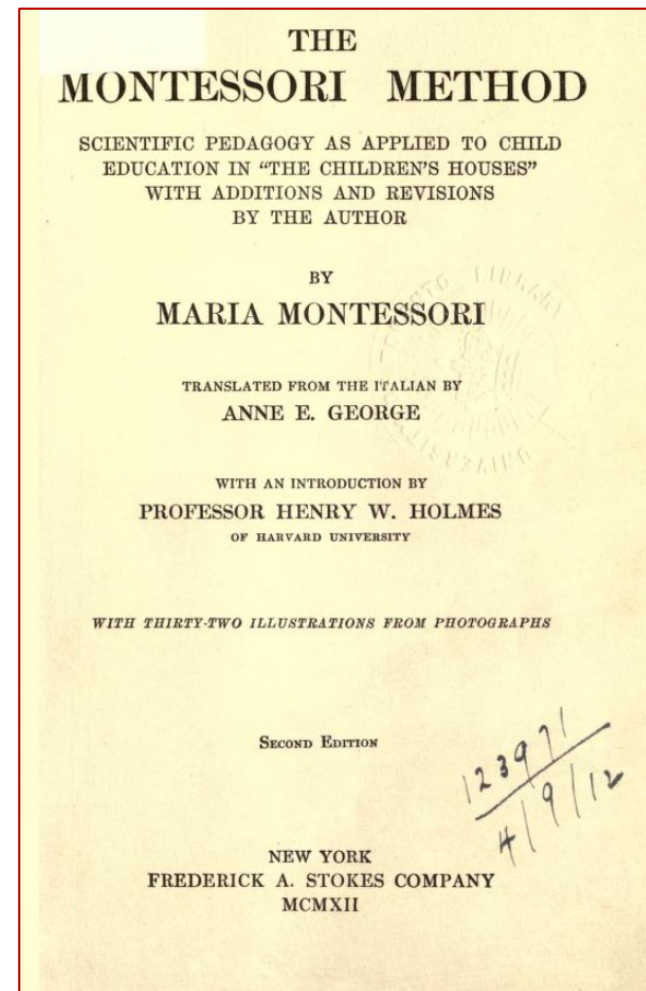
Gennaio 1913 – Corso internazionale di formazione che si tiene nella sua abitazione romana: vi partecipano più di cento educatori provenienti da paesi europei ed extraeuropei (Americhe, India, Africa, Australia).

Fine 1913 – viaggio negli Stati Uniti (New York, Washington, Boston) per diffondere il metodo montessoriano: presenta **spezzoni di filmati delle attività nella Casa dei bambini**

1914 – in Spagna

1924 – vengono create la “*Scuola Magistrale Montessori*” e “*l’Opera Nazionale Montessori*” con Maria Montessori presidente onoraria.

In un primo tempo ottiene l’appoggio di **Mussolini**, interessato a risolvere il problema dell’analfabetismo e anche a trarre vantaggi dal prestigio internazionale della Montessori.



I rapporti con il fascismo gradualmente si deteriorano:

1934 – vengono chiuse le scuole Montessori, sia per adulti che per bambini

1936 - l'*Opera Nazionale* è chiusa dal governo fascista.

Maria lascia l'Italia e compie viaggi in vari paesi per diffondere la sua teoria educativa: Spagna, Inghilterra, Olanda, India.



1947 - rientra in Italia e ricostituisce l'*Opera Nazionale*.

6 maggio 1952 – muore a **Noordwijk**, nei Paesi Bassi.

Io prego i cari bambini, che possono tutto, di unirsi a me per la costruzione della pace negli uomini e nel mondo.

Pensiero Pedagogico

Fin da quando negli anni 1898-900 mi dedicai all'istruzione dei fanciulli deficienti credetti d'intuire che quei metodi non avevano nulla di speciale all'istruzione degli idioti - ma contenevano principi di educazione più razionali di quelli in uso: tanto che perfino una mentalità inferiore poteva divenire suscettibile di sviluppo. Questa intuizione divenne la mia idea dopo che ebbi abbandonato la scuola dei deficienti; e a poco a poco acquistai il convincimento, che metodi consimili applicati ai fanciulli normali, avrebbero svolta la loro personalità in un modo meraviglioso, sorprendente. (Montessori 1951, p. 24)

Distacco dalle teorie educative precedenti (bambini immobili nei loro banchi «come farfalle infilate in uno spillo»):

- ❑ **attenzione al bambino e alla sua «mente assorbente»,** per cui deve essere lasciato **«libero di agire, di muoversi, di pensare, di costruire se stesso»**
- ❑ **importanza di un ambiente su misura,**
- ❑ **importanza di materiali** che favoriscano il suo sviluppo neurologico, psichico ed emotivo.



- Principio cardine è la **libertà**:

Libertà di muoversi perché la personalità si forma con lo svilupparsi all'unisono di facoltà psichiche e motorie

Libertà di scegliere l'attività da svolgere seguendo l'istinto, cosa che favorisce l'interesse e la **concentrazione**, sviluppa **capacità organizzative** e **senso di responsabilità**.

Scuola palestra per la ginnastica dello spirito

Gli oggetti matematici non sono sparsi nell'ambiente come gli alberi, i fiori e gli animali. Sono mancate così le occasioni per sviluppare spontaneamente la mente matematica nell'età infantile, il che venne a determinare un ostacolo al successivo sviluppo mentale. Noi perciò chiamiamo i materiali sensoriali astrazioni materializzate o materiale matematico basico. (Montessori 1952, p. 185)



I Materiali

- ❑ Per la maggior parte sono realizzati in **legno**;
- ❑ Sono dipinti con **colori vivaci** in modo da attrarre l'interesse dei bambini;
- ❑ Le **dimensioni** tengono conto delle dimensioni del bambino;

La matematica «con le mani»: il bambino è **protagonista** di quello che sta facendo, e attraverso l'esperienza percettiva arriva alla scoperta.

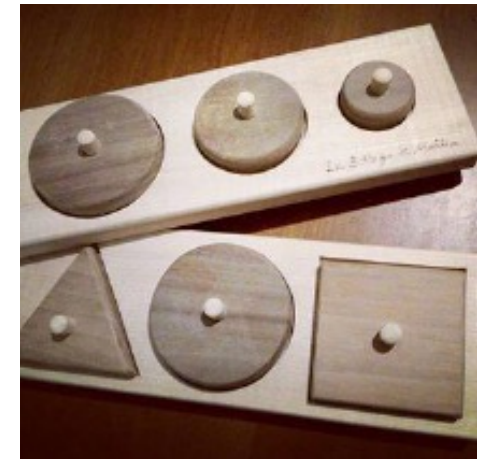
La **scoperta** è il motore fondamentale dell'apprendimento.



Nel materiale stesso è insito il controllo dell'errore:

Il controllo materiale dell'errore conduce il bambino ad accompagnare i suoi esercizi col ragionamento, con la critica, con l'attenzione sempre più interessata all'esattezza, con una capacità raffinata a distinguere le piccole differenze, e prepara così la coscienza del bambino a controllare gli errori, anche quando questi non sono più materiali o sensibilmente evidenti. (Montessori 1952, p. 114)

Emma Castelnuovo: lo scopo della Montessori era quello di suscitare nel bambino *un'intuizione materiale che lo conduca a passare da una concezione concreta all'astrazione* [...] è in questo senso che Maria Montessori ha apportato un elemento nuovo all'insegnamento intuitivo per immagini, un elemento nuovo che autorizza a classificare il suo fra i *metodi attivi*. (E. Castelnuovo 1957, p. 95)

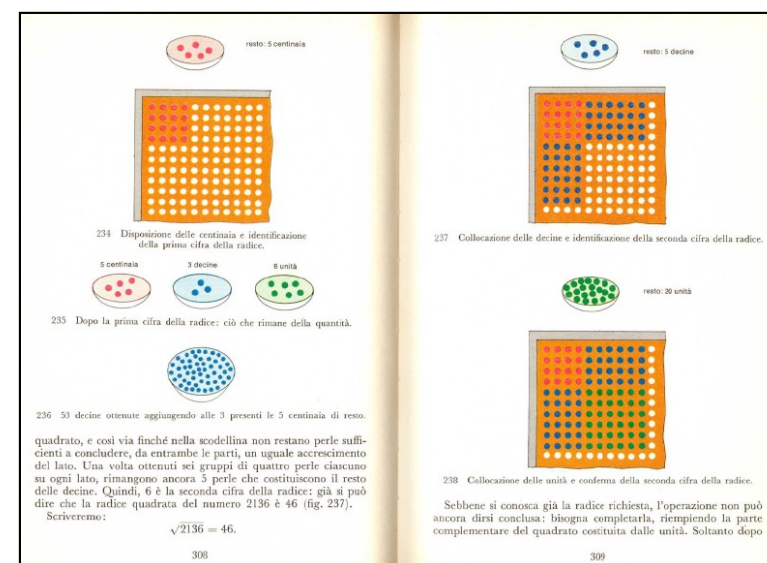
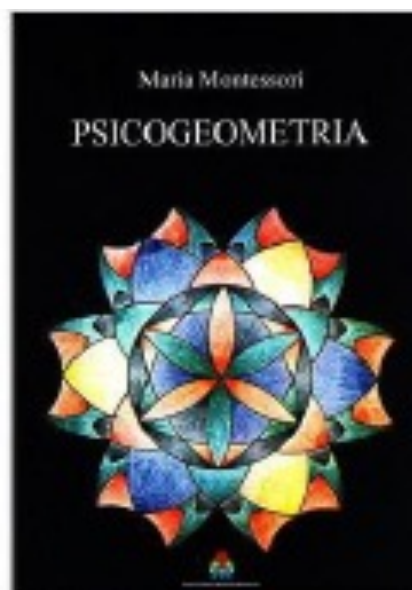


Gli incastri

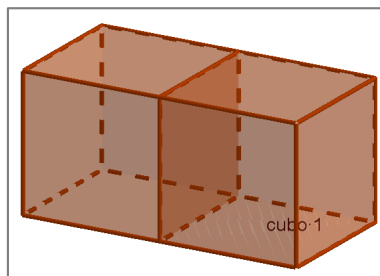
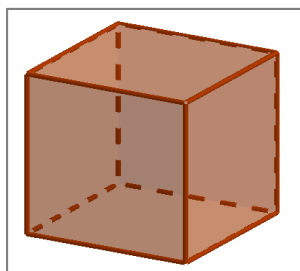
- *Psico-Aritmética*, Barcelona, Araluce, 1934
- *Psicoaritmetica*, Milano, Garzanti, 1971
- *Psico-geometría*, Barcelona, Araluce, 1934
- *Psicogeometria*, Roma, Edizioni Opera Nazionale Montessori, 2011



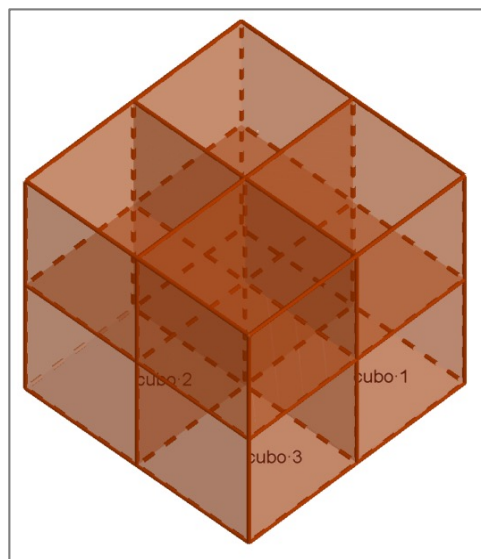
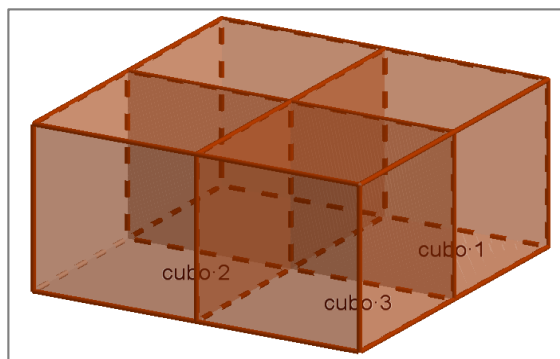
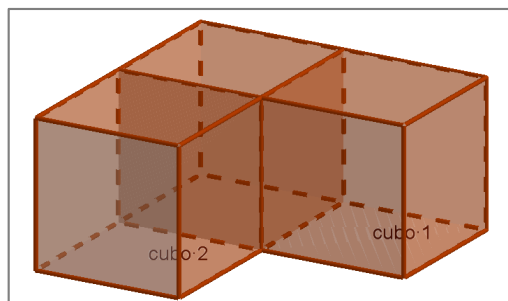
Aritmetica e Geometria sono strettamente connesse e concorrono allo sviluppo psichico equilibrato del bambino.



Dalla torre rosa al cubo del binomio



Cubo di spigolo 1



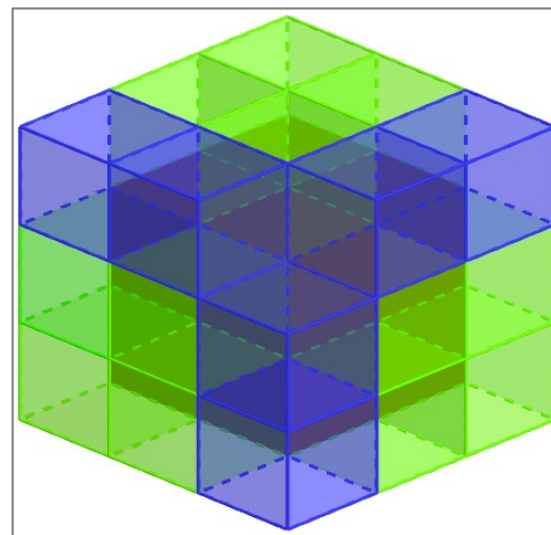
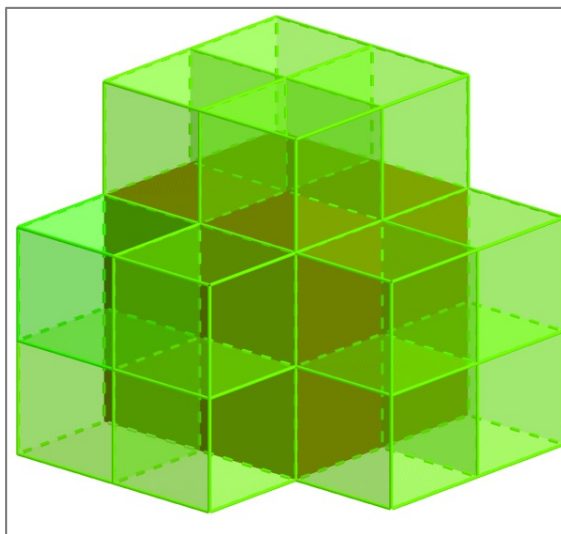
Cubo di spigolo 2:
8 cubetti unitari



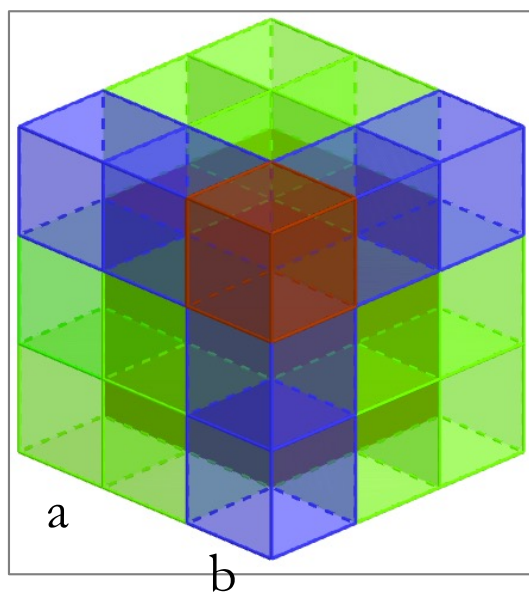
Torre rosa

Psicoaritmetica, pp. 268-277

Costruzione del terzo cubo della *Torre rosa* partendo dal secondo:



Torre rosa

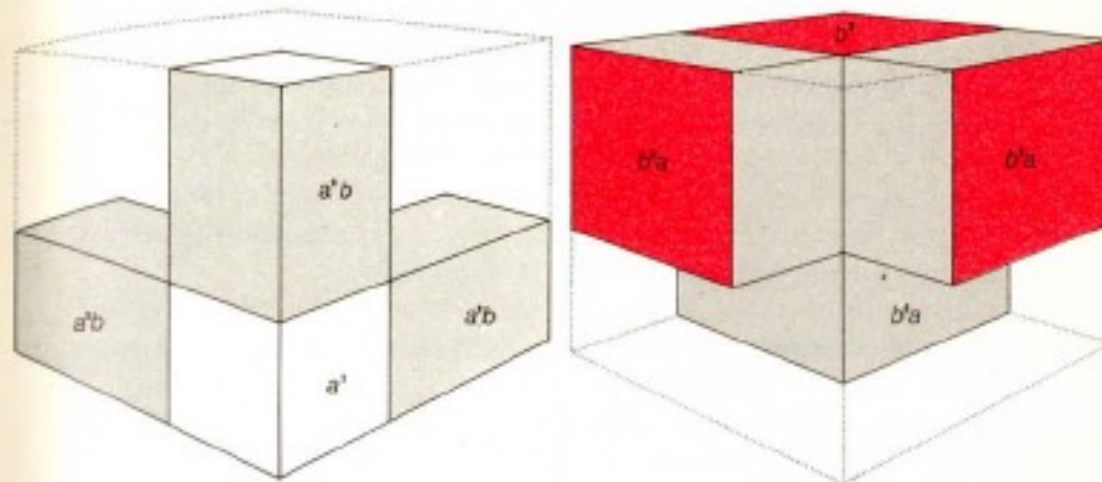


La disposizione delle parti ed il ripetersi dei procedimenti conducono alla formula del *cubo di binomio*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Cubo di spigolo 3: 27 cubetti unitari

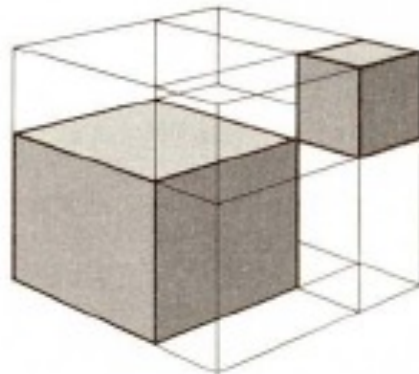
che indica la presenza e insieme la disposizione delle parti costituenti il cubo di un binomio.¹⁵



203 $a^3 + 3a^2b$.

204 $b^3 + 3b^2a$.

Per « veder dentro » nella formula, abbiamo fatto costruire gli otto pezzi costituenti il cubo del binomio con due diversi materiali: di legno nero i due cubi e di cristallo trasparente i sei prismi.



205 L'esplorazione della formula.

¹⁵ Infatti: il cubo di un binomio è il quadrinomio i cui termini sono: il cubo del primo monomio, il triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, il triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, il cubo del secondo monomio.

**«vedere dentro» la
formula del cubo del
binomio**

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Metodologia seguita:

- MM tende a partire da un esempio semplice, poi accresce gradualmente la difficoltà per giungere infine alla generalizzazione.
- costante utilizzo dei materiali poiché la **manualità** incentiva l'apprendimento.
- **L'esplorazione è prima sensoriale e poi matematica.**
- Gli stessi materiali si utilizzano più volte con diversi scopi, in modo che gli alunni abbiano già una familiarità con essi.
- Sono proposti vari esempi, e riguardo ai problemi MM osserva che «è desiderabile che siano i bambini stessi a porsi dei problemi»
(Montessori 1971, p. 423). Problemi sotto forma di racconto

Emma Castelnuovo
sul metodo
Montessori (1957):

Nel metodo Montessori invece l'esperienza matematica non si esercita su fenomeni che variano con continuità, ma si procede a sbalzi; siccome però si lavora su un materiale artificiale, si può estrapolare, ci si può cioè a un certo punto distaccare dal materiale, idealizzandolo. Per esempio si può, lavorando con le aste rosse e blu, pensare di aggiungere sempre un'asta ancora e così arrivare all'idea di infinito.

Margherita Piazzolla Beloch

(Frascati 1879 - Roma 1976)



1879 – nasce in una famiglia multiculturale: padre tedesco, madre americana

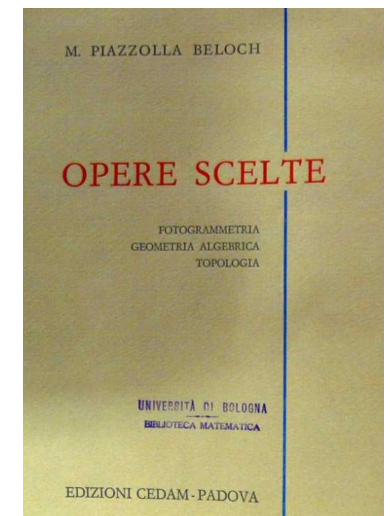
1908 – si laurea a Roma con Guido Castelnuovo con una tesi sulle trasformazioni birazionali nello spazio

1916 – Sposa il proprietario terriero Ruggero Piazzolla

1927 – dopo alcuni anni come assistente a Roma, Pavia e Palermo, vince il concorso a cattedra di Geometria all'Università di Ferrara.

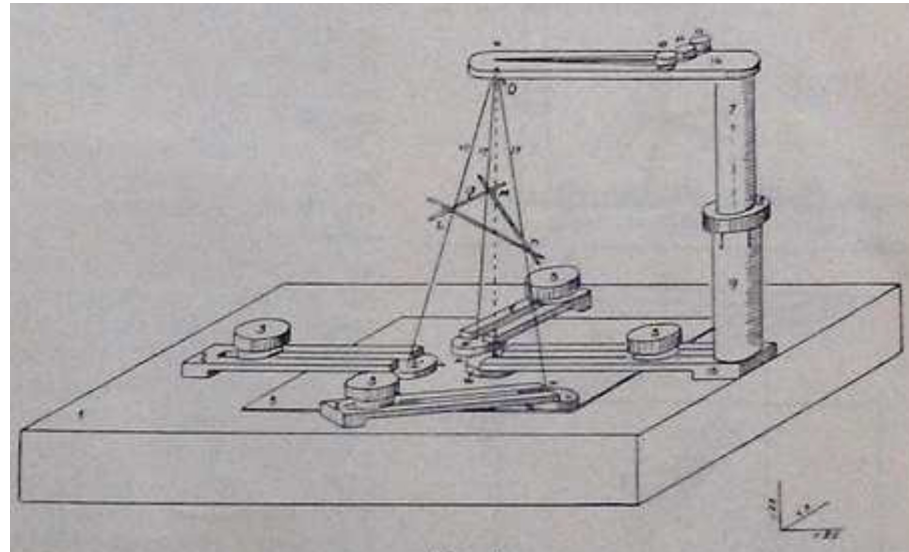
Le pubblicazioni fino agli anni Trenta riguardano tutte la **geometria algebrica** e risentono dell'influenza di Castelnuovo e di Michele De Franchis.

Dal 1933 i suoi interessi si spostarono verso problemi di tipo applicativo nel campo della **fotogrammetria aerea e terrestre** e delle sue applicazioni alla radiologia per scopi medici.



Fotogrammetria

Beloch costruisce un apparecchio
aero-fotogrammetrico per
determinare «*l'altezza di volo
e il punto di stazione di un aereo
in volo al momento della presa di
una fotografia da bordo del
velivolo*» (Beloch, 1967, p. 63).



Röntgenfotogrammetria

Per risolvere la difficoltà di
misurare organi in movimento,
come il cuore MPB costruisce
un'apparecchiatura denominata
“precisometro”.

Nel 1938 fu premiato con la
Coppa d'argento del Ministero
dell'educazione nazionale alla
Mostra delle invenzioni
“Leonardo da Vinci” di Milano.

Tiene il corso di Matematiche Complementari (finalizzato alla formazione dei futuri insegnanti) fin dai primi anni presso l'Università di Ferrara. Le lezioni confluiranno nel secondo dopoguerra nell'opera *Lezioni di matematica complementare: la matematica elementare vista dall'alto* (1953), scritta con Egidio Orzalesi, preside del Liceo Scientifico di Ferrara, e corredata da note storico-bibliografiche .



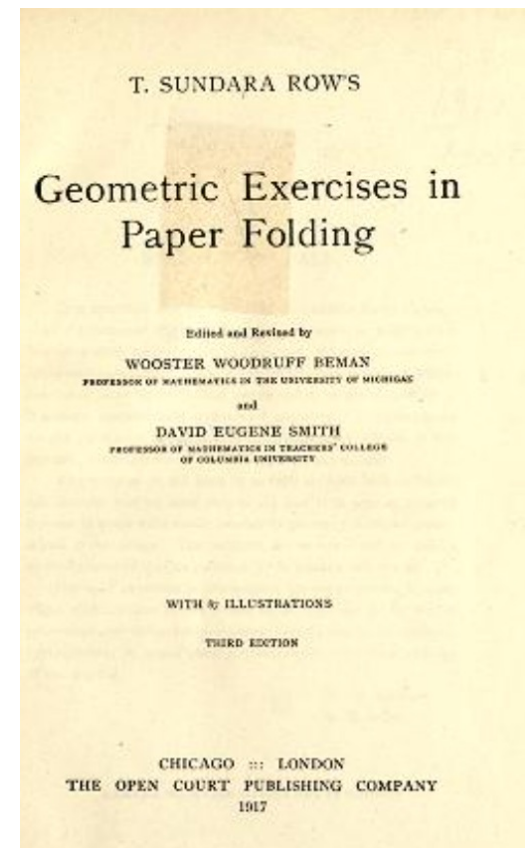
Margherita utilizza la **piegatura della carta** come metodo alternativo per semplificare alcune costruzioni e per risolvere problemi non risolubili con riga e compasso.

Per esempio:

Tracciare la perpendicolare ad una retta data in un suo punto P

Con la piegatura della carta richiede una sola operazione

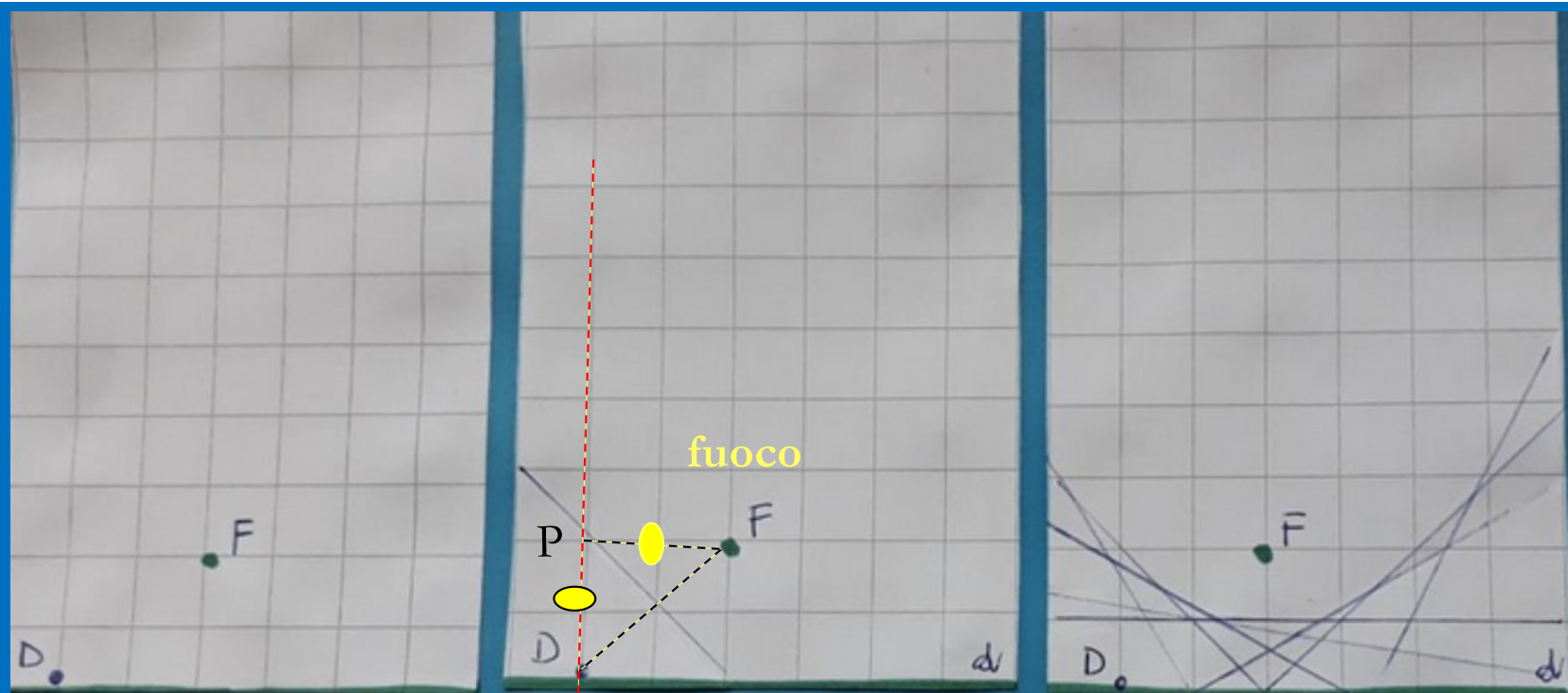
Con riga e compasso 4 operazioni



*Ora si può osservare che questo metodo più che una semplice curiosità matematica, costituisca **uno strumento che può servire utilmente per la risoluzione effettiva di una vasta categoria di problemi geometrici non risolubili con riga e compasso**, come pure può rappresentare un **effettivo risparmio di tempo per certe costruzioni risolubili con riga e compasso** per es. in determinate costruzioni per tangenti delle **coniche** che possono utilmente servire per procurarsi con poca fatica dei modelli delle tre specie coniche.*

*... Il metodo del ripiegamento della carta non richiede, che un foglio di **carta trasparente**, che tutti si possono procurare e **una matita** (e per questioni metriche l'unità di misura segnata sull'orlo d'un ulteriore foglio di carta qualunque).*

*Si può ancora osservare che le operazioni che richiede il suddetto metodo si possono eseguire con la **stessa precisione con cui si fa passare una riga per due dati punti**. (Piazzolla Beloch 1936, pp. 104-105)*



direttrice

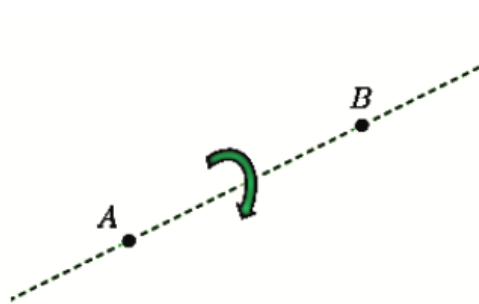
Costruzione di una parabola:

- prendere un foglio di carta
- scegliere un punto F interno al foglio e un punto D su uno dei lati d del foglio stesso
- portare D su F , piegando la carta, e riaprire. Oss: la piega è l'asse del segmento FD .
- scegliere almeno altri 10 punti su d : $D' D'', D''', \dots$ e piegare secondo le istruzioni precedenti.

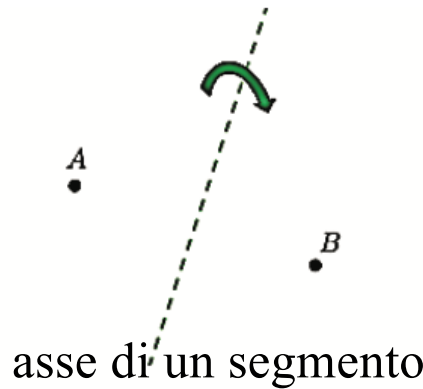
I punti, $P, P', P'' \dots$ intersezione della piega con la perpendicolare a d per $D, D', D'' \dots$ sono punti della parabola

Ogni costruzione con la piegatura della carta può essere descritta come una successione di ripiegamenti basilari.

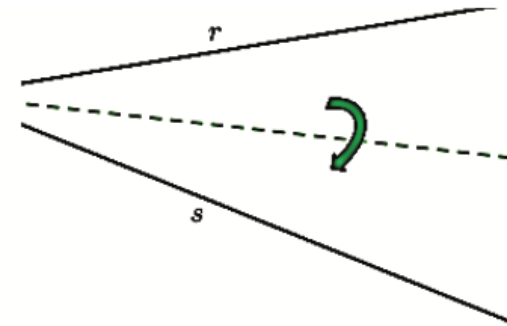
Sundara Row utilizza 5 operazioni di piegatura che sono sufficienti per riprodurre ogni costruzione con riga e compasso:



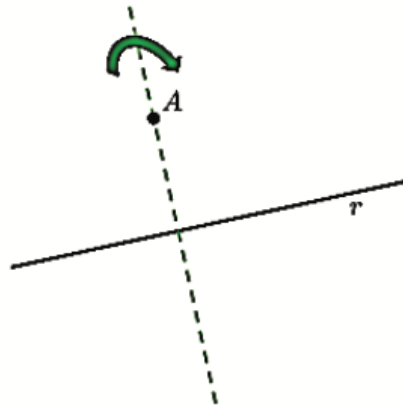
retta per due punti



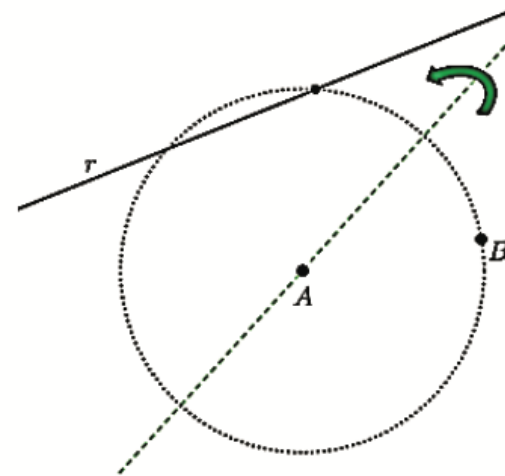
asse di un segmento



bisettrice di un angolo



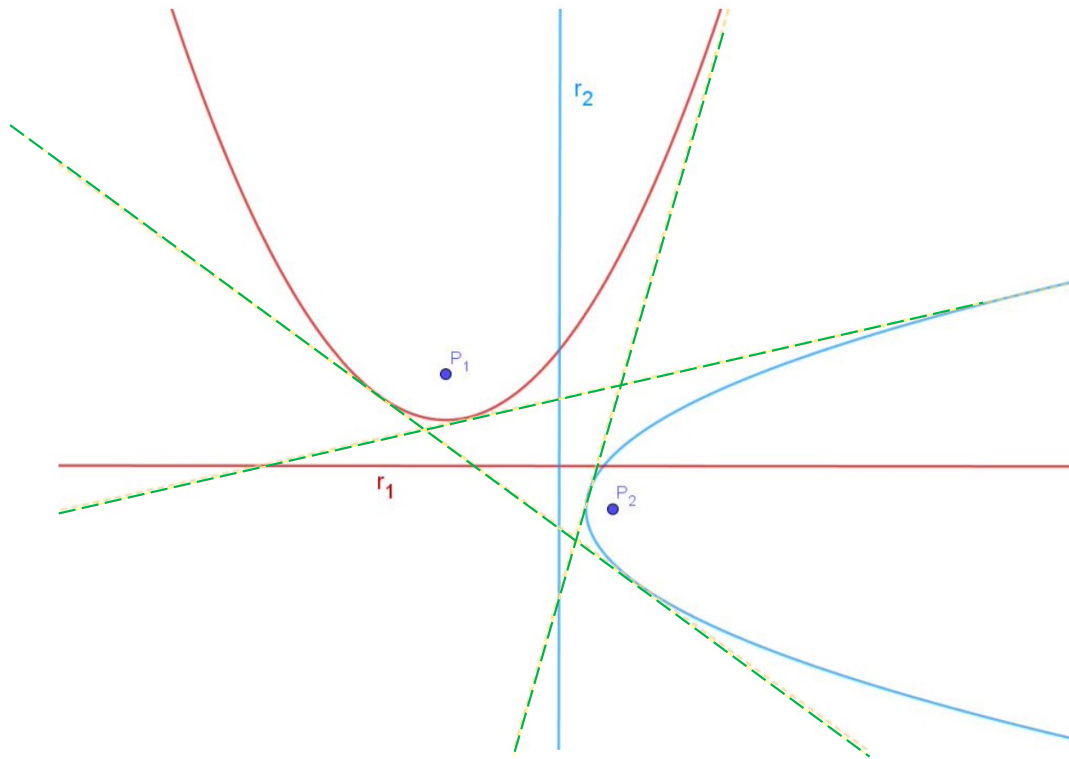
perpendicolare ad una retta per un punto



intersezioni della
retta r con la
circonferenza di
centro A e raggio
AB

Beloch introduce una nuova piega, la cosiddetta *Piega di Beloch* (Beloch 1934), cioè la *la piega, se esiste, che porta contemporaneamente due punti P_1 e P_2 a sovrapporsi rispettivamente su due rette r_1 e r_2* .

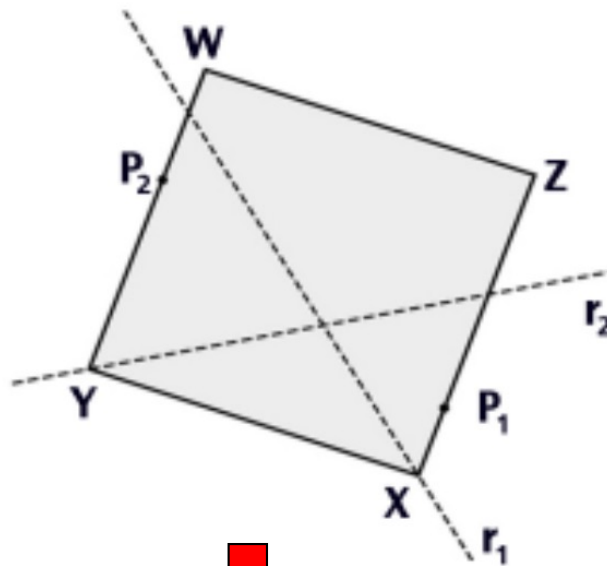
Questa piega equivale a ricercare una **tangente comune a due parabole**, che hanno per fuoco e direttrice i punti e le rette assegnate.



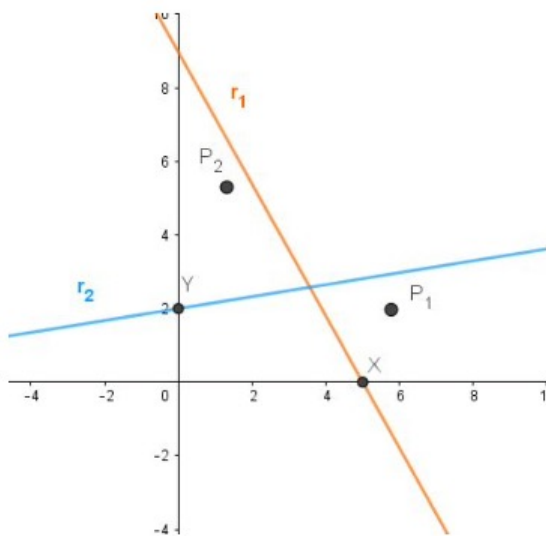
Nel caso particolare in cui le **direttrici delle parabole siano ortogonali**, esiste **almeno una tangente comune alle due parabole** e al più tre quindi al più tre pieghe di Beloch.

Beloch introduce la sua piega per risolvere con la piegatura della carta un problema da lei proposto ai suoi studenti del corso di Matematiche complementari dell'Università di Ferrara, il problema della costruzione del *Quadrato di Beloch*:

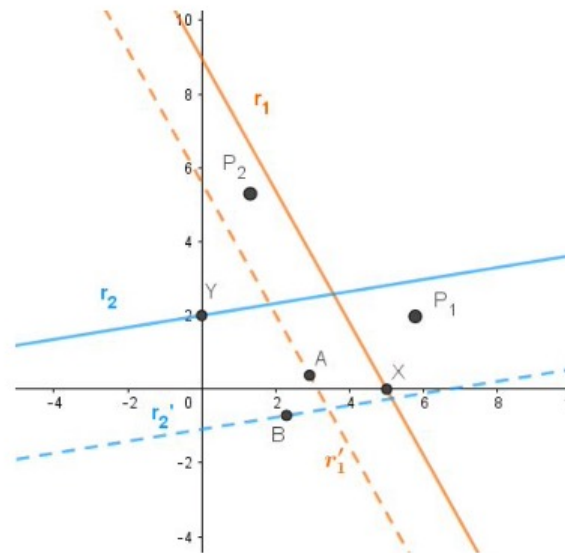
Costruire un quadrato di cui due lati opposti, o i loro prolungamenti, passino per due punti dati, e i due vertici situati su uno dei rimanenti lati stiano rispettivamente su due rette date. (Piazzolla Beloch 1953. p. 416)



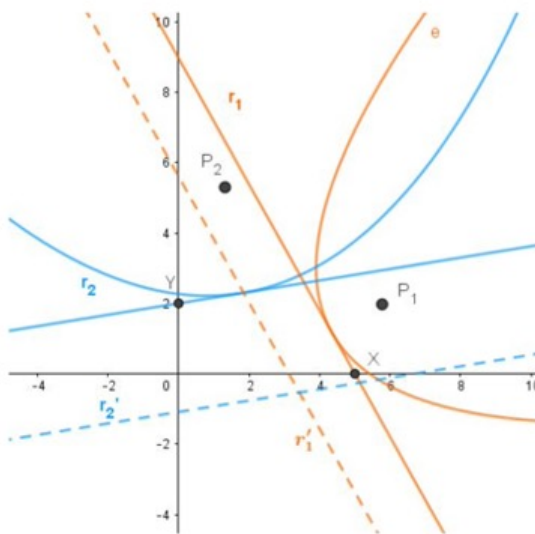
Semplice risoluzione con la piegatura della carta del problema classico della duplicazione del cubo.



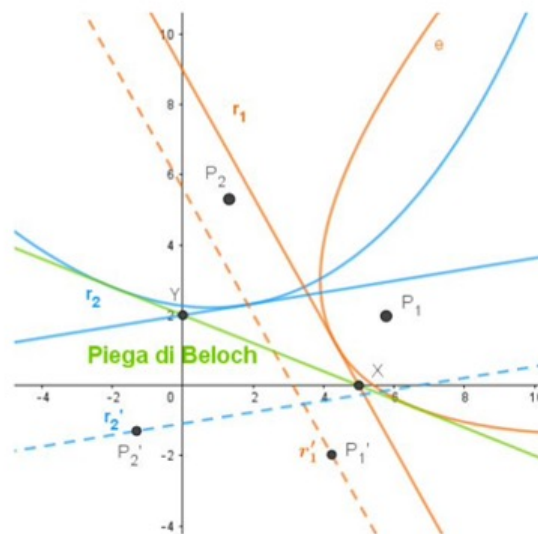
Passo 1.



Passo 2.

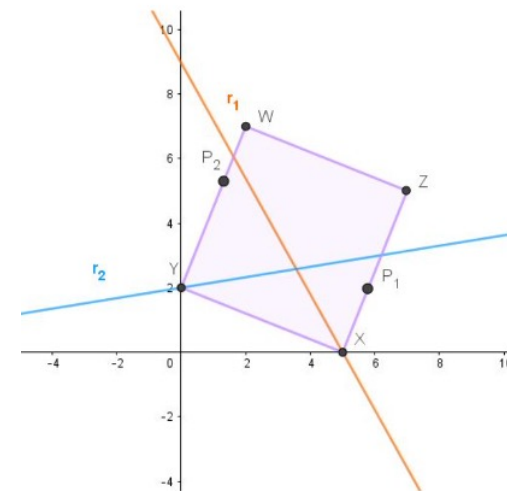


Passo 3.



Passo 4.

Si parte da due rette r_1 e r_2 e da due punti P_1 e P_2 esterni ad esse, si traccia per piegatura una nuova retta r'_1 tale che r_1 sia equidistante da P_1 e r'_1 . Analogamente si traccia r'_2 . Poi si considera la *piega di Beloch* (in verde) che porta P_1 su r'_1 e P_2 su r'_2 . Questa piega è l'asse comune dei segmenti $P_1 P'_1$ e $P_2 P'_2$ e quindi le intersezioni della piega con le rette di partenza sono i vertici X e Y del quadrato di Beloch.



La duplicazione del cubo

È il problema classico (*Problema di Delo*) di trovare il lato x di un cubo il cui volume è doppio di quello di un cubo dato di lato a ; si vuole quindi risolvere l'equazione di terzo grado

$$x^3 = 2a^3.$$

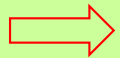
Già **Ippocrate di Chio** (V sec. a.C.) aveva ridotto il problema della duplicazione del cubo al seguente:

Dati due segmenti a, b , costruirne altri due x, y che con a e b , formino la proporzione:

$$a : x = x : y = y : b, \text{ ma non lo risolve.}$$

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ x = \frac{ab}{y} \end{cases}$$



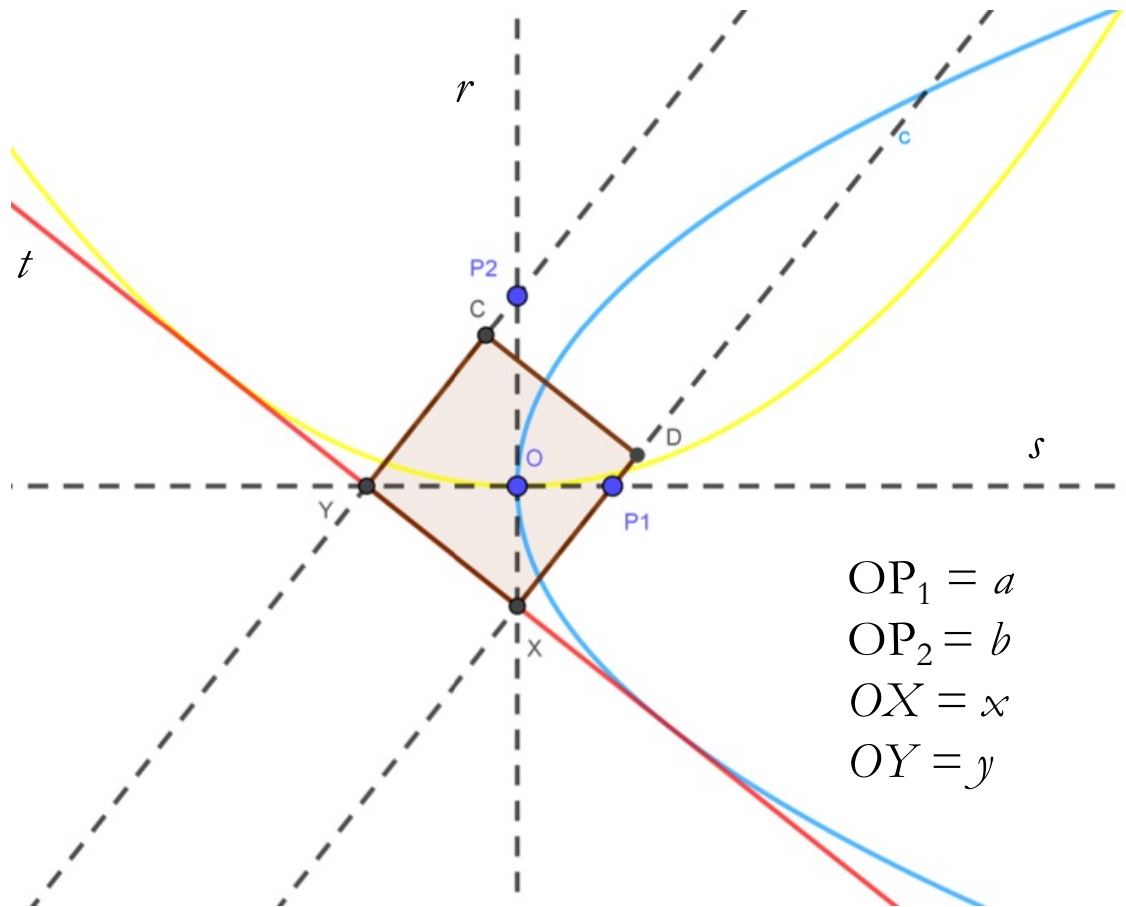
$$\begin{aligned} x^3 &= a^2b \text{ e se} \\ b &= 2a \quad x^3 = 2a^3 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 = ay \\ y^2 = bx \end{cases}$$

x è il lato del cubo di volume
doppio di quello assegnato

Risoluzione con il *Quadrato di Beloch* (Beloch 1936, p. 107)

Prendiamo due rette ortogonali r e s e sia O il p.to di intersezione. Supposto che il p.to P_1 di costruzione del quadrato giaccia sulla retta s e il punto P_2 giaccia su r . Applicando la precedente costruzione si può ottenere il lato XY del quadrato di Beloch.



Si considerino i triangoli P_1XY e P_2XY , si ha:

$$OP_1 : OX = OX : OY = OY : OP_2$$

$$a : x = x : y = y : b$$

da cui, ponendo $b = 2a$

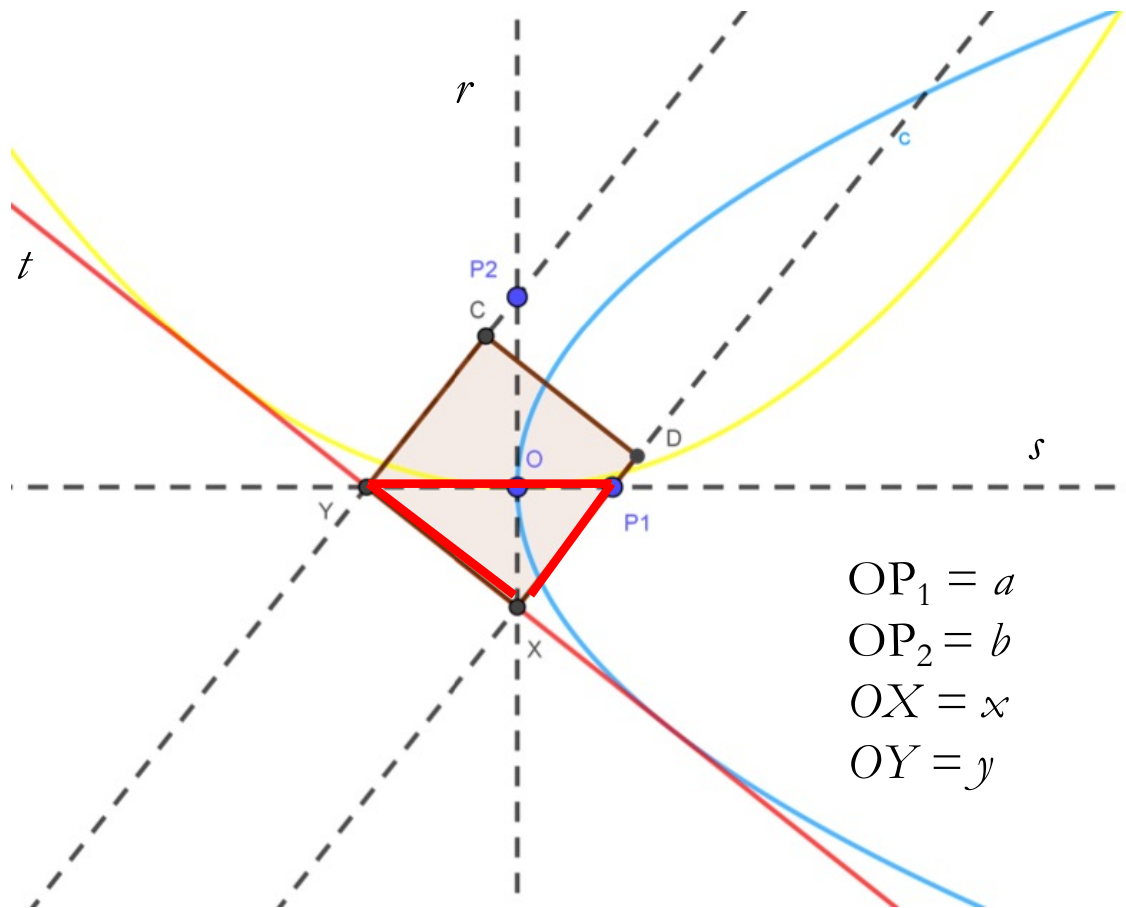
si ottiene $x^3 = 2a^3$

dunque $OX = x$ è il lato del cubo di volume doppio.

$$\begin{aligned} OP_1 &= a \\ OP_2 &= b \\ OX &= x \\ OY &= y \end{aligned}$$

Risoluzione con il *Quadrato di Beloch* (Beloch 1936, p. 107)

Prendiamo due rette ortogonali r e s e sia O il p.to di intersezione. Supposto che il p.to P_1 di costruzione del quadrato giaccia sulla retta s e il punto P_2 giaccia su r . Applicando la precedente costruzione si può ottenere il lato XY del quadrato di Beloch.



Si considerino i triangoli P_1XY e P_2XY , si ha:

$$OP_1 : OX = OX : OY = OY : OP_2$$

$$a : x = x : y = y : b$$

da cui, ponendo $b = 2a$

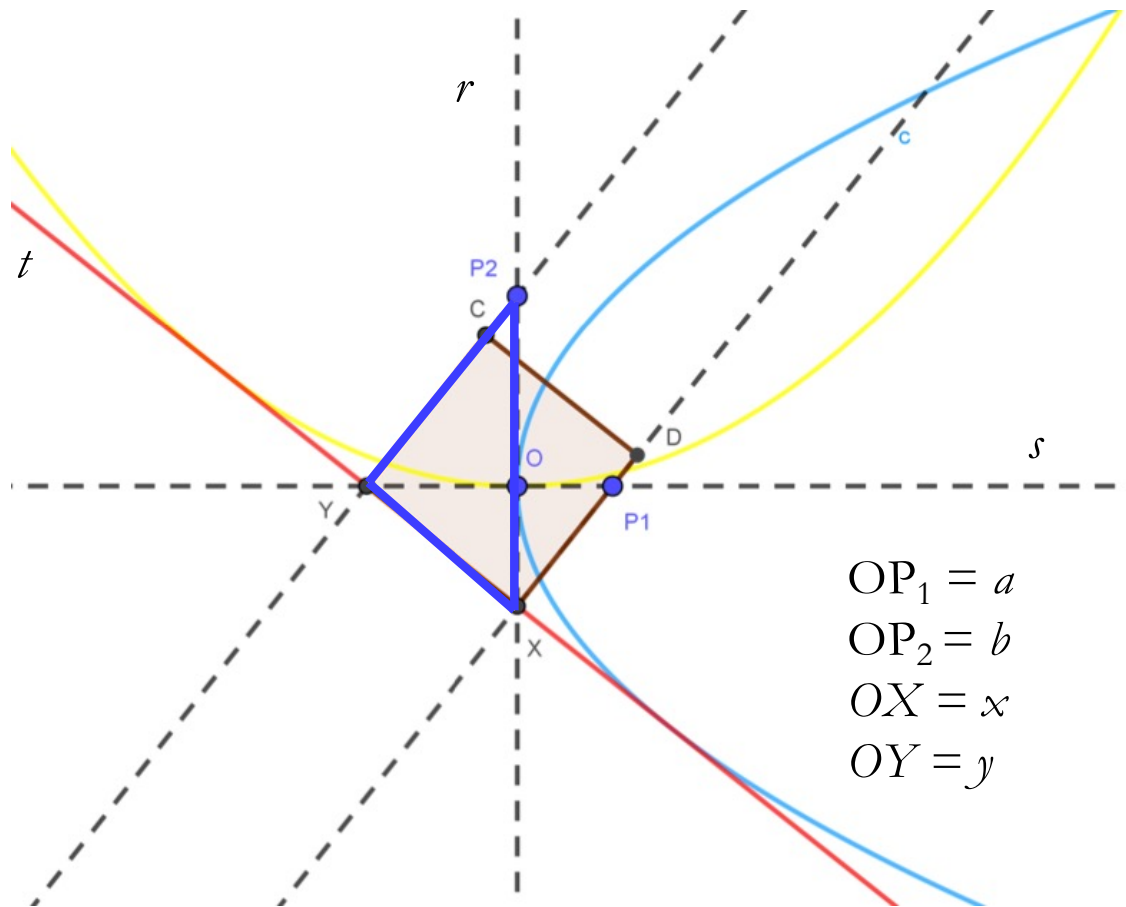
si ottiene $x^3 = 2a^3$

dunque $OX = x$ è il lato del cubo di volume doppio.

$$\begin{aligned} OP_1 &= a \\ OP_2 &= b \\ OX &= x \\ OY &= y \end{aligned}$$

Risoluzione con il *Quadrato di Beloch* (Beloch 1936, p. 107)

Prendiamo due rette ortogonali r e s e sia O il p.to di intersezione. Supposto che il p.to P_1 di costruzione del quadrato giaccia sulla retta s e il punto P_2 giaccia su r . Applicando la precedente costruzione si può ottenere il lato XY del quadrato di Beloch.



Si considerino i triangoli P_1XY e P_2XY , si ha:

$$OP_1 : OX = OX : OY = OY : OP_2$$

$$a : x = x : y = y : b$$

da cui, ponendo $b = 2a$

si ottiene $x^3 = 2a^3$

dunque $OX = x$ è il lato del cubo di volume doppio.

$$\begin{aligned} OP_1 &= a \\ OP_2 &= b \\ OX &= x \\ OY &= y \end{aligned}$$



La matematica in relazione alle sue applicazioni ed al suo valore educativo, discorso inaugurale dell'anno accademico 1929-30 dell'Università di Ferrara.

«Valore educativo della matematica e valore rispetto alle applicazioni. Che cosa hanno in comune?»

...i due problemi sono strettamente collegati. L'abitudine a pensare con rigore matematico sorreggerà il tecnico anche là dove avrà messo da parte le formule e i calcoli e si affida all'esperienza. D'altra parte più saranno i campi in cui la matematica trova applicazioni, più importanza essa acquista anche come mezzo educativo per la formazione della mente, intesa nel significato più vasto»

Presenta «un viaggio attraverso i secoli per osservare da vicino lo sviluppo della matematica nelle diverse epoche e le sue relazioni alle applicazioni e alla educazione» (p. 538)

Accoglie il punto di vista di Klein

Bibliografia essenziale

- T. BORGATO, R. SALMI, *La geometria degli origami e la risoluzione delle equazioni algebriche*, *Periodico di Matematiche*, 3, 2018, pp. 57-71
- L. GIACARDI, “*Lavorare con le mani e con la mente*”. *Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento*, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 39, 2016, pp. 517-549.
- I. GRATTAN-GUINNESS, *A Mathematical Union: William Henry and Grace Chisholm Young*, *Annals of Science* 29 (1972): 105–186.
- I. GRATTAN-GUINNESS, *Un'unione matematica. William Henry Young e Grace Chisholm*, in: *Scienza a due voci*, Raffaella Simili (ed.), Firenze: Olschki, 2006, 217–246.
- G. LOLLI, *La crisalide e la farfalla. Donne e matematica*, Torino, Bollati Boringhieri, 2000
- E. LUCIANO, C.S. ROERO (a cura di), *Numeri, Atomi e Alambicchi. Donne e Scienza in Piemonte dal 1840 al 1960*, Torino, Centro Studi e Doc. Pensiero Femminile, 2008.
- P. MAGRONE, V. TALAMANCA, *Folding cubic roots: Margherita Piazzolla Beloch's contribution to elementary geometry constructions*, in 16th Conference on Applied Mathematics. APLIMAT 2017, pp. 971-984.
- R. PASSIONE, *Montessori, Maria*
<http://scienzaa2voci.unibo.it/biografie/6-montessori-maria>
- Opera Montessori: <https://www.operanazionalemontessori.it>
- Beloch-Piazzolla-Margherita:
<https://scienzaa2voci.unibo.it/biografie/128-beloch-piazzolla-margherita>

Seminari

- C. TALLONE, G. FERRARI, M. RASPITZU, V. GARRO, *Un approccio laboratoriale alla geometria elementare. Analisi e confronto di due testi di inizio '900: 'Psicogeometria' di M. Montessori e 'Geometria per i Piccoli' di W. H. Young e G. C. Young*, Seminario per il corso di Storia delle Matematiche Due, A.A. 2013-2014 (prof. Livia Giacardi)
- H. APILETTI, I. DAMIANO, G. ISOARDI, *Margherita Beloch Piazzolla e la piegatura della carta*, Seminario per il corso di Storia delle Matematiche Due, A.A. 2020-2021 (prof. Livia Giacardi)

Fonti principali

- M. PIAZZOLLA BELOCH, *La matematica in relazione alle sue applicazioni ed al suo valore educativo*, discorso inaugurale dell'anno accademico 1929-30 dell'Università di Ferrara, in *Annuario dell'Università di Ferrara*, 1930, pp. 25-55.
- M. PIAZZOLLA BELOCH, *Sul metodo del piegamento della carta per la risoluzione dei problemi geometrici*, *Periodico di Matematiche*, s. IV, 16, 1936, pp. 104-108.
- M. PIAZZOLLA BELOCH, *Lezioni di matematica complementare: la matematica elementare vista dall'alto*, Università di Ferrara, 1953
- G.C. CHISHOLM, W.H. YOUNG, *Geometria per i piccoli. L'insegnamento elementare e prescolastico*. Traduz. di L. Viriglio, Torino, Paravia e Comp. 1911
- M. MONTESSORI, *Psicogeometria*, Roma, Edizioni Opera Nazionale Montessori, 2011
- M. MONTESSORI, *Psicoaritmetica*, Milano, Garzanti, 1971
- M. MONTESSORI, *La scoperta del bambino*, Garzanti, Milano 1951