C. VI. 289

G. C. YOUNG E W. H. YOUNG

GEOMETRIA PER I PICCOLI

(THE FIRST BOOK OF GEOMETRY)

per l'insegnamento elementare e prescolastico

Traduzione di L. VIRIGLIO

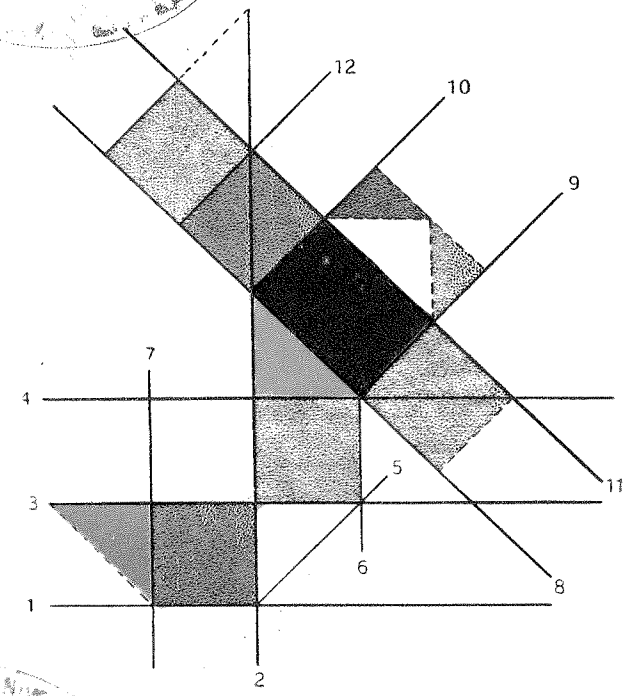
Ditta G. B. Paravia e Comp.
(Figli di I. Vigliardi-Paravia)
Torino - Roma - Milano - Firenze - Napoli

STAMPERIA REALE
PARAVIA E COM. TORINO

BIBLIOTECA

Prezzo L.

74



Modello d'un cuneo, pag. 110.

C. VI. 289

G. C. YOUNG E W. H. YOUNG

GEOMETRIA PER I PICCOLI

(THE FIRST BOOK OF GEOMETRY)

PER

l'insegnamento elementare e prescolastico

Traduzione di L. VIRIGLIO

R. UNIVERSITÀ DI TORINO BIBLIOTECA LETTERARIA

DITTA G. B. PARAVIA E COMP.
(Figli di I. VIGLIARDI-PARAVIA)
TORINO-ROMA-MILANO-FIRENZE-NAPOLI

PROPRIETÀ LETTERARIA

Torino — Stamperia Reale G. B. Paravia e Comp.
711 (M2) VIII-911

NOTA

ALLA TRADUZIONE ITALIANA

Mi è parso che questo libro, scritto per i bimbi inglesi, e del quale è stata fatta subito, appena esso apparve, una traduzione tedesca [1], potesse riuscire utile anche pei fanciulli nostri, a cui la scuola non mi sembra offrire — più che a quelli di cui discorrono gli autori nella loro prefazione — molto aiuto per la formazione di un utile e sicuro senso geometrico.

Il libretto, sebbene semplice e di facile intelligenza, non è fatto per esser dato senz'altro in mano al bambino; ma è prima di tutto un aiuto e una guida per chi lo istruisce, e contiene quanto è necessario introdurre in un primo insegnamento, al quale si richiede di dare, oltre alle nozioni che non si possono ignorare senza danno, anche l'abitudine dell'osservazione e l'attitudine al pensiero scientifico. Potranno perciò giovarsene, insieme cogli insegnanti delle scuole primarie e cogli alunni dei corsi normali e froebeliani, a cui sopra tutto io pensavo facendo la traduzione, anche le persone

[1] *Der kleine Geometer*. Lipsia, Teubner, 1908.

che, o non essendo obbligate a svolgere un particolare programma, o anche non avendo avuta una speciale preparazione all'insegnamento matematico, desiderano iniziare un fanciullo a serî e proficui studi superiori con un primo insegnamento essenzialmente domestico. È mio desiderio ed augurio nel presentare il libro che esso aiuti a render leggero e dilettevole ai bimbi l'acquisto di una scienza che non solo potrà essere per loro di immenso valore pratico, ma ancora divenire sorgente di intensa e profonda gioia dello spirito.

Ho avuto conoscenza dell'opera nel suo testo originale per cortese comunicazione del prof. Corrado Segre, l'autorità del cui nome ha pure contribuito a rendere possibile l'edizione italiana del libro. Del suo interessamento in questa occasione, e del favore del suo prezioso consiglio nei dubbi e nelle difficoltà, voglia egli permettermi di rendergli qui grazie vivissime. Desidero anche ringraziare i signori coniugi Young, che permisero la traduzione del loro lavoro, fornendo anche gentilmente gli originali delle fotografie, e gli Editori, i quali hanno con grande amore dato opera a che il libro si presentasse tipograficamente nella migliore veste possibile.

LUISA VIRIGLIO.

PREFAZIONE

ALL'EDIZIONE INGLESE

Lo studio della Geometria nelle scuole primarie e secondarie è reso assai difficile dal fatto che gli allievi non hanno in precedenza fatto l'abitudine all'osservazione geometrica. L'educazione da essi ricevuta ha impedito, in luogo d'incoraggiarla, la loro tendenza naturale a un atteggiamento del pensiero consono all'ambiente a tre dimensioni in cui si svolge la nostra vita. La Geometria piana è, in un certo senso, più astratta della Geometria a tre dimensioni, la così detta Geometria solida, ed è piuttosto introdotta artificialmente come parte di un sistema più conforme alla natura. Uno dei motivi per cui la Geometria piana è stata per tanti secoli considerata come uno studio a parte e da farsi come preparazione allo studio completo della Geometria è probabilmente il soccorso didattico che ad essa veniva dall'essere possibile il disegno di figure piane sul foglio o sulla lavagna. Il metodo di riproduzione dei disegni ha i vantaggi seguenti:

1) Non richiede speciali apparecchi.

2) E facile ad insegnarsi e ad apprendersi, richiedendo soltanto attenzione ed esercizio.

3) Si possono rifare le figure quante volte occorra, così che l'allievo, mentre acquista l'abilità necessaria per disegnarle, si familiarizza insieme colle verità che le figure rappresentano.

Sembra che appunto la mancanza, per la Geometria solida, di un metodo didattico soddisfacente alle medesime condizioni, abbia fatto posporre lo studio di essa fino a un periodo della vita in cui le verità elementari riguardanti lo spazio e gli oggetti solidi hanno già perduto il loro primitivo interesse. E si è venuti a considerare la Geometria solida come uno dei più difficili e astrusi soggetti matematici di studio. Non la si affronta seriamente che nelle scuole secondarie superiori e nelle Università, dove è svolta sopra tutto con metodi analitici. È poi d'altra parte opinione comune che la Geometria sia unicamente un soggetto di studio scolastico, e che i fanciulli non lo debbano incominciare prima dei dieci anni o anche più tardi. (Noi abbiamo udito sentenziare che sarebbe dannoso per un bimbo « tormentarlo con la Geometria »).

La Geometria, così come noi l'abbiamo in mente, non è affatto un tormento: non ha necessità di aule scolastiche nè di lavagne nè di particolari strumenti. Non richiede neppure un insegnante provetto nè forza il fanciullo a un'attenzione troppo prolungata

È essenzialmente un soggetto casalingo e per la prima età [1].

Se non si fa per lui un lavoro preparatorio, il ragazzo di dieci o più anni, che incomincia la Geometria a scuola, non ha alcuna nozione geometrica elementare. Non ha idea, per esempio, di ciò che rappresenti un angolo o della grandezza relativa di oggetti lontani e di come la si possa apprezzare. D'altra parte le forme geometriche più semplici, se sono presentate a lui tutte insieme, importano ben poco a un fanciullo decenne; egli non si divertirà molto a contare i vertici d'un cubo, a girarlo e maneggiarlo, a farne per una dozzina di volte il modello e a ritagliarlo. E tuttavia, senza tali semplici esercizi pratici, egli non avrà mai veramente familiare il cubo e le possibilità che esso gli offre di verificare molte delle relazioni fondamentali che costituiscono la Geometria.

L'ostacolo allo sviluppo razionale dell'idea geometrica è stato posto dalla mancanza di un metodo sostituente il disegno della Geometria Piana. Il disegno di figure solide è troppo difficile: costruire i modelli, che si limitano sopra tutto a modelli di cartone, lo è pure assai: è inoltre ingombrante, relativamente dispendioso e richiede una continua

[1] L'età deve naturalmente variare da un fanciullo all'altro. Per esperienza nostra la Geometria diletta fanciulli di sette od otto anni, e può in qualche parte occupare piacevolmente bimbi di quattro o cinque, di intelligenze varie.

sorveglianza. Si può sempre dare ad un piccolo fanciullo carta a volontà, una matita, qualche spillo, anche le forbici; ma non già pasta, cartone e un temperino. I metodi del presente libretto non richiedono altro materiale che carta, talvolta alcuni spilli, una matita ed un paio di forbici: queste ultime veramente possono quasi sempre essere omesse. I modelli e i diagrammi costruiti con questi semplici mezzi sono, se fatti per bene, buoni e durevoli. Quelli costruiti da un bimbo saranno naturalmente imperfetti da principio, ma egli li può costruire da sè e ripeterli quante volte gli piaccia: e intanto non solo acquista l'abilità manuale, ma si familiarizza colle verità che egli sa essere rappresentate da ogni modello. Appunto perchè fa *da sè* egli non riceve idee da un altro, ma impara per conto proprio, e svolge ciò che si può chiamare il suo senso geometrico.

In ciò che si è detto è tutta la ragione e la natura di questo piccolo libro. Esso non è un libro di testo che si debba studiare. Si spera che possa essere un aiuto per l'insegnante o per una persona adulta la quale desideri guidare e aiutare un fanciullo e non dare semplicemente un insegnamento meccanico. Servirà anche al fanciullo stesso, dato il gran numero di figure. Molte cose nel libro sembreranno a prima vista difficili; ma esse possono, debbono anzi, essere omesse da principio e saranno poi assimilate a una seconda lettura. Il libro è fatto per aiutare il fanciullo a lavorare e ad acquistare idee, che, non prive d'importanza al momento in cui egli le acquista, saranno più tardi per lui di un valore incalcolabile.

Per i bambini molto piccoli bisognerà limitarsi alla costruzione delle figure del rombo, del triangolo isoscele ed equilatero, della sfera, del cubo, del tetraedro, dell'ottaedro, ecc. I bimbi potranno tagliare i modelli già disegnati nel modo indicato o in qualunque altro modo conveniente, e riunire le figure e le loro parti a formare dei solidi nuovi, contare delle loro figure i vertici, gli spigoli, le faccie e notarne le posizioni rispettive. In tal modo, e forse in tal modo soltanto, può chiunque acquistare quella sicura familiarità colle forme e le posizioni che costituisce il così detto senso geometrico. Uno scolaro più grande potrà fare molto di più: disegnare o piegare i modelli da ritagliare, seguire i ragionamenti e appropriarsi i metodi usati in modo da applicarli alla trattazione di casi diversi. Fra i concetti geometrici elementari è da notarsi che la nozione d'angolo e la retta interpretazione di quello a cui esso serve si può solo acquistare a grado a grado. Nel presente studio introduttivo della Geometria la costruzione di modelli d'angoli e le misure accurate fatte con essi, le suddivisioni d'angoli, specialmente di angoli retti, le « dimostrazioni con piegature »

dei teoremi relativi agli angoli di un triangolo sono tutti aiuti destinati a facilitare la nozione d'angolo. I mezzi meccanici di misura saranno meglio apprezzati dall'allievo quando già egli si sia esercitato coi metodi più semplici. È un fatto ben noto che la domanda « Quanto vi sembra grande la luna? » provoca le risposte più disparate. « Grande come uno scudo, come un piatto, come un vassoio, ecc. ». Anche le persone adulte non solo non sanno quali parole adoperare per rispondere a tale domanda, ma neppure hanno in mente un concetto o un'immagine abbastanza netta di una cosa che vedono così spesso come la luna. Uno degli scopi da ottenere collo studio degli angoli è di insegnarci a rivolgere chiaramente domande simili sugli oggetti in mezzo a cui viviamo e a rispondere alle nostre domande almeno approssimativamente o a capire le risposte che ci facciamo dare da qualcun altro.

È da notare un'altra cosa. Vi hanno proposizioni di Euclide che ognuno deve conoscere, sappia o no dimostrarle. Sono: — La somma di due lati di un triangolo è maggiore del terzo lato. In un triangolo al lato maggiore è opposto l'angolo maggiore. La somma di due angoli di un triangolo vale meno di due angoli retti. E il teorema di Pitagora. — Le prove di questi teoremi, nei disegni di Euclide, dipendono generalmente in modo assoluto dalle unite dimostrazioni verbali. Uno degli scopi di questo

libro è stato di presentare queste fondamentali proposizioni, per quanto era possibile, in forma tale da poter essere ricordate o ritrovate con un metodo di dimostrazione indipendente da ragionamenti fatti a parole. Le dimostrazioni fatte con piegature di carta possono essere ben condotte da fanciulli che non riuscirebbero a disegnare una buona figura: e si può piegare più e più volte uno stesso foglio mentre coi diagrammi ciò che è disegnato è disegnato e non c'è interesse a passare sulle righe un'altra volta. È essenziale, perchè una dimostrazione mediante piegatura sia buona, di poterla ripetere, e abbiamo perciò evitato le dimostrazioni ottenute ritagliando.

Riassumendo, adunque, gli scopi del presente libretto possono essere stabiliti come segue:

1. Presentazione delle idee geometriche primitive.
2. Presentazione in forma grafica dei primi teoremi geometrici.
3. Esposizione di metodi pratici che — non richiedendo *a*) nè strumenti speciali *b*) nè grande sorveglianza *c*) nè grave spesa o disturbo — conducano alla conoscenza degli oggetti piani e solidi e delle relazioni che ne determinano le posizioni e le forme.

GRACE CHISOLM YOUNG.
V. H. YOUNG.

INDICE DELLE MATERIE

§ 1. Nozioni preliminari.

Pag.

zio, solidi, superficie, volumi 1

§ 2. La linea retta.

Pag.

truzione di una linea
etta 4
ee curve e spezzate . . 6
e punti individuano una
etta 7
Segmenti o tratti 8
Prolungare una retta. Retta infinita 8
Raggio o semiretta; stella 10
Verticale 12

§ 3. Il piano.

prietà caratteristica del
iano 13
no verticale 15
no orizzontale 17
Superficie non piane . . . 18
Parallelepipedo rettangolo 21
Incontro di piani 25

§ 4. Cilindro e cono.

26

§ 5. Divisione del piano mediante una linea retta.

31

§ 6. Angoli.

finizione dell'angolo . . 33
rtice, lati 33
do di nominare un angolo 33
Interno ed esterno di un angolo 33
Modello d'angolo 34
Angolo sotteso all'occhio. 35

§ 7. Eguale, maggiore, minore.

Pag.

Rette eguali (segmenti eguali) 35
Principio di sovrapposizione 36
Maggiori e minori 38

§ 8. Circolo.

Costruzione della circonferenza 41
Luogo 42
Rotazione 43
Centro, raggio e diametro 43
Area del circolo 44
Simmetria 45
Modello di sfera con meridiani ed equatore . . . 47
Centro, raggio e diametro della sfera 50
Sfera come luogo 52
Quadranti, ottanti 52
Bolla di sapone 53
Circoli congruenti 54
Circoli concentrici 56
Paragone delle aree di circoli diversi 56

§ 9. Divisione di un segmento.

Bisezione di un segmento 57
Punti sovrapposti piegando 60

§ 10. Eguaglianza d'angoli.

Angoli eguali 61
Multipli d'un angolo . . . 62
Angoli sottesi all'occhio . 63
Diametro angolare della luna e del sole 64
Costruzione d'un angolo eguale a un angolo dato 65
Angoli al centro di un cerchio 66
Arco, corda, archi complementari 66

§ 11. Divisione degli angoli.

Bisezione di un angolo mediante un modello . . . 68
Bisezione di un angolo senza far uso del modello 69

§ 12. Paragone di angoli diseguali.

Angoli maggiori e minori 71
Rotazione, linea iniziale, verso della rotazione, l'orologio 73
Angolo concavo 74

§ 13. Perpendicolarità.

Pag.
Piegare una perpendicolare 75
Per un punto passa una sola retta perpendicolare a una retta data 76
Angoli retti 77
Angoli supplementari . . 79
Angoli adiacenti e opposti al vertice 81
Punti sovrapposti piegando 83
Disegnare una perpendicolare 84
Intersezione di due circonferenze. 85

§ 14. Il rombo.

Definizione del rombo . . 88
Quadrilatero, diagonale . 88
Simmetria del rombo. . . 89
Area del rombo 89
Costruzioni del rombo . . 89
Angoli del rombo 94

§ 15. Il quadrato.

Definizione del quadrato . 95
Piegatura del quadrato . 96
Simmetria del quadrato . 97
Disegnare un quadrato. . 98
Paragone delle aree di dati quadrati 99
Misure d'area 101

§ 16. Il cubo.

Definizione del cubo . . . 102
Modello di un cubo . . . 103
Facce, vertici, spigoli . . 105
Diagonali 107
Modello di due cunei formanti un cubo 109
Centro del cubo 111
Simmetria del cubo . . . 112
Modelli di parallelepipedi rettangoli da riunire per formare un cubo 113

§ 17. Il rettangolo.

Definizione del rettangolo 116

§ 18. Perpendicolarità.

Retta e piano perpendicolari 118

§ 19. Triangolo isoscele.

Definizione e costruzione del triangolo isoscele . . 120
Angoli di un triangolo isoscele. 121
Area del triangolo 122
Somma degli angoli di un triangolo isoscele. . . . 123

§ 20. Triangolo equilatero.

Pag.
Costruzione di un triangolo equilatero 123

§ 21. Esagono regolare.

Costruzione dell'esagono regolare 127

§ 22. Triangolo, rettangolo isoscele 128

§ 23. Tetraedro di punta.

Pag.
Taglio del tetraedro da una punta del cubo 129
Modello del tetraedro di punta 130
Cubo con una punta tagliata 133
Il battello di punta . . . 134
Il doppio tetraedro. . . . 135
Il tetraedro regolare . . . 138
Il doppio tetraedro regolare 140

§ 24. Triangolo.

Triangolo rettangolo, ottusangolo, acutangolo . . 142
Angoli d'un triangolo . . 142
Somma degli angoli di un triangolo. 143
Lati d'un triangolo. . . . 147
Area del triangolo 149

§ 25. Triangoli congruenti.

Dimostrazione della congruenza di dati triangoli 149
Congruenza diretta e simmetria 152

§ 26. Rette parallele.

Lati opposti di un rombo 155
Definizione delle parallele 156
Costruzione di parallele . 157
Per un punto passa una sola retta parallela a una retta data 158
Spigoli paralleli di un cubo 161
Retta e piano paralleli. . 162
Parallele a una medesima retta. 162
Spigoli sghembi del cubo 163

§ 27. Piani paralleli.

Definizione dei piani paralleli 164
Modello del tronco di tetraedro regolare. 165

§ 28. **Ottaedro regolare.**

Pag.

Confronto dei solidi ottenuti sezionando il cubo 167

§ 29. **Proprietà di una coppia di rette parallele.**

Angoli formati da una retta con una coppia di rette parallele 171
Angoli formati da due rette non parallele giacenti in un piano 173
La somma degli angoli di un triangolo vale due angoli retti 175

§ 30. **Triangolo rettangolo.**

L'ipotenusa 176

§ 31. **Area del triangolo rettangolo e del rettangolo.**

Area del triangolo rettangolo 178
Area del rettangolo 179

§ 32. **Teorema di Pitagora.** 182

§ 33. **Parallelogrammi.**

Definizione e proprietà del parallelogramma 186
Area del parallelogramma e del triangolo 189
Divisione di un rombo in due rombi e due parallelogrammi 192

§ 34. **Triangoli coniugati.**

Definizione e costruzione 193

§ 35. **Rette coniugate isogonali.**

La simmediana 196
Estensione del teorema di Pitagora. Teorema di Pappo 200

Applicazioni . . . . . » 202
Indice analitico . . . . . » 223

PRELIMINARI.

§ 1. **Spazio, solidi, superficie, volumi.** — Guardandovi d'attorno, voi vedrete una moltitudine di oggetti, tavole, seggiole, case, alberi, ecc.: tutti questi oggetti sono *solidi;* la parte di un solido che voi potete osservare senza romperlo è detta la sua *superficie.* Ciò che vedete e toccate è parte della superficie di un solido, e, se vi ponete da un altro punto di vista o fate girare l'oggetto, potete vedere o toccare un'altra parte della superficie.

Ogni solido occupa un certo posto o *spazio:* non è possibile porre alcun solido in una porzione di spazio se non se ne toglie quello che vi stava prima. Voi stessi occupate una parte di spazio, e tutto intorno a voi vi è dello spazio, parte del quale è occupato da oggetti solidi e parte dall'aria. Il terreno sotto di voi occupa una parte di spazio e una parte ne prendono le nuvole al disopra di voi. Ben lontano, al di là di queste, il sole, la luna e le stelle occupano porzioni di spazio, e tra voi e il sole c'è dello spazio, e più oltre ancora c'è dello spazio.

1 Young, *Geometria.*

Per quanto grande voi immaginiate una parte di spazio c'è sempre ancora spazio intorno ad essa, e noi diciamo perciò che *siamo circondati da uno spazio infinito*. In questo spazio infinito noi viviamo e stanno in esso tutti gli oggetti a nostra conoscenza. *È scopo della Geometria di ammaestrarci intorno alle forme di questi oggetti e alla loro posizione relativa nello spazio.*

Voi siete forse avvezzi ad usare la parola *solido* in un significato diverso da quello in cui è stato usato più sopra: chiamate *solido* un pezzo di ferro o di legno, ma non l'acqua e certo non una nuvola. In Geometria però tutte le cose intorno a noi — considerate non relativamente al loro stato fisico, ma solo riguardo alla forma e alla posizione in cui si presentano in un dato momento, considerate cioè solo in quanto occupano in quel momento una data porzione di spazio — sono dette solidi. Non ci importa nulla in Geometria della materia che costituisce un oggetto; la forma di esso e la sua posizione sarebbero proprio le stesse se fosse fatto di una materia interamente diversa. Di più non ci importa che l'oggetto possa variare: a ogni momento una certa cosa ha una data posizione, una data forma, una data superficie, e noi non ci occupiamo dei cambiamenti che nelle posizioni o nelle forme di nuvole o di acque possono avvenire in tempi futuri o sono avvenuti nel passato: sono cose importantissime, ma non è in Geometria che ce ne occupiamo.

Gli oggetti che di solito noi sceglieremo di considerare sono oggetti rigidi, che non cambiano forma da momento a momento; talvolta però troveremo conveniente parlare di oggetti che si possono far cambiare di forma, cosicchè si potrà solo pensare per essi a come sono in un istante particolare e immaginarli irrigiditi nella forma che hanno all'istante in cui prendiamo a considerarli.

In realtà tutte le cose cambiano col tempo, perfino le dure pietre e il ferro. La Geometria non è la storia del mondo che ci attornia, ma un aiuto per intenderla e seguirla.

Le superficie degli oggetti intorno a noi dividono lo spazio in due parti: l'*interna* e l'*esterna* alla superficie di cui si tratta. Noi stessi siamo all'esterno della superficie di una palla, di una sedia o di qualunque oggetto che stiamo guardando.

Non si deve neanche pensare che noi siamo all'interno della superficie di una casa, perchè l'interno della superficie della casa è dentro i mattoni che formano le sue pareti e niente affatto ciò che noi chiamiamo usualmente l'interno della casa. Nulla che sia all'interno di una data superficie può mai giungere al suo esterno senza passare attraverso la superficie e così pure, se non passa per la superficie, nulla dall'esterno può giungere all'interno. La porzione di spazio interna a una superficie è chiamata un *volume* e si dice che questo è limitato dalla superficie.

LA LINEA RETTA.

§ 2. **Costruzione di una linea retta.** — Prendete un pezzo di carta e piegatelo per bene in modo da avere una bella piega diritta: questo è ciò che noi chiameremo *una riga di carta*. Non avete bisogno di altra riga se ne avete una di carta fatta bene.

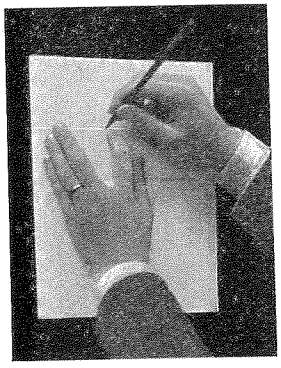


Fig. 1.

Ora appoggiate la vostra riga sopra un foglio pulito, prendete la matita (guardate che abbia una bella punta aguzza) e fatela scorrere lungo il margine della riga di carta (fig. 1).

Togliete ora la riga e guardate ciò che avete disegnato. *Avete disegnato una linea retta.*

Aprendo la riga di carta, vedrete un segno diritto dove l'avevate piegata. Il segno assomiglia perfettamente al vostro disegno, è forse soltanto un po' più largo, per lo spessore del foglio di carta: con un foglio più sottile la piega non apparirebbe così larga. Analogamente la linea a matita sarà grossa

se la matita non aveva una bella punta, e, se temperiamo meglio la matita, condurremo una linea più sottile. Quanto più sottile è il segno della matita tanto migliore sarà l'immagine da noi ottenuta di una linea retta. Abbiamo piegata la carta lungo una linea retta.

Non costruiremo però mai una linea retta vera o disegnandola o facendo una piega dritta nel pezzo di carta, ma costruiremo una imagine o un modello di linea retta atto ad aiutarci a pensare la linea retta stessa, appunto come il disegno di un albero ci aiuta a ricordare come l'albero è fatto o come la fotografia di qualcuno che non abbiamo mai visto ci dà un'idea di come egli sia.

Quando io dico « disegnate una linea retta », intendo dire prendete la riga e la matita e disegnate un qualcosa che si approssimi il più possibile a una linea retta: troverete che non vi riuscirà di farlo così bene al principio come lo farete più tardi. Non avrete la mano ben ferma e ci sarà qua e là una piccola ineguaglianza nella linea retta vostra, ma ciò non vi impedirà di pensare a una retta senza ineguaglianze, anche se non prendiamo la gomma e non cancelliamo la linea rifacendola meglio. Ancora, la vostra matita non sarà affilata quanto è possibile e disegnerete una linea un po' grossa, ma questo non impedisce di immaginare la linea priva interamente di larghezza. Conviene di saper pensare una cosa senza

vederla sempre innanzi a sè. Forse, se chiudete gli occhi e pensate alla linea retta, non vi sarà difficile immaginarla lunga ma niente affatto larga. Potete disegnare la linea più sottile e migliore se, come è mostrato nella fig. 1, temperate la matita a lama anzichè a punta e, rigando, tenete la parte piatta della grafite lungo la riga.

Non potrete mai disegnare senza fare delle linee, ma le linee di un disegno non sono sempre rette. *Una linea non retta è detta linea curva* se non è composta di tratti di retta riuniti insieme. Mi potete disegnare una linea composta di tratti di retta disegnando lungo la vostra riga di carta per un pezzetto, poi cambiando la direzione della riga e partendo colla matita di dove avevate smesso. Una tale linea vien detta talvolta una *spezzata*. Potete disegnarmi una curva senza riga affatto, per esempio facendo un grande O sul foglio colla matita (fig. 2). La curva più semplice è *l'O perfettamente rotondo* o *circonferenza*. Mettendo sul foglio un soldo e girandogli attorno colla punta della matita se ne può disegnare una. Un candeliere, un calamaio, o un altro oggetto simile col fondo rotondo poggia su una circonferenza, che possiamo disegnare nello stesso modo, girando intorno colla punta della matita. Segnato un numero

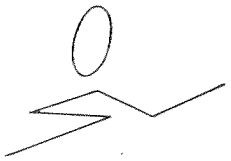


Fig. 2.

qualsiasi di punti, si può sempre riunirli mediante una linea curva o una spezzata (fig. 3), ma se i punti non sono posti convenientemente, non con una linea retta. *Si può condurre una linea retta per due punti e se ne può condurre una soltanto.*

Fig. 3.

Verifichiamo questo: segnate due punti e chiamateli A e B (fig. 4): vedrete che c'è una sola maniera di piegare la carta così che A e B stiano entrambi sulla piega. Si può fare un'altra verifica con la vostra riga: vi sono due modi di disporla così che il suo margine passi proprio sopra i punti A e B: in un caso la riga sta fra voi e i punti, nell'altro oltre questi: nei due casi il margine ha la stessa posizione, e la vostra matita segna tutte e due le volte l'iden-

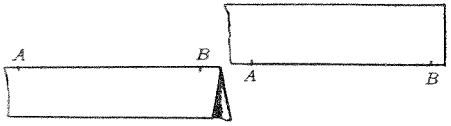


Fig. 4.

tica linea. Quando noi verifichiamo coll'esperienza che una cosa è sempre vera (come abbiamo trovato ora che possiamo condurre una retta e una sola per due punti) esprimiamo ciò che abbiamo trovato in una frase che viene detta *assioma*. Ecco il primo dei nostri assiomi.

Assioma: *Due punti determinano una ed una sola retta passante per essi;* o in altre parole: *Due punti determinano solamente una linea retta.*

La retta che avete disegnato non termina in A o in B, potete farla lunga come la riga, e, spingendo innanzi questa, in modo che una parte del suo margine giaccia lungo la linea disegnata e vada poi oltre, potete prolungare ancora la vostra retta: se il foglio non è abbastanza largo, potete ingrandirlo ingommandogliene un altro accanto e continuare la retta sul secondo foglio. *Per quanto lunga abbiate disegnata una retta potete sempre continuarla.* Perciò è più esatto chiamare quella linea che avevate disegnata dapprima un *segmento* o una *porzione di retta*, o, come talvolta diremo, un *tratto*. Se avete usato le lettere A e B per indicare i punti estremi del tratto, questo viene detto il tratto o il segmento AB; si può anche dire la retta AB se non c'è luogo a confusione; ma di solito la retta AB indica il segmento AB prolungato a volontà oltre A e oltre B.

Quando io dico « *Congiungete A con B* », intendo « *Disegnate il segmento AB* », se voglio che facciate la retta più lunga, dirò « *Prolungate AB* ». Potete prolungare AB o dalla parte di A o dalla parte di B o da entrambe le parti. Se voglio che lo prolunghiate oltre B, dirò « *Prolungate AB nella direzione AB* », cioè nella direzione che da A va in B e poi avanti (fig. 5 [1]). Se voglio che il segmento sia prolungato

oltre B, dirò « *Prolungate AB nella direzione BA*, cioè nella direzione che va da B in A e procede (fig. 5 [2]) e, finalmente, se voglio il segmento prolungato da ambi gli estremi, dirò « *Prolungate AB nelle due direzioni o nei due sensi* » (fig. 5 [3]). La retta determinata dai due punti A e B

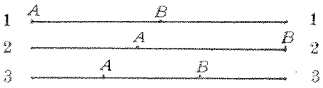


Fig. 5.

è la linea retta AB prolungata nelle due direzioni tanto quanto si vuole e che si può immaginare ancora sempre prolungata, o, come si suol dire, è *la linea retta infinita*. Una tal linea si può immaginare condotta fra una qualunque coppia di punti A e B, anche se non esiste alcuna riga abbastanza lunga da raggiungere B partendo da A. Per esempio esiste una e una sola retta congiungente un punto della luna con un punto del vostro occhio e prolungantesi dietro a voi tanto quanto vi piace e così dall'altro lato oltre la luna. Sebbene nessuna riga possa andare da A a B e nessuna matita possa disegnare tale retta, c'è qualcosa che prende il posto della matita e disegna la retta senza soccorso della riga: questo qualcosa è la luce lunare.

La luce si propaga in linea retta da qualunque punto, e voi potete scorgere la luce della luna solo se nulla è interposto in linea retta fra la luna e voi. Quando guardate la luna, la luce procede lungo il tratto congiungente ogni punto nella luna con un

punto del vostro occhio: questo tratto è luminoso e il resto della retta oscuro, ma esiste ugualmente. Se non ci siete a impedirle il cammino, la luce da quel punto della luna va oltre il luogo dove eravate, e, se non ci fosse alcun altro impedimento, tutta la linea, eccetto la parte al di là della luna, sarebbe luminosa, cioè sarebbe luminosa *una semiretta*, mentre l'altra semiretta rimarrebbe oscura. Una tale semiretta uscente da un punto qualunque e prolungata quanto si vuole sempre nello stesso verso è spesso chiamata *un raggio* proprio nel senso in cui si parla di un raggio di luce.

Una stella appare come un punto e tutti i raggi di luce che partono dalla stella sono semirette di luce passanti per il punto. Nello stesso modo se io prendo qualunque punto, se per esempio ne segno uno sul foglio di carta e lo chiamo A, esistono quante si vogliono semirette o raggi uscenti da A e si dice che formano *una stella*. Potete disegnare alcune di queste linee sul foglio colla matita e la riga (fig. 6) e alcune di esse giaceranno fuori del foglio, come la linea che congiunge A col vostro occhio.

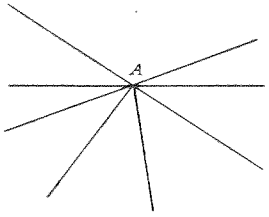


Fig. 6.

È evidente che *due rette non possono avere più di un punto comune*, dato che due punti determinano una sola retta passante per essi. Se due rette passano

entrambe per un punto A, si dice che A è il loro *punto d'intersezione*, cioè il punto in cui l'una taglia l'altra. Se disegnate due rette che si intersecano avrete un'imagine di punto migliore di qualunque macchietta possiate segnare. *Come la vera linea retta non ha larghezza, ma solo lunghezza, così il vero punto non ha nè larghezza nè lunghezza.*

ESERCIZIO.

Disegnare due coppie di rette che si tagliano e congiungere i loro punti d'intersezione. Fare la stessa cosa piegando.

Se tre punti A, B e C sono tali che C stia sulla linea retta AB, si dice che essi sono *in linea retta*. Vedrete che è spesso molto importante cercare se tre punti sono o no in linea retta. Segnando tre punti a caso si può essere abbastanza sicuri che non giacciono in linea retta. Si può verificare o piegando o mediante la riga.

ESERCIZIO.

Preso un soldo, disegnatevi intorno un cerchio. Segnati su di esso due punti opposti [1] A e B, congiungeteli, poi se-

[1] Colla parola opposti non si vuol dire altro se non tali che il tratto che li congiunge passi nella parte mediana della figura. Per esempio, se A è preso dalla parte della capigliatura del Re, si prenda B dalla parte del suo collo. Del resto queste indicazioni sono date solo per comodità di disegno; la proprietà di L, M, N di giacere in linea retta non dipende affatto dalla particolare posizione dei sei punti scelti sulla circonferenza.

gnate D ed E sul cerchio da parti opposte del segmento AB: prendete ora C in mezzo fra A ed E, sempre sul cerchio, ed F opposto, a mezzo fra D e B: disegnate il segmento DE che incontra AB in L, BC ed EF che si incontrano in M: CD e AF che si incontrano in N. Fate ora vedere, o colla riga o piegando, che L, M, N sono in linea retta (fig. 7).

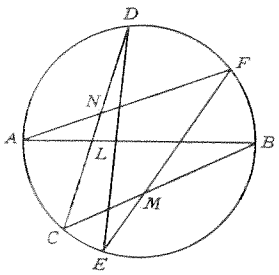


Fig. 7.

Quando tre punti A, B e C giacciono in linea retta, C può giacere nel segmento AB o sul prolungamento oltre A o sul prolungamento oltre B: nel primo caso si dice che C giace *fra* A e B (fig. 8 [1]), nel secondo caso A giace *fra* B e C (fig. 8 [2]), nel terzo B giace *fra* A e C (fig. 8 [3]).

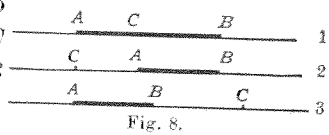


Fig. 8.

Una cordicella tesa, non attaccata altro che ai suoi estremi, giace lungo una retta.

Prendendo un pezzo di cordicella con qualcosa di pesante legato a uno de' suoi capi e appendendola per l'altro, essa verrà mantenuta tesa e rappresenterà perciò una linea retta: si chiama *una retta verticale*. In qualunque luogo sia appesa la cordicella, essa prende una e una sola posizione; perciò dà una e una sola verticale. *Per ogni punto passa una sola retta verticale.* Se prendete una pallina o qualunque

piccolo oggetto che si possa pensare come rappresentante abbastanza bene un punto, e lo lasciate andare, esso cade lungo la verticale finchè raggiunge il suolo.

Gli spigoli delle pareti di una casa dalla strada al tetto sono rette verticali, e tali sono pure gli spigoli di una stanza dal pavimento al soffitto; se non fosse così, la casa quasi certo cadrebbe, quantunque possa stare in piedi se lo scarto dalla verticale è piccolo, come sapete che sta in piedi la torre pendente di Pisa, sebbene non verticale.

Per prima cosa un muratore si accerta che mette i mattoni verticalmente l'uno sull'altro, e per ciò egli non si fida del suo occhio soltanto, ma si serve di uno spago con un pesetto attaccato, detto *filo a piombo*: egli lo appende così che il peso stia proprio vicino alla parete, senza appoggiarvisi: se così lo spago sta tutto lungo la parete sempre alla distanza che rappresenta lo spessore del peso, i mattoni sono sovrapposti verticalmente; se no devono venir cambiati di posto così che le pareti stiano certamente salde.

IL PIANO.

§ 3. **Costruzione di un piano.** — La superficie del foglio su cui abbiamo disegnato le nostre linee è detta *una superficie piana* o brevemente *un piano*:

o, più propriamente, è una parte o porzione di piano, così come la linea che avevate disegnato da principio era solo una parte di tutta l'infinita linea retta. Ogni porzione di piano può essere estesa non in una direzione sola, come un raggio, o in due come una retta intera, ma nella direzione di ogni porzione di retta giacente nella porzione di piano, poichè è *la proprietà caratteristica del piano che ogni retta avente due punti nel piano giace interamente nel piano.*

Potete estendere il vostro piano ingommando al primo foglio un secondo, e, se non badate alle ineguaglianze, avrete una porzione di piano più grande. Tenendo il foglio in mano, potete sospenderlo in varie posizioni, e vi darà porzioni di piani tutti diversi di cui ciascuno ha una determinata posizione nello spazio.

Una delle più grandi porzioni di piano a cui potete subito pensare è il pavimento della stanza: le pareti anch'esse sono porzioni di altri piani. I pavimenti e le pareti delle case degli altri sono costituiti di porzioni di piani diversi, ognuno dei quali ha la sua posizione fissa nello spazio intorno a voi. E ognuno di questi piani si può immaginare di continuarlo pensando prolungata in tutta la sua lunghezza ognuna delle sue rette.

Guardando un muratore costruire una parete dritta, vedrete, come già abbiamo notato, che egli in primo luogo pone i mattoni verticalmente l'uno sull'altro

mediante il filo a piombo: la superficie della parete contiene allora tutte le verticali passanti per i suoi punti: questo non basta per costruire la parete piana: sarebbe anche vero per le pareti di una torre rotonda, le cui pareti non sono piane. Vedrete che il muratore fissa per due punti un pezzo di spago nella direzione in cui vuol costruire la parete e dispone i mattoni lungo quello spago (fig. 9). Via via che la parete si eleva, egli sempre fissa lo spago alla sua sommità e bada che giaccia lungo la parete quando è teso; gli è che ha bisogno che i mattoni, addossati l'uno all'altro, diano una superficie piana da ambe le parti, e sa che una cordicella tesa giace lungo una retta. Se lo spago non giace lungo il muro, questo non è piano, quantunque contenga tutte le verticali come lo attestava il filo a piombo, ma se lo spago giace esattamente sulla parete, troverete che ogni altro spago teso fra due punti qualsiensi di essa vi giace pure, e così la superficie è piana. Un tal piano è detto *piano verticale.*

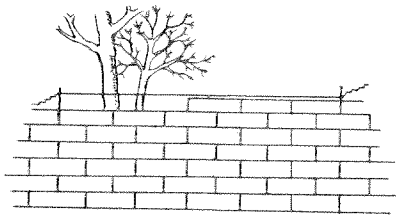


Fig. 9.

DEFINIZIONE. — *Dicesi piano verticale un piano contenente una retta verticale.*

Avrete osservato che non si dice nella definizione che un piano verticale contiene quante si vogliono rette verticali: questo non è necessario.

Troverete che un piano contenente una verticale contiene tutte le verticali che passano per ognuno de' suoi punti. In una definizione noi cerchiamo di non dir mai più del necessario.

Per una retta verticale passano quanti si vogliono piani verticali.

Segnato un punto A (fig. 6) sopra un foglio di carta, e condotte sul foglio per quel punto delle rette, prendete un altro foglio, e tenetelo verticalmente in modo che passi per A: la superficie piana del foglio contiene allora la verticale passante per A, e lo si può far girare in modo che esso passi successivamente per ciascuna delle rette che avevate disegnato. *Così ad ogni retta passante per A nel primo foglio corrisponde uno ed un solo piano verticale passante per A e contenente le rette* [1].

Se avete un bacino d'acqua tranquilla, e adagiate con cura il primo foglio, quello su cui avevate disegnato le rette, sul pelo dell'acqua, la sua superficie

[1] [*Nota per l'insegnante*]. — Nelle Matematiche superiori si dice perciò che il numero delle rette passanti per un punto è eguale al numero dei piani verticali passanti per un punto. Qui la parola « numero » è usata in un senso più ampio del solito: il numero di cui si tratta appartiene alla classe dei così detti numeri transfiniti. L'idea della corrispondenza — (1, 1) —, a cui è qui iniziato il principiante, è una corrispondenza di grande importanza.

sarà *un piano orizzontale* e le rette si dicono rette *orizzontali*. Determiniamo rette e piani verticali mediante il filo a piombo; per determinare le rette e i piani orizzontali adoperiamo acqua o qualche altro liquido. *La superficie dell'acqua tranquilla è un piano orizzontale.* La superficie della tavola dovrebbe essere un piano orizzontale, così che il vostro foglio quando è disteso sulla tavola dovrebbe avere una superficie orizzontale. Appoggiando sulla tavola un vaso d'acqua a fondo piano, potete vedere se l'acqua vi ha dappertutto la stessa profondità; se ciò non accade la tavola non è orizzontale: alzando una delle gambe o più d'una, la si può disporre perfettamente orizzontale.

Mettendo adagio adagio una goccia d'acqua sopra una tavola orizzontale, essa non deve scorrere; ma se la tavola non è perfettamente orizzontale, la goccia va giù dalla parte in cui la tavola è più bassa.

Il pavimento e il soffitto della stanza sono (o dovrebbero essere) piani orizzontali; le pareti sono (o dovrebbero essere) piani verticali.

È facile osservare che le cose che determinano piani orizzontali sono l'acqua e in generale i liquidi, mentre era stato detto che in geometria nulla ci importa della materia che costituisce i vari oggetti. Gli è che i concetti di verticale e orizzontale non sono punto necessari in geometria: è solo conveniente introdurli come ausiliari, e noi li useremo sempre,

allo stesso modo che spesso ci serviremo delle idee di destra e sinistra, anch'esse niente affatto necessarie in Geometria.

L'idea di destra e sinistra, che non è necessario vi spieghiate fin d'ora, è in relazione colla vostra persona; allo stesso modo i concetti di verticale e orizzontale si riferiscono alla terra su cui viviamo, e determinano posizioni relative alla terra, come la destra e la sinistra determinano posizioni relative al vostro corpo.

Vi sono certo note molte superficie non piane. Una palla ha una superficie non piana, così un vaso da fiori. Non è neppure possibile su una palla condurre una linea retta: se prendete su una palla due punti A e B, la retta che li congiunge penetra nell'interno della palla e non sta punto sopra la sua superficie. Se tagliate di netto la palla passando per A e B, essa si divide in due (fig. 10 *a*). Se la palla era vuota, una palla di gomma per esempio, ognuna delle parti mostra ora, oltre alla superficie così detta *convessa*, che si poteva vedere prima di tagliare, anche una superficie cava o *concava*, e queste due insieme erano parte della superficie della palla prima che fosse tagliata; una parte però non si poteva nè vedere nè toccare: un oggetto di tal forma è detto *involucro sferico*. Se la palla non avesse avuto

Fig. 10 *a*.

altra parte di superficie che quella — la parte convessa — che vi era possibile vedere e toccare, cioè se non fosse stata cava, per esempio una palla di sapone, le due parti ottenute col taglio verrebbero dette, se eguali, *emisferi*; ciascuno di questi ha una superficie piatta in cui, prima del taglio, giaceva la linea AB: tale superficie piatta è un piano. Quando i due emisferi sono congiunti, le superficie piatte stanno sul medesimo piano; e solo dopo il taglio e quando uno degli emisferi è stato tolto, può la sua superficie piatta prendere un'altra posizione, che può essere parte dello stesso piano di prima o di un piano differente. La superficie convessa di una palla ordinaria vien chiamata superficie *sferica*; ci sono però delle palle che non sono sfere, come per esempio una palla da *football* o un'arancia.

Sulla superficie di un vaso da fiori vi è possibile disegnare delle linee rette che vanno diritto dall'alto al basso e sono le sole giacenti sul vaso (fig. 10 *b*). Se si scelgono su di esso due punti non sopra una di tali rette, la loro retta congiungente passerà al di dentro.

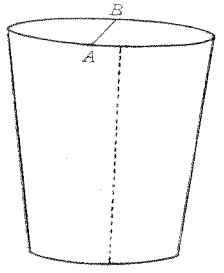


Fig. 10 *b*.

La superficie di qualunque oggetto è quella parte di esso tale che ogni suo punto ha punti di qualche altro oggetto giacenti vicinissimi a sè, tanto vicini quanto noi

vogliamo. Se pensate a un punto nell'interno di un'arancia, tutti i punti intorno ad esso sono punti dell'arancia; ma se prendete un punto sulla buccia gialla che sta fuori, ci sono punti tanto prossimi quanto vi piace che appartengono all'aria o al vostro dito se toccate la buccia in quel punto: la buccia gialla dell'arancia segna per voi la sua superficie. In realtà la buccia gialla ha un po' di spessore, come ne ha il vostro foglio di carta; ma la superficie non ha spessore affatto: è superficie solo la parte esterna della buccia gialla, ed ha per l'appunto la stessa posizione della superficie dell'aria a contatto tutto intorno colla superficie dell'arancia. Due corpi quali siensi che si adattino perfettamente l'uno all'altro come l'aria e l'arancia hanno la stessa superficie dove si congiungono. Analogamente la superficie di uno stagno è parte della superficie dell'aria (disopra) e parte della superficie della terra (disotto). Quando guardate un oggetto qualunque, un candeliere per esempio, vedete soltanto una parte della sua superficie, perchè vi è possibile vedere attraverso l'aria, ma non attraverso il candeliere.

Se guardate un qualcosa di vetro, non è così facile vederne la superficie, perchè il vetro è trasparente, ma potete benissimo *sentirla* al tatto. Si può vedere nell'interno del vetro, ma non nell'interno del candeliere, e non si può tastare l'interno nè dell'uno nè dell'altro; voi sapete però che l'interno c'è e che

se rompete l'oggetto di vetro o il candeliere vi sarà possibile vedere dei punti che prima erano all'interno.

Tutti gli oggetti che ci attorniano sono corpi solidi, cioè non hanno superficie soltanto, ma anche interno. Talvolta hanno superficie che non possiamo vedere per intero senza rompere l'oggetto, come accadeva per la palla di gomma: tali corpi vengono chiamati *corpi cavi;* può accadere che di un corpo cavo si possa vedere tutta la superficie, come ad esempio di una sfera cava piena di acqua colorata. Ma la parola cavo riguarda soltanto la forma della superficie. *Tutti i corpi, cavi o no, che vediamo intorno a noi sono corpi solidi.*

Un foglio di carta è un solido, la cui superficie è formata dalle due pagine su cui si disegna, che sono parti di piano, di due piani diversi quantunque vicinissimi, e dalle piccolissime superficie che costituiscono i margini del foglio. La forma di questo è quella di una lastra o di un mattone molto molto sottili. Un altro oggetto della stessa forma è un ordinario pezzo di sapone da cucina. *Tale forma è detta parallelepipedo rettangolare:* la superficie è composta di un certo numero di porzioni di piano congiunte insieme e chiamate *le facce* del parallelepipedo. Che cos'è questo margine (fig. 11)? *È una linea retta*, o meglio un tratto o segmento di retta. I suoi estremi sono detti *vertici* del parallelepipedo: porremo loro

le lettere A e B, come abbiamo già fatto altra volta, e chiameremo lo spigolo AB. Quali altri spigoli ci sono in alto del parallelepipedo? C'è quello che appartiene anche alla sua parte posteriore, di cui chiameremo gli estremi C e D, ed esso sarà lo spigolo CD; poi c'è lo spigolo in cui la faccia superiore incontra quella di sinistra: questo ha un estremo in A e l'altro in D, è lo spigolo AD. Lo spigolo in cui la faccia superiore incontra quella di destra è BC. Questi sono tutti gli spigoli della faccia superiore, i vertici sono A, B, C e D. In A la faccia superiore incontra l'anteriore e quella a mano sinistra, vale a dire nel vertice A si incontrano tre facce. La faccia in alto incontra una delle altre due, l'anteriore, lungo la retta AB, l'altra in AD, e queste due rette hanno, come sappiamo, un unico punto d'intersezione, cioè A. C'è un altro spigolo passante per A, ma questo non giace nel piano dei primi due, non sta sulla faccia superiore del parallelepipedo: è la retta in cui si incontrano le altre due facce passanti per A, l'anteriore e quella di sinistra: un suo estremo è A, diremo E l'altro. I tre spigoli EA, AB e AD s'incontrano tutti in A: sono raggi della stella dei raggi passanti per A, ogni coppia di essi giace in un piano a cui non appartiene il terzo.

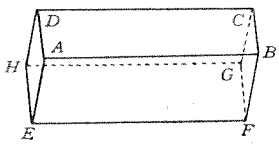


Fig. 11.

Se ora chiamiamo F, G e H gli altri vertici che stanno in basso del parallelepipedo vedete che di questo non si è omesso vertice alcuno. In tutto quanti vertici vi sono? Ve ne hanno otto: A, B, C, D, E, F, G, H, uno per ogni punta del parallelepipedo.

Dovete ora contare quanti sono gli spigoli. Quattro al fondo, quattro alla sommità e quattro dal basso all'alto, dodici in tutto: AB, BC, CD, DA, EF, FG, GH, HE, e AE, BF, CG, DH.

Aggiungendo al numero dei vertici il numero delle facce, quanto si ottiene?

$8 + 6 = 14$. E ora di quanto questo numero supera quello degli spigoli? di 2; $12 + 2 = 14$.

Vertici	8	Spigoli	12
Facce	6		2
	14		14

Un'altra volta dirò qualcosa di più su questo.

Quelle considerate non sono le sole rette che si possono condurre sulla superficie del parallelepipedo congiungendo due vertici: in alto possiamo congiungere A e C; la retta AC non e uno spigolo: analogamente non è uno spigolo BD, ma appartiene alla faccia superiore del parallelepipedo e congiunge due vertici. Vi hanno due di tali linee in ciascuna delle facce del parallelepipedo, e vengono dette *le diagonali delle facce*. Quante ce n'è? Due volte sei, dodici diagonali delle facce.

Vi hanno ancora altre rette congiungenti i vertici, oltre i 12 spigoli e le 12 diagonali delle facce. Tali rette non stanno punto sulla superficie del parallelepipedo, ma passano nell'interno e sono dette le diagonali di esso. Tre di esse sono AG, BH e DF. Posso mostrarvi la DF se, appoggiando un coltello

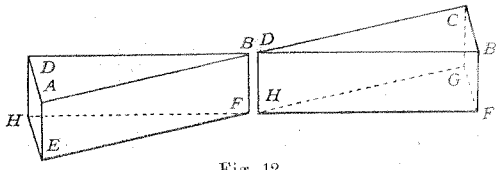


Fig. 12.

lungo la diagonale DB della faccia superiore, taglio dritto attraverso il parallelepipedo lungo gli spigoli BF e DH (fig. 12).

Vedrete ora che abbiamo ottenuto tutte le rette congiungenti due vertici: considerando il vertice A, contate quante ce ne sono passanti per esso: devono essere sette, perchè sette sono i rimanenti vertici: sono i seguenti:

AB spigolo;
AC diagonale della faccia superiore;
AD spigolo;
AE spigolo;
AF diagonale della faccia anteriore;
AG diagonale del parallelepipedo;
AH diagonale della faccia a sinistra.

Nello stesso modo si possono cercare le rette passanti per ognuno degli altri vertici, e vedere che cos'è ciascuna di esse.

Ci sono due cose importanti da notare: — due facce che s'incontrano hanno in comune una retta, tre facce che s'incontrano hanno comune un punto.

Potete essere del tutto certi di questi due fatti, perchè essi sono veri di *qualunque* coppia o terna di piani.

Due piani che si incontrano hanno comune una retta, chiamata la loro retta d'intersezione o d'incontro.

Tre piani i quali s'incontrano a due a due hanno in comune un unico punto, detto il loro punto d'intersezione.

Abbiamo nominato i vertici ognuno con una lettera e gli spigoli con due; come chiameremo le facce? Le possiamo nominare ognuna con quattro lettere, una per ognuno de' suoi quattro vertici, ma non ne abbiamo bisogno di tante. Tre lettere bastano: ABC è il piano passante per i punti A, B, C, ed è la faccia superiore e passa per D: noi possiamo quindi nominare tale faccia in diversi modi: ABC o ABD o BCD: ognuno di questi gruppi di tre punti determina il piano passante per essi come il piano della faccia superiore e non come un piano diverso.

Questo non è vero solamente delle facce del nostro parallelepipedo, ma di punti e di piani quali siensi.

Data una retta AB e un punto C non posto su di essa, *esiste uno ed un solo piano che contenga la retta e il punto*, cioè il piano ABC. Potete, se vi piace, immaginare che un foglio di carta (o qualunque altra porzione di piano) venga appoggiato col suo margine lungo AB e ruoti intorno a tale retta fino a venir a passare per C.

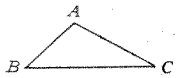


Fig. 13.

Il piano conterrà allora ogni retta che congiunga C con un punto qualsiasi di AB, in particolare conterrà le rette AB, BC, CA. Questo ci assicura che non c'è alcun altro piano per la retta AB e il punto C, perchè se ci fosse, esso avrebbe in comune col nostro piano più di una linea retta.

Analogamente *passa un solo piano per tre punti A, B, C; e passa un solo piano per due rette che si tagliano AB e AC.*

§ 4. **Cilindro e cono.** — Rammenterete che abbiamo detto che non soltanto sopra una superficie composta di porzioni di piano si poteva disegnare una linea retta; dicevamo che si poteva disegnare una linea retta su un vaso da fiori.

Pensate al tubo di vetro di una lampada [1], ha esso pure una superficie su cui è possibile condurre

[1] Veramente le forme dei tubi da lampada sono molto variabili. La costruzione accurata di un cilindro è indicata più innanzi.

una retta: una tale superficie è detta *cilindrica*, e *conica* quella del vaso da fiori: o meglio la prima è una porzione di superficie cilindrica e l'altra una

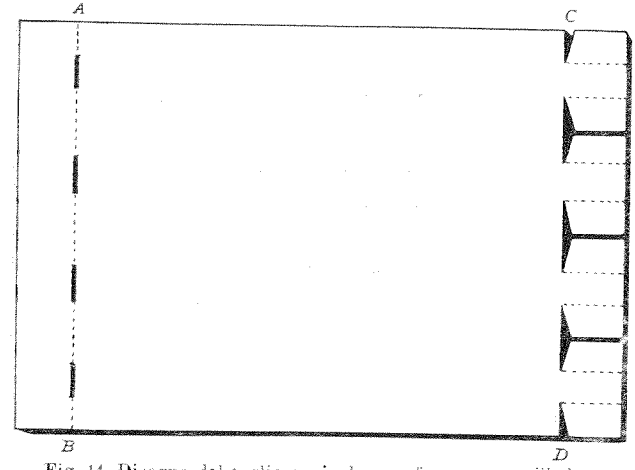


Fig. 14. Disegno del taglio e pieghe per formare un cilindro.

porzione di superficie conica, poichè queste superficie sono, come il piano, infinite.

Costruzione di una superficie cilindrica. — Prendete un pezzo di carta, guardando che abbia un margine rettilineo. Se non l'ha, piegate il foglio lungo una retta BD: poi fate combaciare una piccola parte della piega col rimanente in modo che si adatti per bene e premete forte: la nuova piega vi darà una retta, AB nella figura 14. Allo stesso modo piegate

lungo CD dall'altra parte del foglio. Dobbiamo ora congiungere AB con CD: per questo tagliate la carta come nella figura 14, con delle aperture lungo AB e delle linguette sporgenti da CD sotto cui possa ripiegarsi la parte d'orlo superflua. Abbiate cura che le piccole fenditure di AB e le traverse partenti da CD si corrispondano: piegate ora i lembi lungo le linee punteggiate e introducete le linguette nelle aperture appiattendo le parti piegate. Vedrete che vi è venuta una superficie cilindrica ben salda, simile alla fig. 15, nel cui interno si possono vedere le parti che erano state piegate aderenti al rimanente.

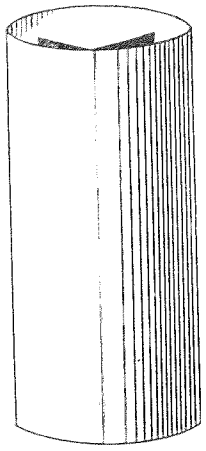


Fig. 15.

È possibile disegnare sulla superficie cilindrica una retta per ogni punto, ma non più di una, dall'alto al basso.

Vi ha dunque differenza dal piano sul quale, come abbiamo visto, potevamo segnare per un punto un numero qualsiasi di rette.

Costruzione di una superficie conica. — La si può costruire nello stesso modo di prima; è solo un

po' più difficile d'introdurre le linguette vicino al termine appuntito V della superficie.

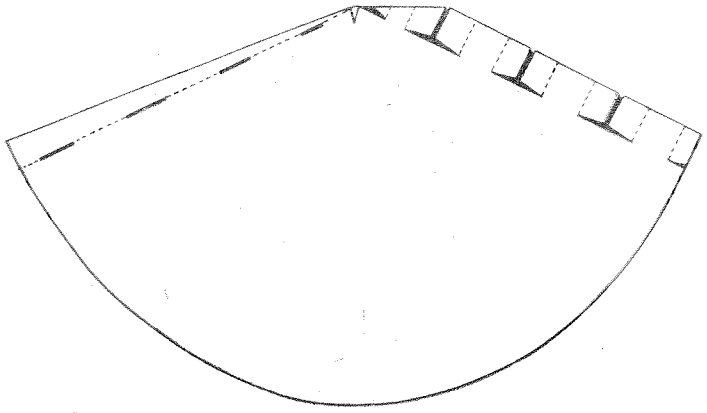


Fig. 16. Disegno dei tagli e delle pieghe per formare un cono.

Il disegno piano è dato nella fig. 16 e il modello costruito alla fig. 17 *a*. Per ogni punto, che non sia V, della superficie conica si può condurre una e una sola retta, la quale passa per il vertice della superficie: c'è quindi un solo punto di essa, il vertice, dal quale si può condurre sulla superficie un numero qualunque di rette. Vi è differenza dal piano e dalla superficie cilindrica.

La superficie del vaso da fiori è parte d'una superficie conica; il vertice è stato tagliato, e l'oggetto poggia sopra una base piana. Immaginando prolungate le rette sul vaso da fiori, s'incontrerebbero nel

vertice della superficie conica, in un punto posto sotto il fondo del vaso. Analogamente, data una qualunque porzione di superficie conica o cilindrica non avete che da immaginare prolungate le rette su di essa per ottenere una porzione più grande. Si

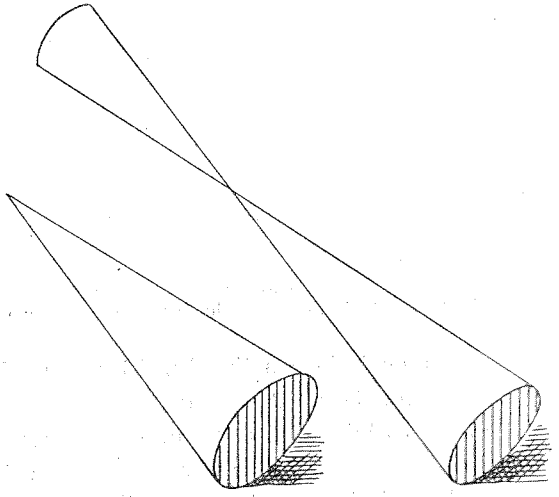


Fig. 17 *a*. Fig. 17 *b*.

vede, prolungando le rette della superficie conica oltre il vertice, che essa consiste di due parti eguali a quella che noi abbiamo costruita, congiunte per il vertice soltanto e dilatantisi alle due estremità in un'apertura che diviene sempre più larga via via che ci si allontana dal vertice (fig. 17 *b*).

§ 5. **Divisione del piano mediante una retta.** — Disegnate sul vostro foglio di carta una retta prolungata nei due sensi finchè c'è posto: chiamate A e B i punti in cui la retta incontra i margini del foglio. Se ora tagliaste il foglio lungo AB, esso resterebbe diviso in due parti distinte. Diciamo perciò che *la retta AB stessa divide il piano in due parti*, e parliamo dei punti giacenti *dalla stessa banda di AB*, come P e Q nella fig. 18: entrambi giacciono in una delle parti, ma non proprio sulla AB: un punto R nell'altra parte si dice che giace dall'altra o dall'opposta banda di AB. Congiungendo P con Q, il segmento PQ non taglia AB; ma, se congiungiamo P con R, il segmento PR taglierà certamente AB. È vero che la retta PQ taglia la AB, però il punto d'intersezione non giace fra P e Q. Se imaginiamo la retta AB prolungata nei due sensi e il piano esteso tanto quanto vogliamo, sarà ancora vero che il piano è diviso in due regioni dalla retta. Noi saremo quindi autorizzati a parlare della retta come avente due bande, e ciò riguardando come infiniti così il piano come la retta: *due punti quali siensi da*

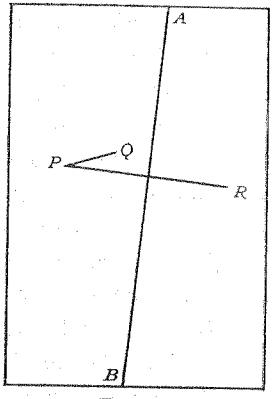


Fig. 18.

una banda della retta sono congiunti da un segmento che non taglia la retta, e il segmento congiungente due punti ad arbitrio dalle due bande della retta incontra sempre la retta. Si potrebbe pensare che accada lo stesso per ogni superficie su cui si può disegnare una retta; ma non è così. Non c'è che da pensare alla superficie cilindrica o alla superficie conica.

Una retta AB su tali superficie non le divide in due regioni. Se vogliamo dividere la superficie cilindrica in due regioni, dobbiamo tagliare prima lungo una retta e poi lungo un'altra: il primo taglio da solo non divide in due parti la superficie. Se prendiamo su di essa due punti P e Q, non possiamo congiungerli mediante una retta se essi non giacciono su una retta della superficie; ma li possiamo congiungere mediante una linea curva giacente sulla superficie, e la possiamo segnare senza tagliare AB. Questo si può vedere facilmente: quando la superficie cilindrica venga tagliata lungo AB, essa può essere sviluppata sopra un piano, e, se allora si disegna la retta PQ, e si torna ad arrotolare la superficie riunendo i due margini tagliati, la retta PQ diverrà sulla superficie cilindrica una curva che congiunge P e Q e non incontra AB.

Lo stesso avviene per una superficie conica.

ANGOLI.

§ 6. **Definizione.** — Se si conducono comunque due semirette (§ 2) AB e AC da un punto A, si dice che esse formano un *angolo* (fig. 19). Il punto A si chiama *vertice dell'angolo*, AB e AC sono detti *lati dell' angolo*. Chiamiamo questo l'angolo BAC, mettendo in mezzo il nome del vertice e dalle due parti il nome di un punto sopra un lato. Se P è un altro punto della semiretta AB, e Q della semiretta AC, PAQ è un altro nome dell'angolo BAC.

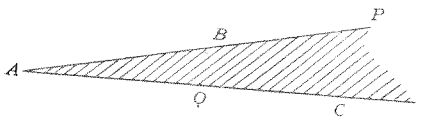


Fig. 19.

Si dice che la semiretta AB forma l'angolo BAC colla semiretta AC nel punto A.

Un angolo, analogamente alla superficie di un oggetto solido, ha una parte interna e una esterna. Se tagliamo il piano lungo i lati dell'angolo, il piano viene diviso in due parti, come avviene quando tagliavamo lungo una retta intera. Tuttavia queste due parti non pare che siano, come nel caso della retta, perfettamente eguali, una di esse è certo più piccola dell'altra. Nella figura 19 questa parte è tratteggiata. Questa parte, esclusi i lati dell'angolo, dei quali si dice che lo *limitano*, chiameremo *l'interno dell'angolo*, e l'altra parte, esclusi ancora i lati del-

l'angolo, *l'esterno dell'angolo*. Due punti nell'interno possono sempre venir congiunti con un segmento senza incontrare i lati dell'angolo, e due punti all'esterno si possono riunire mediante due segmenti aventi un estremo comune, pure senza incontrare i lati, ma ciò non è per due punti uno all'interno dell'angolo e l'altro all'esterno.

Quando parliamo di un angolo noi ce lo figuriamo generalmente col suo interno soltanto, come pensiamo alla superficie di un solido col suo interno, ad esempio per una palla. Se piegate la carta lungo AB ed AC e tagliate o strappate via la carta superflua, lasciando solo due piccoli orli, come nella fig. 20, otterrete un buonissimo *modello d'angolo* il quale presenta soltanto, come dicevo più su, l'interno dell'angolo [1]. Potete, beninteso, costruire vari modelli dello stesso angolo, cambiando la lunghezza dei lati che lasciate al modello; tale lunghezza non ha, per ciò che riguarda l'angolo, importanza alcuna, ma in pratica è utile di non fare i lati troppo corti, così da poter veder bene l'inclinazione delle due rette l'una sull'altra.

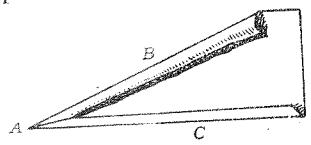


Fig. 20. Modello d'angolo.

Ogni volta che voi guardate un segmento AB, questo determina un angolo col vertice nel vostro

[1] Si può anche costruire un modello d'angolo ritagliandolo in un foglio di carta o cartoncino, ma non è tanto facile eseguirlo bene.

occhio detto l'*angolo sotteso*, rispetto al vostro occhio, da AB; giacchè i raggi congiungenti il vostro occhio con AB (o più propriamente un punto del vostro occhio con AB) giacciono in un piano ed occupano l'interno di un certo angolo, l'angolo fatto dai raggi che vanno ad A e a B: è questo l'angolo sotteso al vostro occhio da AB.

EGUALE, MAGGIORE, MINORE.

§ 7. **Rette eguali (segmenti eguali).** — Disegnate una retta o segmento PQ, e, tenendo ben ferma la riga di carta, segnate su di essa due piccoli tratti per P e Q. Rimossa poi la riga, chiamate le intersezioni dei tratti coi suoi margini colle lettere A e B. *Quando la riga è disposta in modo che A coincida con P e B con Q, si dice che la retta AB è sovrapposta alla retta PQ.*

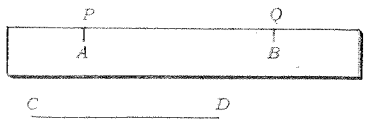


Fig. 21.

Due segmenti quali siensi PQ e AB che possono venir sovrapposti si dicono della stessa lunghezza o eguali, e noi indichiamo ciò brevemente scrivendo

$$AP = PQ.$$

Si dice questo *il principio di sovrapposizione.*

Potete notare che le rette AB e PQ si dicono sovrapposte perchè sono disegnate su due pezzi di carta

diversi e, per quanto forte noi premiamo i due fogli l'uno contro l'altro, ci sarà sempre ancora un po' di spazio fra le due linee. Ma noi possiamo immaginare di aver le due rette senza alcun foglio a darci noia, e allora possiamo porre il punto A non *su* P, ma *in* P, e B non *su* Q, ma *in* Q; allora la retta AB non sarà *sovrapposta* alla PQ ma *coincidente* con essa.

Vedete ora che, come due rette aventi più di un punto in comune coincidono, così *due rette aventi più di un punto dell'una sovrapposto ad un punto dell'altra sono per intero sovrapposte.*

Ora appoggiate la riga in qualche parte e fate scorrere la matita lungo il margine da A a B: otteniamo un'altra retta (un segmento), di cui chiameremo gli estremi C e D. Sarà

$$AB = CD$$

poichè AB era sovrapposto a CD.

Se separate la parte del foglio contenente CD da quella su cui è disegnato PQ, e piegate la prima lungo CD, vedrete che è possibile sovrapporre CD a PQ; perciò

$$CD = PQ.$$

Avete dunque trovato con effettive sovrapposizioni che i due segmenti, eguali entrambi al segmento AB, sono eguali l'uno all'altro.

Questo ci dà un altro assioma:

Cose eguali a una medesima sono eguali fra di loro.

Questo assioma è necessario, perchè non possiamo sempre rimuovere un segmento e sovrapporlo ad un altro col quale abbiamo bisogno di confrontarlo. Così pure sono necessari gli assiomi seguenti, della cui verità ci possiamo facilmente persuadere per i casi in cui i segmenti dei quali si tratta possono essere convenientemente spostati o misurati tutti con la stessa riga.

Se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i risultati sono eguali.

Così se

$$AB = PQ$$

e

$$BC = QR,$$

in conseguenza

$$AC = PR.$$

Se parti eguali sono sottratte da cose eguali, le rimanenze sono eguali.

Quindi se

$$BC = QR,$$

e B giace fra A e C, P fra Q ed R, dove

$$AC = PR,$$

allora

$$AB = PQ.$$

Questi assiomi non valgono soltanto per segmenti eguali, ma per cose eguali di qualunque specie, in qualunque modo ne sia determinata l'eguaglianza.

Il modo in cui noi abbiamo disegnato il segmento CD eguale al segmento PQ è uno dei migliori in

pratica. Vedete che mediante la riga di carta *è possibile disegnare un segmento per qualunque punto C e in qualunque direzione da C e di una lunghezza data AB.*

Se, in luogo di dare una direzione, cioè una semiretta uscente da C, si fosse data una retta intera passante per C, e si volesse su di essa tagliare una lunghezza uguale ad AB, con un estremo in C, vedreste che ci sarebbero due di tali parti, una in ciascuna direzione.

La linea AB della fig. 22 *a* o qualunque segmento eguale ad essa si dice lunga un *centimetro:* il centimetro modello o *campione* è conservato nell'Ufficio internazionale dei pesi e misure, e su di esso si fabbricano le copie che vengono vendute dappertutto. Si è soliti dare la lunghezza di un segmento dicendo che esso contiene un certo numero di centimetri, se non è molto lungo; altrimenti diciamo che contiene tanti metri: un metro vale cento centimetri.

Se prolunghiamo il segmento CD in E e facciamo DE eguale a PQ, il tratto CE sarà lungo due volte PQ. Così possiamo colla riga di carta disegnare un segmento lungo due volte un segmento dato. Analogamente è possibile avere un segmento lungo tre o quante vogliamo volte un dato segmento.

Maggiori e minori. — Disegnate ora due segmenti quali siensi AB e CD. Da C, nella direzione CD, costruite CE eguale ad AB. Accadrà, o che E coincide

con D o che E giace fra C e D oppure che D giace fra C ed E.

Se E coincide con D, sappiamo che AB e CD sono eguali; se E sta fra C e D, sappiamo che AB è eguale a una parte CE di CD (fig. 22*a*); diciamo allora che AB è minore di CD; se poi D sta fra C ed E, AB non è eguale a CD o ad una sua parte, e diciamo che AB è più grande di CD (fig. 22*b*): in questo caso si potrebbe sovrapporre la retta CE alla AB, e D verrebbe allora a sovrapporsi a un punto F di AB, così che CD sia eguale a una parte di AB e quindi minore di AB.

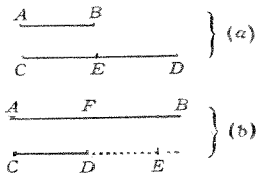


Fig. 22.

Dunque *o AB è eguale a CD, o AB è minore di CD, o AB è maggiore di CD. Se AB è maggiore di CD, sarà CD minore di AB.*

Tutto questo vi parrà assai semplice, ma è della massima importanza, perchè si ha l'abitudine di servirsi delle parole *maggiore* o *minore* senza rendersi esatto conto del loro significato, e troverete, andando avanti nella Geometria, che le vostre idee di maggioranza o minoranza non erano sempre esatte. È uno dei grandi servizi che la Geometria rende, quello di mostrare con esattezza che cosa si intende con certe parole familiari, e perchè lo si intende.

Si è usato il principio di sovrapposizione per determinare quale di due segmenti disegnati sia mag-

giore dell'altro: Diciamo in generale che una parte di una cosa qualunque è minore del tutto di cui essa fa parte. Dico — in generale, — perchè non si può più dir questo quando abbiamo a che fare con cose infinite. Sapete già che cosa intendiamo per *infinito:* la retta è infinita, il piano è infinito; tali sono pure la superficie cilindrica e la superficie conica. Una cosa è infinita se non la possiamo costrurre come un tutto ed è tale che, per quanto ne abbiamo ottenuta una parte grande, possiamo ancora sempre ottenerne una più grande.

Non diciamo che un raggio è lungo la metà di una retta: quando io adopero per il raggio l'espressione semiretta non voglio punto intendere questo: voglio intendere soltanto che due raggi costituiscono una retta intera. Non vogliamo ora metterci a trattare della lunghezza di rette intere o dell'estensione di qualunque cosa infinita. Questo appartiene ad un'altra parte della Matematica, che è anche importantissima.

Noi ci occupiamo soltanto della lunghezza di linee finite, cioè di segmenti; e *ogni qual volta io parlerò della lunghezza della retta AB intenderò la lunghezza del tratto AB;* non parleremo dell'estensione altro che di cose finite, cose che possiate costruire nel loro insieme e non in parte soltanto. Di tale cose finite io dico, ed è un altro assioma: *Il tutto è più grande di una sua parte.*

CIRCOLO.

§ 8. **Costruzione della circonferenza.** — Prendete una riga di carta e praticatevi con uno spillo due fori, uno molto più largo dell'altro. Guardate ora che la vostra matita abbia una bella punta fine: fissate collo spillo la riga al foglio da disegnare attraverso il piccolo foro e segnate un punto facendo passare la matita per l'altro (fig. 23). Avete ottenuto sul foglio due punti uno C segnato con un foro, un altro A segnato con una macchiolina (fig. 24) e il segmento che li congiunge è eguale al segmento congiungente i due fori della riga.

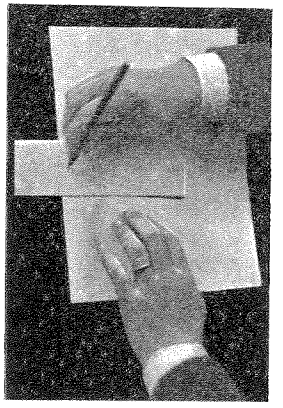


Fig. 23.
Come si disegna una circonferenza.

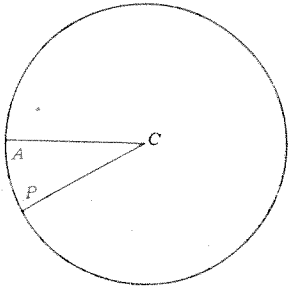


Fig. 24.

Se girate un pochino la riga tenendo fermo lo spillo, e fate un altro segno, otterrete un altro punto come il primo, *P*, e il segmento che lo congiunge col forellino *C* del foglio è eguale a quello congiungente *A* collo stesso forellino. Possiamo costruire in questo modo tanti punti quanti ne desiderate, ma ne esistono ancora sempre degli altri. Possiamo in qualche modo ottenere tutti i punti nelle stesse condizioni, tutti i punti le cui distanze dal foro sono eguali a quella del primo punto? Se possiamo farlo, diciamo l'insieme di tali punti il loro *luogo*. Si possono ottenere tali punti con la più grande facilità tenendo fermo lo spillo e facendo sporgere la punta della matita dall'altro foro per tutto il tempo in cui fate rotare la riga fino a farla tornare alla posizione di partenza.

Guardate ciò che avete disegnato: avete disegnato una circonferenza (fig. 24), ogni punto di questa ha la stessa distanza dal foro *C* che il primo punto *A* e vedete che nessun altro punto fuori di essa è a quella distanza dal foro. *La circonferenza è detta il luogo di un punto mobile la cui distanza dal foro è sempre la stessa. Il foro è detto centro della circonferenza.* Questa è la *definizione* della circonferenza e del suo centro. Un'altra maniera di disegnare la stessa circonferenza è di tenere la punta della matita ferma nel suo foro e farle girare la carta al disotto. Facendo così, la punta della matita si sovrappone

successivamente a ciascun punto della circonferenza. Questo si chiama *far rotare la carta*, cioè farla girare al modo di una ruota: e, mentre noi operiamo, la circonferenza si muove proprio come una ruota, ogni suo punto giacendo sempre dove ne giaceva un altro prima: si dice che *la circonferenza ruota su se stessa rimanendo fisso il suo centro.*

DEFINIZIONE. — *Ogni segmento congiungente il centro con un punto della circonferenza viene chiamato un suo raggio. Tutti i raggi di una circonferenza sono eguali.*

ESERCIZIO.

Disegnare una circonferenza avente per centro un punto arbitrario *C* e per raggio un segmento dato *PQ*.

DEFINIZIONE. — *Una retta condotta per il centro di una circonferenza e terminata su di essa si dice diametro della circonferenza*, cioè una misura trasversale di essa, dal greco *dia*, a traverso, e *metron* misura: il diametro *misura* la larghezza della circonferenza nella sua parte più larga. Quanto è lungo un diametro della circonferenza? Due volte il raggio. Quindi: *Tutti i diametri di una circonferenza sono eguali.*

Se piegate il foglio lungo un diametro di una circonferenza, le due parti di questa si sovrappongono l'una all'altra: perchè? È che in tal caso il centro sta sulla piega e ogni punto deve ripiegarsi sopra un altro che abbia la stessa distanza dal centro: così

ogni punto della circonferenza poggia su un altro punto della circonferenza stessa. La circonferenza viene quindi separata in due parti che, potendosi sovrapporre, si dicono eguali, ciascuna è la metà della circonferenza; e così chiameremo ognuna delle parti una semicirconferenza.

ESERCIZIO.

Far vedere che ogni circonferenza di centro C taglia in un punto ogni semiretta o raggio uscente da C.

Area del circolo. — Una circonferenza, come una retta o un angolo, divide il piano in due parti. Ma, diversamente da ciò che avviene per la retta e per l'angolo, per quanto grande noi prendiamo una porzione di piano contenente la circonferenza, una delle due parti rimane inalterata e soltanto l'altra diviene via via più estesa. La parte che non cambia è tratteggiata nella fig. 25: questa parte è racchiusa dalla circonferenza, e prende, considerata insieme colla circonferenza stessa, il nome di *circolo*. La circonferenza è il limite della parte interna che si chiama *area del circolo*: ogni punto di esso non appartenente al limite si dice che giace *entro* il circolo,

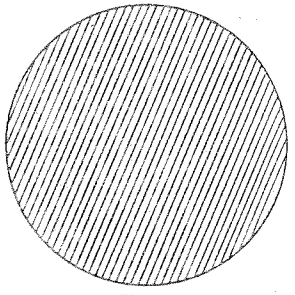


Fig. 25.

mentre ogni punto dell'altra regione, non sul limite, si dice che giace *fuori* del circolo.

Ogni punto entro il circolo giace su un raggio e ha perciò dal centro distanza minore del raggio stesso: similmente ogni punto fuori del circolo ha distanza dal centro maggiore del raggio.

Simmetria. — Si dice che il circolo è *simmetrico* rispetto a uno dei suoi diametri: e s'intende con ciò che il diametro si comporta come uno specchio, e riflette un semicircolo sull'altro. Se tagliate o piegate il foglio lungo il diametro e poi appoggiate il margine di una parte su uno specchio, vedrete in questo l'altro semicircolo, e i due semicircoli, il vero e la sua imagine riflessa, ridanno insieme il circolo.

Ogni oggetto suscettibile di esser diviso in due parti tali che siano come l'imagine riflessa l'una dell'altra, si dice simmetrico o avente simmetria. Guardate in giro per la stanza e ditemi se vedete delle cose in cui si abbia la simmetria. In una persona si ha simmetria: la parte destra e la sinistra del corpo sono come l'imagine riflessa l'una dell'altra. Un orologio, un'anfora, una bottiglia, un libro, molte cose che possono esservi in una stanza, sono simmetriche. Le cose fatte dall'uomo sono simmetriche quasi sempre, e tali o quasi sono generalmente le cose che crescono: così un abete, una margherita, un tulipano, un cane, un cavallo. Un ciottolo della strada è ben di rado

simmetrico, e se lo è noi pensiamo subito che esso è stato lavorato da qualcuno.

Oggetti come quelli che dicevamo si dicono *simmetrici rispetto al piano* che si può pensare come costituente la superficie dello specchio. Possiamo dire che il circolo è simmetrico rispetto a un piano che passa per un suo diametro; questo è vero: se noi facciamo che il piano del circolo sia orizzontale, il piano rispetto a cui il circolo è simmetrico sarà verticale. Siccome tuttavia, trattandosi di una figura che sta in un piano, come il circolo, non ci si occupa di solito di nulla all'infuori di quel piano, diciamo invece: *il circolo è simmetrico rispetto a un diametro*. Se una figura piana è simmetrica rispetto a una retta e noi pieghiamo il foglio lungo quella, la figura rimane ripiegata su se stessa.

Molte delle cose che noi abbiamo chiamate simmetriche sono tali rispetto a un solo piano: ditemi rispetto a qual piano è simmetrico l'orologio a pendolo. Il circolo è simmetrico rispetto a molte rette del suo piano, e certo voi potete nominarmi qualche solido simmetrico rispetto a più d'un piano. Una palla è simmetrica rispetto a ogni piano passante pel suo centro, giacchè essa ha un centro, proprio come un circolo. Un libro è simmetrico rispetto a due piani: ditemi quali sono. Un bicchiere è simmetrico relativamente a molti piani e così pure una bottiglia o un vaso da fiori. Ditemi quali sono quei piani.

La sfera. — Ritagliate un circolo, passategli una lunga gugliata di filo attraverso il centro e annodatene insieme i due capi. Tenendo il nodo, attorcigliate il filo quanto più potete. Tenetelo un momento finchè il circolo sia ben fermo e poi lasciate andare: il filo si tornerà a distendere. Che cosa fa il circolo? Gira torno torno, ruota intorno al filo, ruota intorno a uno dei suoi diametri, perchè la linea del filo prolungata a traverso il circolo da una parte all'altra è un diametro del circolo.

Mentre il circolo gira, vi sembra di vederne più d'uno, e quanto più presto avviene la rotazione, tanti più circoli vi sembra di vedere. È perchè l'imagine del circolo nel vostro occhio non scompare appena il circolo si è spostato, cosicchè, se il circolo si muove abbastanza presto, voi ne avete nell'occhio due o tre imagini contemporaneamente. Se potessimo svolgere il filo molto molto presto, avreste nell'occhio innumerevoli imagini: sapete dirmi che cosa vi parrebbe di vedere? Vi parrebbe di vedere una palla bianca, *una sfera*. La superficie di questa palla bianca, se ci fosse nell'aria veramente come vi sembra di vederla, conterrebbe in ogni istante la circonferenza rotante. Potete imaginare questa sfera tenendo sospeso il circolo, anche se esso non ruota così rapidamente che la possiate vedere.

Farete ora un modello che vi aiuti a vedere la sfera descritta dal circolo che ruota.

Piegate per bene un foglio di carta. Prendete la vostra riga, la matita e lo spillo, e disegnate due circoli col medesimo raggio. Poi in ognuno conducete due diametri incrociati, come nella fig. 26.

Ora con un paio di forbici tagliate i due doppi della carta lungo una metà d'uno dei diametri e

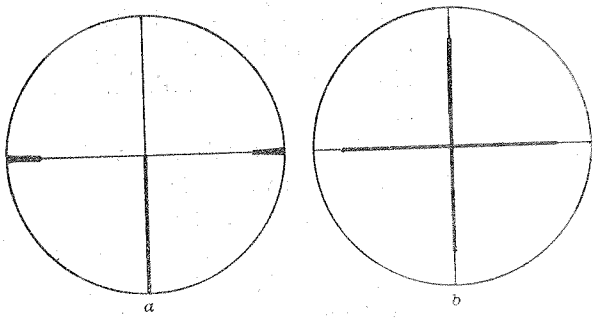


Fig. 26.

appena un pochettino ai due capi del diametro che incontra quello, come nella fig. 26 *a*; poi ritagliate lungo la circonferenza due doppi del foglio e introducete l'uno nell'altro, mediante il taglio del raggio, come nella fig. 27 *a*.

Tagliate in seguito lungo l'altra circonferenza una parte sola della carta: incidetene i due diametri dal centro fin quasi alla circonferenza come nella fig. 26 *b*, lasciando press'a poco tanto quanto era stato inciso ai margini degli altri due circoli. Nell'eseguire le incisioni

dei diametri è necessario portar via un briciolino di carta, dato lo spessore degli altri circoli che vi debbono essere introdotti. Introducete ora gli altri circoli, come nella fig. 27 *b*. Bisogna aver cura nel

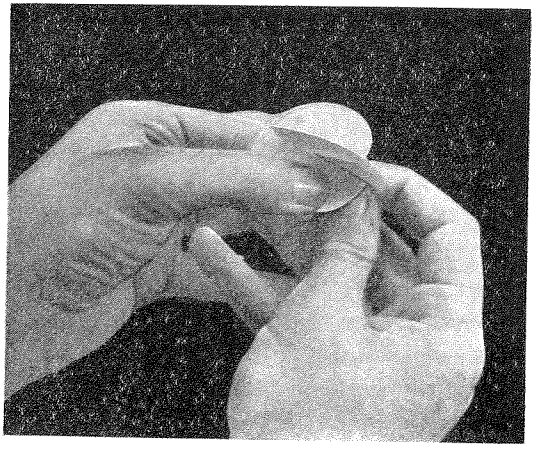


Fig. 27 *a*.

farlo di incurvare i loro margini adagino, senza piegarli in modo che non servano più. Avete ottenuto così un modello la cui imagine è data dalla fig. 27 *b*.

Rappresenta due posizioni del circolo rotante, il terzo circolo serve solo a tenerli a posto, ma anche la circonferenza di questo appartiene alla superficie della sfera.

Guardando il modello potete, mi sembra, imaginare la superficie senza bisogno di farlo rotare. Se passate attraverso uno dei raggi tagliati nel terzo circolo, un filo per appendere il modello e fate girare questo, non vi sarà difficile vedere la sfera descritta [1].

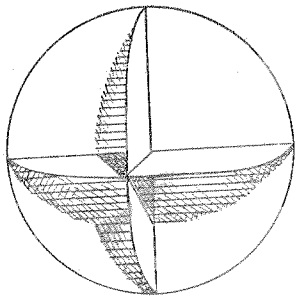


Fig. 27 *b*.

I tre pezzi di carta che avete riunito per costruire il modello della sfera, sono porzioni di tre piani. A due a due essi si tagliano: in che cosa? In una retta. E qual'è l'ufficio di tale retta nel nostro modello? Essa è il diametro dei due circoli che giacciono nei due piani.

I tre pezzi di carta si tagliano anche fra tutti e tre. Che cosa hanno in comune? Un punto, come sempre tre piani che s' incontrano a due a due. Questo punto è il centro di ognuno dei tre circoli, e si chiama *il centro della sfera*. Quando si fa rotare il modello, uno dei circoli ruota intorno al suo centro, mantenendosi sempre nel medesimo piano. Questo circolo viene detto *Equatore*. Il diametro degli altri due circoli, giacente in linea retta col filo, prende il

(1) In tal caso naturalmente questo circolo e uno dei primi due tengono luogo del circolo rotante.

nome di *asse di rotazione* o più brevemente di *asse*, e i suoi due estremi si chiamano *i poli*, il Polo Nord è al termine del filo, cioè verso l'alto, il secondo è il Polo Sud.

Vi è noto probabilmente perchè adoperiamo questi nomi. Essi vengono presi dalla nostra terra, la quale, non tenendo conto delle ineguaglianze, è una sfera, e ruota intorno a un asse passante per il Polo Sud e il Polo Nord della Terra, là dove fa tanto freddo e vi sono tanti ghiacci. L'equatore della Terra è nella parte dove fa sempre molto caldo.

L'Equatore divide la sfera in due parti simmetriche, che possono essere l'immagine l'una dell'altra, due mezze sfere o emisferi: *emi* è parola tolta dal greco e significa mezzo, mentre la parola *sfera*, pure dal greco, significa palla. In alto vi ha l'emisfero settentrionale, in basso il meridionale. Se questa sfera fosse la Terra, l'Italia starebbe in su, qui, nell'emisfero settentrionale, e la Somalia italiana sarebbe in giù, nell'emisfero meridionale.

I circoli i cui piani passano per l'asse si chiamano *Meridiani*. I due circoli posti verticalmente nel modello, sono meridiani, e, se il modello ruota, prendono successivamente girando la posizione di tutti quanti i meridiani.

Se questa fosse la Terra, l'Italia sarebbe, su questo meridiano, press'a poco a mezza strada fra l'Equatore e il Polo Nord, e, nella direzione opposta, lo stesso

meridiano passerebbe per l'Oceano Pacifico, nell'emisfero Sud.

Questi tre circoli vengono detti *circoli massimi della sfera*: ogni circolo condotto per il centro della sfera è un circolo massimo: tutti i circoli massimi hanno egual raggio, eguale alla distanza di ogni punto della superficie della sfera dal centro, eguale al *raggio della sfera*, giacchè noi torniamo ad usare questa parola per indicare ogni retta condotta dal centro e terminata sul luogo. La superficie della sfera è un luogo, allo stesso modo della circonferenza; la *superficie sferica è il luogo di un punto dello spazio che si mantiene a distanza costante da un punto fisso.*

Abbiamo detto che un circolo massimo divide la sfera in due emisferi: due circoli massimi, posti come i nostri due meridiani, in quante parti dividono la sfera? In quattro parti, dette *quadranti*. I nostri tre circoli massimi, non passanti tutti per il medesimo diametro, i due meridiani e l'equatore, dividono la sfera in otto parti chiamate *ottanti*. Un'altra volta vi darò una mela o un'arancia, che potrete tagliare secondo circoli massimi in emisferi e quadranti e ottanti. Un'arancia, che è molto prossimamente una sfera, ma, come la nostra Terra, un po' appiattita ai poli, è divisa, come sapete, dalla Natura secondo meridiani.

Una sfera di sapone, come ne vediamo qualche volta, non ha nessun diametro particolare che faccia

da asse: possiamo scegliere quello che vogliamo, e i circoli massimi passanti per l'asse saranno i meridiani. Quelle sfere, che siamo andati costruendo mediante la rotazione di una porzione circolare del piano, sono veramente, come la sfera di sapone, figure solide: hanno una superficie, la *superficie sferica*, descritta dalla circonferenza del circolo, un *interno*, descritto dall'interno del circolo rotante, e un *esterno*, che verrebbe descritto dalla parte di piano esterna al circolo se noi immaginassimo di farla rotare col resto. La superficie sferica non ha, come la piana, nessuno spessore, e, se prendiamo una palla cava, per quanto sottile ne possa essere la sostanza, noi avremo anche sempre una parte d'interno insieme colla superficie della sostanza stessa. Appunto come un foglio di carta è un buon modello di piano per il suo piccolo spessore, così il miglior modello della superficie sferica è, per molte ragioni, una *bolla di sapone.*

Vi sono anche sulla sfera circoli minori, che costruiremo più tardi.

Modello di sfera con equatore e quattro meridiani. — Potete ora costruire facilmente il modello di una sfera con equatore e un numero qualunque di meridiani: è solo necessaria una maggiore accuratezza. Indicherò brevemente la costruzione quando i meridiani siano quattro.

Tagliate i circoli meridiani a coppie, come prima, cominciando col piegare il foglio e incideteli tutti

lungo un raggio: tagliatene poi due più su fino a mezza via verso la circonferenza e gli altri due tagliateli dall'infuori fino a mezza via verso il centro, lungo la stessa retta in cui era tagliato il raggio. Questi quattro circoli possono ora saldarsi insieme come meridiani. Disegnate in posizione opportuna quattro diametri dell'equatore e un circolo più piccolo concentrico ad esso e portate via l'interno di questo circoletto: fate ancora, lungo i raggi segnati, delle piccole incisioni verso la circonferenza per fissarvi i meridiani, e tagliate pure in corrispondenza un pochettino questi dalla circonferenza verso l'interno. Il collocare a posto i meridiani richiede una certa cura, ma, data l'elasticità della carta, può essere fatto benissimo, purchè si siano prima dati per bene i tagli. La fig. 28 mostra questo modello finito. Se lo si appende e si fa rotare, esso fa vedere la sfera benissimo [1].

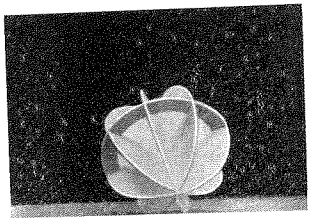


Fig. 28.

Circoli congruenti. — Se si costruiscono due circoli con raggi eguali e si disegna poi un terzo circolo col medesimo raggio su un altro foglio di carta, è possibile collocare il terzo circolo col suo centro su ciascuno dei due centri rimanenti, e allora il terzo circolo potrà essere sovrapposto ad ognuno dei due primi.

[1] I bambini molto piccoli possono costruire questo modello con un po' d'aiuto alla fine, esso piace loro di più di quell'altro con meno meridiani, ed è straordinariamente forte quando è fatto.

Allora, per il principio di sovrapposizione, i due circoli, come le loro circonferenze, si debbono dire eguali. Circoli come questi si dicono *congruenti*, vale a dire essi possono venir portati a coincidere esattamente l'uno coll'altro: «*congruenti*» *è più che* «*eguali*»: «eguale» indica che c'è qualche cosa che è la stessa, ma «*congruenti significa che tutto è eguale eccetto il posto particolare in cui le cose si trovano in un dato momento.* Vedremo presto esempi di cose eguali per certi rispetti e che non sono congruenti; mentre tutte le cose eguali che abbiamo trovato, segmenti eguali, angoli eguali, erano anche congruenti e appunto dal loro essere congruenti ne abbiamo riconosciuta l'eguaglianza. Un segmento aveva una qualità soltanto per cui si distingueva, oltre la positura, ed era la sua lunghezza, e perciò abbiamo adoperato la parola eguale invece di congruente per segmenti di retta; ma per un circolo vi hanno tre determinazioni: il raggio, l'area e la linea curva o *circonferenza*, e, quando i raggi sono eguali, gli altri due elementi lo sono pure; così che circoli congruenti sono eguali per tre rispetti: hanno egual raggio, egual area ed eguale circonferenza.

Circoli concentrici. — Due circoli col medesimo centro si dicono *concentrici* (fig. 29).

Potete vedere, osservandoli, che il circolo di raggio minore giace tutto dentro l'altro. Perchè? Perchè ogni punto della circonferenza il cui raggio è maggiore è ad una distanza dal centro comune più grande del raggio dell'altro circolo e così ogni punto di essa circonferenza è fuori del circolo di raggio minore. Similmente ogni punto di quest'ultimo è a distanza dal centro minore del raggio dell'altro e così sta nell'interno di esso.

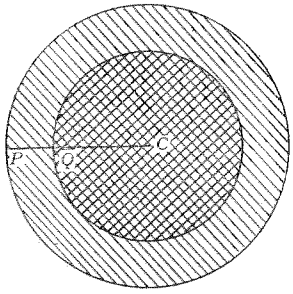


Fig. 29.

L'area del circolo di raggio minore è quindi parte dell'area di quello di raggio maggiore; cosicchè si può dire che *il circolo di minor raggio ha una minore area*. Ma la circonferenza del circolo di minor raggio non è parte di quella del circolo di raggio più grande, così che non possiamo dire che il circolo di raggio più piccolo abbia più piccola la circonferenza. Di questo non sappiamo ancor nulla.

Nella fig. 30 avete il disegno di un quadrato e al di dentro una linea spezzata che, proprio come la circonferenza, racchiude un'area compresa interamente nel quadrato. Ebbene troverete, prendendo la vostra riga di carta e segnandovi la lunghezza di ognuno

degli otto segmenti formanti la spezzata, che la loro somma è più grande della somma dei quattro lati del quadrato. Vedete dunque che non si può dire, perchè un'area giace per intero entro un'altra, che il circuito della prima è minore di quello della seconda. Perciò vi dicevo che non sappiamo nulla ancora riguardo alle circonferenze dei circoli concentrici.

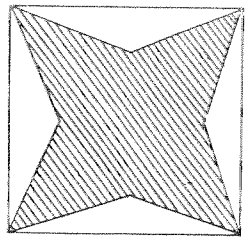


Fig. 30.

La quistione della lunghezza della circonferenza è una questione difficilissima e non potremo entrarvi finchè non avremo prima imparato un gran numero di altre cose; ma per le aree la cosa è semplice.

Ogni circolo, il cui raggio è minore di quello d'un altro, ha un'area minore di quella dell'altro circolo.

Poichè noi sappiamo costruire un circolo concentrico al secondo e congruente al primo, e questo terzo circolo avrà un'area minore di quella del secondo, ed eguale a quella del primo circolo, così il primo circolo ha l'area più piccola del secondo.

DIVISIONE D'UN SEGMENTO.

§ 9. **Bisezione del segmento.** — Abbiamo visto che il diametro d'un circolo è diviso in due parti eguali dal centro: diciamo che *il diametro è bisecato*

al centro. La parola bisecare, derivata dal latino, significa tagliare in due, ma noi vogliamo intendere con essa dividere in due parti *eguali* o in due metà.

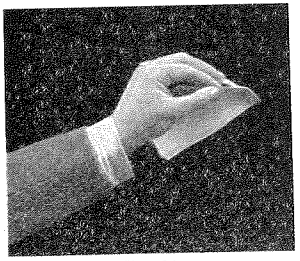


Fig. 31.

Colla riga di carta possiamo facilmente prolungare un segmento di una lunghezza eguale ad esso, ma come faremo a bisecare un segmento? Possiamo anche farlo mediante la riga.

Segniamo, come già avevamo fatto una volta, due punti A e B sul suo margine, e pieghiamo la riga così da sovrapporre B ad A e le due parti del margine l'una sull'altra (fig. 31). Si adattano bene le due parti e poi si fa una piega

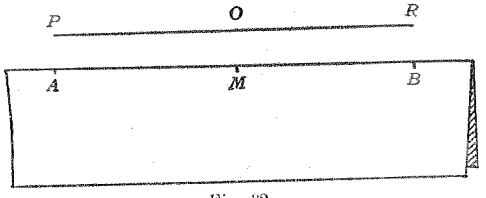


Fig. 32.

ben schiacciata. Questa è certo una linea retta e incontra il margine in un punto M. E $MA = MB$, dato che sono sovrapposti. Così che AB è bisecato in M (fig. 32).

Ponete ora A su P e B su R: sarà AB sovrapposto a PR, e ci sarà un punto di PR a cui sarà sovrapposto M: chiamiamolo O e segniamolo. Allora PR sarà dimezzato in O.

Pare che sia così, ma come possiamo assicurarcene?

È in virtù del nostro assioma: *Cose eguali ad una terza sono eguali fra di loro*, che noi siamo certi che è così, senza sovrapporre PO e OR. Infatti, poichè AM era sovrapposto a PO,

$$AM = PO,$$

e, perchè MB era sovrapposto a OR,

$$BM = OR.$$

Ma

$$AM = BM$$

poichè questi erano sovrapposti quando avevamo la riga piegata. Perciò, secondo l'assioma,

$$PO = OR$$

così che PR è bisecato in O.

Noi abbiamo dato qui di un fatto tutte le prove, senza nulla tralasciare; questo si chiama *dare una dimostrazione*. Talvolta, quando ci sembra che una cosa sia in un certo modo, è solo perchè non abbiamo disegnato o piegato bene, ed è perciò della massima necessità saper dare una dimostrazione. Il saper esporre le proprie ragioni, tutte quante, chiaramente e con ordine, è chiamato « Logica ». Potete imparare a pensare logicamente, cioè a sapere *perchè* ritenete

qualche cosa per vero, e a parlare logicamente, cioè a non esprimere alcuna idea senza darne le ragioni. La geometria vi aiuterà a imparare la logica.

Ora verificate piegando che PR è veramente bisecato in O.

Collo stesso procedimento possiamo, con bisezioni ripetute, dividere un segmento dato in 4, 8, 16,..... parti uguali.

Punti sovrapposti piegando. — Quando pieghiamo un foglio lungo una retta, che cosa sappiamo noi dei punti che si sovrappongono l'uno all'altro? Pungete, con uno spillo, dritto a traverso le due falde del foglio: ora spiegate e nominate uno dei fori con C, l'altro con D.

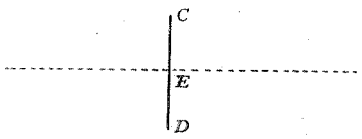


Fig. 33.

C e D sono una coppia di punti sovrapposti: che cosa sappiamo intorno ad essi? Congiunto C con D, chiamate E il punto d'intersezione della congiungente colla piega (fig. 33). Noi sappiamo allora che

$$CE = ED$$

perchè E era unico, appartenendo alla piega, e C era sovrapposto a D, per cui EC era sovrapposto a ED. In conseguenza *sappiamo, della coppia di punti sovrapposti C e D, che il segmento che li congiunge è ripiegato su se stesso e diviso per metà dalla piega.*

ESERCIZIO.

Sopra una retta segnate due punti B e C. Dimezzate BC mediante la riga nel punto M. Con centro in B e in C e con raggi eguali, ognuno eguale o quasi eguale a BC, descrivete due circoli. Vedrete che le circonferenze s'incontrano in due punti A e D. Verificate, prima colla riga e in seguito piegando, che A, M, B stanno sopra una linea retta.

EGUAGLIANZA D'ANGOLI.

§ 10. **Angoli eguali.** — *È possibile costruire un angolo eguale a un angolo dato* per mezzo di un modello di carta dell'angolo, allo stesso modo che abbiamo adoperato la riga di carta per disegnare segmenti uguali.

Preso un angolo qualsiasi ACB, costruitene un modello come era indicato nel § 6; posto questo modello sul foglio, fate scorrere la matita lungo i suoi orli così da disegnare un angolo PQR il quale, pel principio di sovrapposizione, è eguale d ACB, potendosi il modello di carta sovrapporre all'uno e all'altro ed essendo perciò uguale ad entrambi: sappiamo che *due cose eguali a una terza sono eguali fra loro.*

È meglio non far scorrere la matita fino proprio alla punta del modello, perchè in tal modo non è facile ottenere un buon vertice dell'angolo: è bene

andare fin presso la punta, e poi, tolto il modello, prolungare i lati dell'angolo colla riga, come nella fig. 34, dove le porzioni di lati prolungate dopo tolto il modello sono punteggiate.

Invece di disegnare l'angolo, potete piegare il foglio e disporre la piega lungo AC, piegando poi accuratamente anche lungo BC. Avete così piegato un angolo eguale ad ACB.

Multipli d'angoli. — Mediante il modello di carta di un angolo è facile piegare o disegnare un angolo doppio: non c'è che da costruire un angolo $P'RQ$ eguale all'angolo dato ACB, collo stesso vertice R e con uno stesso lato QR dell'angolo PRQ, facendo giacere P' dalla banda opposta a P (fig. 34). Nella stessa maniera può adoperarsi il modello per costruire un angolo triplo, quadruplo dell'angolo dato o che lo valga un numero qualunque di volte [1].

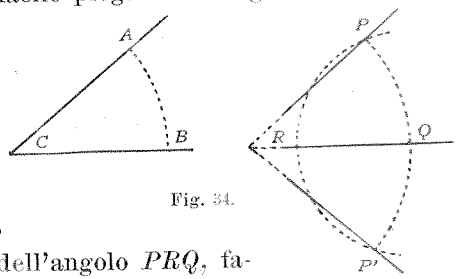


Fig. 34.

[1] (*Nota per l'insegnante*). — Si può spiegare in relazione a ciò che è detto a pag. 75 che l'angolo multiplo può essere concavo o anche maggiore di quattro angoli retti.

Angolo sotteso all'occhio. — È possibile ora costruire un modello dell'angolo sotteso al vostro occhio da un tratto AB. Prendete un foglio di carta con orli rettilinei e tenetelo con una punta Q presso l'occhio: allora, chiudendo l'altro occhio, portate uno degli orli QP in linea retta dal vostro occhio ad A in modo che l'orlo adiacente che non passa per Q vi appaia disposto lungo AB. Se AB non è troppo lungo, vi sarà un punto R di quest'ultimo orlo in cui sembra che giaccia B. Piegate lungo QR: e PQR sarà, più o meno esattamente, l'angolo sotteso al vostro occhio da AB.

I raggi che dal vostro occhio vanno ad A e a B si possono immaginare prolungati oltre A e B, e, se togliamo AB, potremo vedere un altro segmento più distante $A'B'$ che giaccia nella stessa direzione e sottenda al nostro occhio lo stesso angolo sotteso da AB: in tal caso $A'B'$ sarà maggiore di AB. *Quanto più $A'B'$ è lontano, tanto maggiore dev'essere per sottendere al vostro occhio lo stesso angolo PQR che sottendeva AB.*

Se fate aderire un soldo a un vetro della finestra e ve ne allontanate di un metro e mezzo circa, l'angolo che il diametro del soldo sottende al vostro occhio è press'a poco ciò che si chiama *un grado*.

Se state lontani il doppio, circa tre metri, troverete che il soldo appare press'a poco dello stesso formato del sole o della luna; così che, se la luna è visibile

qualche cosa per vero, e a parlare logicamente, cioè a non esprimere alcuna idea senza darne le ragioni. La geometria vi aiuterà a imparare la logica.

Ora verificate piegando che PR è veramente bisecato in O.

Collo stesso procedimento possiamo, con bisezioni ripetute, dividere un segmento dato in 4, 8, 16,..... parti uguali.

Punti sovrapposti piegando. — Quando pieghiamo un foglio lungo una retta, che cosa sappiamo noi dei punti che si sovrappongono l'uno all'altro? Pungete, con uno spillo, dritto a traverso le due falde del foglio: ora spiegate e nominate uno dei fori con C, l'altro con D.

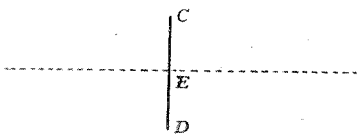


Fig. 33.

C e D sono una coppia di punti sovrapposti: che cosa sappiamo intorno ad essi? Congiunto C con D, chiamate E il punto d'intersezione della congiungente colla piega (fig. 33). Noi sappiamo allora che

$$CE = ED$$

perchè E era unico, appartenendo alla piega, e C era sovrapposto a D, per cui EC era sovrapposto a ED. In conseguenza *sappiamo, della coppia di punti sovrapposti C e D, che il segmento che li congiunge è ripiegato su se stesso e diviso per metà dalla piega.*

ESERCIZIO.

Sopra una retta segnate due punti B e C. Dimezzate BC mediante la riga nel punto M. Con centro in B e in C e con raggi eguali, ognuno eguale o quasi eguale a BC, descrivete due circoli. Vedrete che le circonferenze s'incontrano in due punti A e D. Verificate, prima colla riga e in seguito piegando, che A, M, B stanno sopra una linea retta.

EGUAGLIANZA D'ANGOLI.

§ 10. **Angoli eguali.** — *È possibile costruire un angolo eguale a un angolo dato* per mezzo di un modello di carta dell'angolo, allo stesso modo che abbiamo adoperato la riga di carta per disegnare segmenti uguali.

Preso un angolo qualsiasi ACB, costruitene un modello come era indicato nel § 6; posto questo modello sul foglio, fate scorrere la matita lungo i suoi orli così da disegnare un angolo PQR il quale, pel principio di sovrapposizione, è eguale d ACB, potendosi il modello di carta sovrapporre all'uno e all'altro ed essendo perciò uguale ad entrambi: sappiamo che *due cose eguali a una terza sono eguali fra loro.*

È meglio non far scorrere la matita fino proprio alla punta del modello, perchè in tal modo non è facile ottenere un buon vertice dell'angolo: è bene

andare fin presso la punta, e poi, tolto il modello, prolungare i lati dell'angolo colla riga, come nella fig. 34, dove le porzioni di lati prolungate dopo tolto il modello sono punteggiate.

Invece di disegnare l'angolo, potete piegare il foglio e disporre la piega lungo AC, piegando poi accuratamente anche lungo BC. Avete così piegato un angolo eguale ad ACB.

Multipli d'angoli. — Mediante il modello di carta di un angolo è facile piegare o disegnare un angolo doppio: non c'è che da costruire un angolo $P'RQ$ eguale all'angolo dato ACB, collo stesso vertice R e con uno stesso lato QR dell'angolo PRQ, facendo giacere P' dalla banda opposta a P (fig. 34). Nella stessa maniera può adoperarsi il modello per costruire un angolo triplo, quadruplo dell'angolo dato o che lo valga un numero qualunque di volte [1].

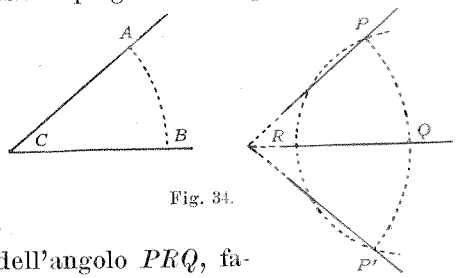


Fig. 34.

[1] [*Nota per l'insegnante*]. — Si può spiegare in relazione a ciò che è detto a pag. 75 che l'angolo multiplo può essere concavo o anche maggiore di quattro angoli retti.

Angolo sotteso all'occhio. — È possibile ora costruire un modello dell'angolo sotteso al vostro occhio da un tratto AB. Prendete un foglio di carta con orli rettilinei e tenetelo con una punta Q presso l'occhio: allora, chiudendo l'altro occhio, portate uno degli orli QP in linea retta dal vostro occhio ad A in modo che l'orlo adiacente che non passa per Q vi appaia disposto lungo AB. Se AB non è troppo lungo, vi sarà un punto R di quest'ultimo orlo in cui sembra che giaccia B. Piegate lungo QR: e PQR sarà, più o meno esattamente, l'angolo sotteso al vostro occhio da AB.

I raggi che dal vostro occhio vanno ad A e a B si possono immaginare prolungati oltre A e B, e, se togliamo AB, potremo vedere un altro segmento più distante $A'B'$ che giaccia nella stessa direzione e sottenda al nostro occhio lo stesso angolo sotteso da AB: in tal caso $A'B'$ sarà maggiore di AB. *Quanto più $A'B'$ è lontano, tanto maggiore dev'essere per sottendere al vostro occhio lo stesso angolo PQR che sottendeva AB.*

Se fate aderire un soldo a un vetro della finestra e ve ne allontanate di un metro e mezzo circa, l'angolo che il diametro del soldo sottende al vostro occhio è press'a poco ciò che si chiama *un grado*.

Se state lontani il doppio, circa tre metri, troverete che il soldo appare press'a poco dello stesso formato del sole o della luna; così che, se la luna è visibile

dalla finestra, e il soldo è nel posto giusto, tra la luna e il vostro occhio, sembra che il soldo si adatti perfettamente alla faccia della luna. Quale sia la grandezza del soldo voi sapete benissimo, ma per quella della luna non potete dir nulla perchè essa è troppo lontana; sapete soltanto che deve essere molto molto più grande del soldo: ora i diametri della luna e del soldo sottendono al vostro occhio il medesimo angolo quando voi siete a tre metri di distanza dal soldo: quest'angolo è chiamato perciò il *diametro angolare* della luna, ed è circa un mezzo grado: il diametro angolare del sole è press'a poco lo stesso.

Un grado è un campione perfettamente adatto per misurare gli angoli intorno a noi: è, come vedete, un angolo piccolo, e si è soliti, dando l'ampiezza di un angolo, dire quanti gradi esso contiene. Però esso non è un angolo conveniente da disegnare o piegare, è troppo piccolo; e così non è possibile costruire un angolo di ordinaria ampiezza, come ACB alla fig. 35, adoperando ripetutamente il modello di un angolo di un grado. L'angolo ACB della fig. 35 è circa trenta gradi, che si indicano colla scrittura 30°.

C'è una quantità d'angoli che si piegano o disegnano esattamente con tutta facilità, e che voi studierete più o meno col tempo: l'angolo di 30° è uno di quelli; il più facile a costruire è quello di 90°, o, come lo si chiama, l'*angolo retto*.

Costruzione d'un angolo eguale a un angolo dato. — Quando ci vien dato un angolo disegnato o piegato, e vogliamo costruirne uno eguale, la piegatura ci dà risultati migliori del disegno; ma c'è un altro modo di ottenere un angolo molto buono senza costruire un modello.

Si noti che il vertice R dell'angolo e uno qualunque de' suoi lati RQ possono essere fissati fin da principio: l'angolo può in seguito venir costruito da qualunque banda ci piaccia di RQ, secondo che appoggiamo o dall'una o dall'altra banda l'angolo modello: siano i due angoli dalle due bande PRQ e $P'RQ$ (figura 34). Se chiamiamo C' il vertice del modello, A' e B' i punti sovrapposti ad A e B quando il modello coincide coll'angolo dato, il segmento $A'B'$, sovrapponibile ad AB, è eguale ad AB. Se appoggiamo il modello su PRQ, sia P il punto che giace sotto A' e Q sotto B': allora, per la stessa ragione di prima, PQ è uguale ad $A'B'$ e quindi ad AB.

Allora, se si conduce una circonferenza di centro R e raggio CA e un'altra di centro Q e raggio BA, le due passeranno entrambe per P. Analogamente passeranno per P', e si vede che non hanno altri punti comuni. Questo ci fornisce un secondo metodo di costruzione dell'angolo. Si descriva una circonferenza, di centro C e raggio arbitrario, che tagli i lati dell'angolo dato in punti che diciamo A e B; indi collo stesso raggio e con centro nel punto R che abbiamo

fissato si conduca un'altra circonferenza, la quale incontrerà la retta che pure avevamo fissata come uno dei lati dell'angolo in un punto, che chiameremo Q. Infine, con raggio eguale ad AB e centro in Q, descriviamo un'altra circonferenza, che incontrerà la precedente in due punti, uno da ciascuna banda di RQ. Ognuno di questi punti P, o P' congiunto con R, dà l'angolo richiesto.

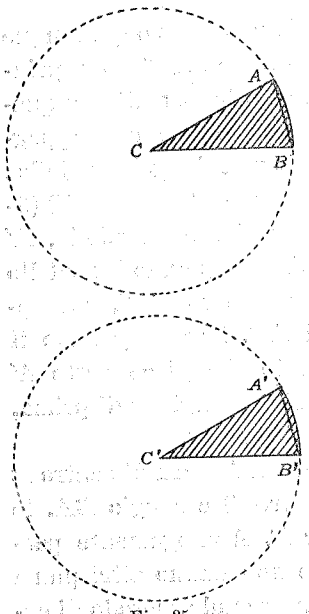


Fig. 35.

Angoli al centro di un circolo. — Descriviamo un circolo qualunque, e un angolo col vertice nel centro di esso, C: sappiamo che la circonferenza taglierà i lati dell'angolo ciascuno in un solo punto: diciamo i due punti A e B (fig. 35).

Le due parti in cui l'angolo divide la circonferenza, l'una interna all'angolo e l'altra esterna, si chiamano *archi di circonferenza*, a somiglianza degli archi da combattimento. Come tali archi sono tesi da una corda, i nostri archi hanno una corda essi pure: se congiungiamo A con B, il

segmento AB è detto *corda dell'arco*. L'arco interno all'angolo si dice *l'arco su cui l'angolo insiste*, l'altro arco (punteggiato nella figura 35) si chiama arco *complementare* del primo. Archi complementari hanno la medesima corda. Se descriviamo un circolo congruente e diciamo il suo centro C' e costruiamo in esso un angolo al centro uguale ad ACB, i cui lati incontrino la circonferenza nei punti A' e B', possiamo sovrapporre C' a C attraversando entrambi con uno spillo, e rotando il foglio superiore possiamo portare A' a coincidere con A: allora, siccome gli angoli sono eguali, se B e B' sono dalla stessa banda di CA, B' si sovrapporrà a B. Se no, facendo indietreggiare B' fino a sovrapporlo ad A, A' sarà sovrapposto a B.

In entrambi i casi gli archi sui quali insistono gli angoli uguali ACB e $A'C'B'$ sono sovrapposti, e così sono sovrapposti gli archi complementari. Allora si deve dire, per il principio di sovrapposizione, che queste coppie d'archi sono eguali. Cioè:

In circoli congruenti angoli al centro eguali insistono su archi eguali: e gli archi complementari di questi sono pure eguali.

Ora possiamo facilmente dimostrare che: *In un circolo angoli eguali insistono su archi eguali.* Non c'è che a disporre il circolo col centro su quello di un circolo congruente, con un angolo al centro eguale a uno dei due dati, e poi far rotare in modo conveniente il circolo superiore.

ESERCIZI.

1. Mostrate che in circoli congruenti angoli al centro eguali insistono su corde eguali.
2. Fate vedere che in un circolo angoli al centro eguali insistono sopra corde eguali.
3. Fate vedere che in circoli congruenti archi eguali sono sottesi da corde eguali.
4. Fate vedere che in un circolo le corde di archi eguali sono eguali.

DIVISIONE DEGLI ANGOLI.

§ 11. Bisezione d'angoli mediante un modello. — È possibile bisecare un angolo ACB nello stesso modo che abbiamo bisecato un segmento, costruendo un modello di carta dell'angolo e piegando poi tale modello per modo che un margine rettilineo coincida coll'altro. C'è un po' di difficoltà a piegare in due il modello nelle vicinanze della punta; ma questo non importa molto se piegate accuratamente tanto presso la punta quanto è possibile e poi, adoperando il modello come riga solo fino a una piccola distanza

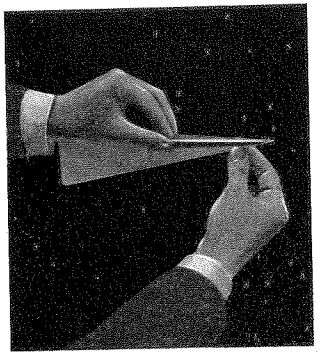


Fig. 36.

dal vertice, prolungate poi la retta di divisione dopo aver tolto il modello. Sarà anche meglio piegare il modello cogli orli in fuori (fig. 36).

Bisecare un angolo. — Ponete ora un margine del modello piegato lungo AB colla punta in A e rigate lungo l'altro margine. Se chiamiamo CD la retta ottenuta, l'angolo ACB è bisecato dalla CD, come si può facilmente provare.

Non troverete che questo sia un metodo facile per bisecare a dovere un angolo, e vi darò più avanti un metodo migliore.

La retta che abbiamo costruita giace naturalmente nell'interno dell'angolo. Prolungandola oltre C si ottiene l'intera retta di cui essa è parte, e piegando lungo questa il foglio, i due lati dell'angolo si sovrappongono e non solo l'interno dell'angolo è ripiegato su se stesso, ma lo stesso avviene per l'esterno. Di solito, *parlando della bisettrice di un angolo, intendiamo il raggio interno ad esso,* e si vede che tale raggio incontra ogni segmento avente gli estremi sui lati dell'angolo; ciò che non accade per l'altra semiretta.

Bisezione d'un angolo senza l'uso d'un modello. — Si prenda un punto qualunque A su uno dei lati dell'angolo ABC, e sull'altro lato si faccia CB eguale a CA: congiunto A con B, sia D il punto d'incontro di AB con la bisettrice (fig. 37).

Se allora pieghiamo il disegno lungo CB, gli angoli eguali DCA, DCB si sovrappongono, e CB coincide con CA giacchè $CB = CA$: perciò AB è tagliato dalla piega nel suo punto di mezzo, ossia esso è bisecato nel punto D.

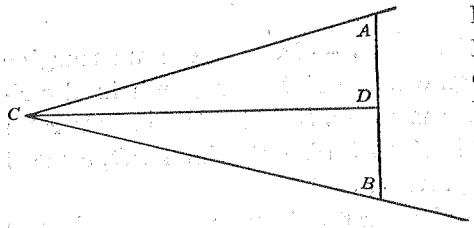


Fig. 37.

Questo ci insegna a *bisecare l' angolo ACB senza adoperare un modello dell'angolo,* solo per mezzo della riga, e questo metodo è di gran lunga il più conveniente ed esatto in pratica. Non si hanno che a segnare sui lati dell'angolo due segmenti eguali, congiungerne gli estremi A e B, bisecare il segmento ottenuto e congiungerne il punto medio D col vertice C. La CD è la bisettrice.

Si può con tal metodo, con bisezioni ripetute, dividere un angolo dato in 4, 8, 16,... parti eguali.

ESERCIZIO.

Se sui lati di un angolo sono segnati due punti ad egual distanza dal vertice, A e B, verificate che tutti i punti aventi eguale distanza da A e da B giacciono sulla retta che biseca l'angolo ACB. In altre parole verificate che il luogo dei punti equidistanti da A e da B è la retta bisettrice dell'angolo ACB.

(È infatti possibile piegare il foglio in modo che il punto di cui si tratta sia fisso ed A coincida con B).

PARAGONE DI ANGOLI DISEGUALI.

§ 12. **Angoli maggiori o minori.** — Dati due angoli ACB e PRQ, possiamo costruire un modello di PRQ e collocare il margine RP lungo CA: il raggio RQ potrà allora o coincidere con CB, o giacere nell'interno dell'angolo ACB oppure giacere all'esterno. Nel primo caso abbiamo detto che gli angoli ACB e PRQ sono eguali. Nel secondo e nel terzo caso però non possiamo proprio dire che un angolo sia eguale a una parte dell'altro, sebbene l' interno dell'angolo PRQ nel primo caso sia certamente sovrapposto a una parte dell'interno dell'angolo ACB, e nel secondo caso l'interno dell'angolo ACB sia sovrapposto a una parte dell'interno dell'angolo PRQ. Ricordate che vi avevo detto che non avremmo paragonato cose infinite, ed è un tutto infinito la parte interna di un angolo. Tale modo di considerare gli angoli non ci serve per confrontare angoli diseguali, ma vi ha un altro modo che ora spiegheremo.

Se fissiamo con uno spillo il punto R a C e facciamo coincidere RQ con CA, RQ e CA non formano angolo affatto, ma se facciamo rotare, per poco che sia, il foglio in direzione della freccia (fig. 38), così che il punto Q venga a situarsi nell'interno dell'angolo ACB, RQ e CA formeranno un angolo, e se ora RQ è in CD e RP in CA, diciamo che *il raggio RQ*

ha rotato dall'angolo PRQ o ACD, dato che questi due, essendo sovrapponibili, sono eguali. Questo è un modo diverso da quello di prima di considerare un angolo. Se ora facciamo ruotare ancora un poco e portiamo *RQ* in *CE*, il raggio *RQ* ha ora ruotato dell'angolo *ACE*, e l'angolo *ACD* è parte dell'angolo *ACE* in questo senso che per far rotare il raggio dell'angolo *ACE* dobbiamo rotare prima dell'angolo *ACD*. In questo senso diciamo che l'*angolo ACE è maggiore dell'angolo ACD*, e non perchè l'interno di questo fa parte dell'interno del primo.

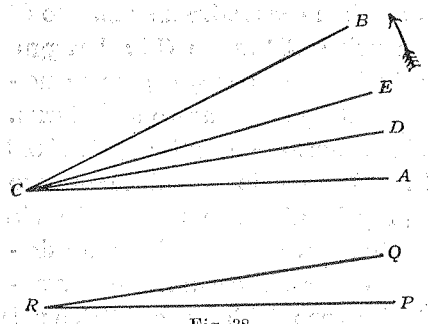


Fig. 38.

Quindi, se noi facciamo dipendere gli angoli da rotazioni di raggi, ritornando al nostro angolo *PRQ*, quando *RP* coincide con *CA*, e il raggio *RQ* giace entro l'angolo *ACB*, si deve pensare che il raggio *RQ* non è stato rotato, a partire dalla posizione *CA* tanto da prendere la posizione *CB*; e così l'angolo *QRP*, di cui *RQ*, ha rotato è minore dell'angolo *ACB*. Analogamente in questo senso, se *RQ* è fuori dell'angolo *ACB*, l'angolo *PRQ* è maggiore dell'angolo *ACB*. E vedete che, sebbene quest'idea di maggioranza e

minoranza per ciò che riguarda gli angoli non sia ottenuta col solo principio di sovrapposizione, è ancora vero che, se l'angolo *PRQ* è maggiore dell'angolo *ACB*, l'angolo *ACB* è minore dell'angolo *PRQ*. Questo dev'essere vero sempre, in qualunque modo noi paragoniamo gli enti, o altrimenti le parole maggiore e minore diverrebbero interamente prive di significato.

Se guardiamo le lancette di un orologio precisamente alle dodici, esse sono sovrapposte l'una all'altra; ma, poichè la più lunga ha un moto più rapido, immediatamente dopo formano un piccolo angolo. Ma il senso della rotazione è l'opposto di quello della fig. 38. L'angolo di cui ruota la lancetta grande non è l'angolo delle due lancette (giacchè la lancetta piccola va movendosi nello stesso senso della grande, solo più adagio), ma è l'angolo fra la lancetta grande e la linea, detta *linea iniziale*, che congiunge il centro del quadrante dell'orologio col punto che segna le dodici. Col passar del tempo tale angolo diviene via via più grande, finchè alle dodici e mezzo la lancetta lunga è in linea retta colla linea iniziale.

In tutto questo tempo la lancetta piccola giace entro l'angolo descritto dalla grande, e fa con la linea iniziale un angolo minore di quello della lancetta grande.

Dopo le dodici e mezzo, l'angolo fatto dalla lancetta lunga colla linea di cui si tratta si deve considerare come crescente in ampiezza, poichè esso misura la rotazione della lancetta, la quale non si è arrestata nè

è tornata indietro, ma va proseguendo il suo cammino tutto intorno al quadrante. L'angolo che la lancetta grande forma ora colla linea iniziale è ciò che si chiama un *angolo concavo,* e l'interno dell' angolo concavo è la più larga delle due porzioni in cui il piano è diviso dai lati dell'angolo: la lancetta piccola sta ancora entro l'angolo concavo.

Gli angoli da noi finora considerati non erano mai concavi e in questo libro voi non ne incontrerete o ben di rado; ma è necessario conoscerne l'esistenza e più tardi vi accadrà spesso di doverne considerare. Per ora, quando disegniamo o pieghiamo due semirette, supporremo che l'angolo da esse formato non sia concavo, cosicchè l'interno dell'angolo sia la parte più piccola del piano quando noi riguardiamo la divisione di questo mediante i lati dell'angolo. Ma, se costruite un angolo ACD, e in seguito, dall'altra banda di CD rispetto ad A, un altro angolo DCB, dovete ricordare che quello il quale viene diviso in due angoli ACD e DCB può essere l'angolo concavo formato dalle semirette CA e CB e non supporre che accada sempre, come nella fig. 38, che l'angolo non concavo ACB, detto anche *convesso*, sia quello che rimane diviso nei due angoli ACD e DCB.

ESERCIZIO.

Al tocco meno venti qual è l'angolo convesso compreso dalle lancette dell'orologio, e quali dei numeri 12, 3, 9, 6 del quadrante giacciono entro l'angolo?

Alla mezza la lancetta lunga è in linea retta colla linea iniziale, e non forma con essa nè angolo concavo nè angolo convesso: si dice che forma un *angolo piatto,* od anche un angolo che si nomina con la lettera greca π, che si legge *pi.*

In questo libro non useremo nessuna delle due espressioni, perchè vedremo che un tale angolo si può dividere in due angoli convessi eguali, chiamati angoli retti, così che noi potremo sempre parlare dell'angolo di cui si tratta dicendo *due angoli retti.* Potete vedere subito sul quadrante dell'orologio che esso vale due volte l'angolo fatto dalla lancetta lunga colla linea iniziale alle dodici e un quarto, giacchè ogni quarto d'ora la lancetta gira di uno stesso angolo: l'angolo di cui essa ruota in un quarto d'ora è quello che chiameremo più avanti angolo retto. Un angolo maggiore di due retti è ciò che diciamo un angolo concavo.

PERPENDICOLARITÀ.

§ 13. **Piegare una perpendicolare.** — Prendete la vostra riga di carta e piegatela così che, essendo fisso un punto O del suo margine, questo sia ripiegato su se stesso. Schiacciate la piega per bene. O è il punto d'incontro della piega col margine, sia P un altro punto qualunque della piega, siano A e

B due punti quali siensi del margine, sovrapponibili colla piegatura, e sia Q il punto a cui è sovrapposto P. Ora spiegate il foglio. *La retta OP si dice perpendicolare ad AB. Si dice che un raggio è perpendicolare a una retta AB in un punto O quando fa angoli eguali coi due raggi OA e OB che compongono la retta AB.*

Sapete che così accade appunto per OP, poichè gli angoli POA e POB coincidevano quando si era pie-

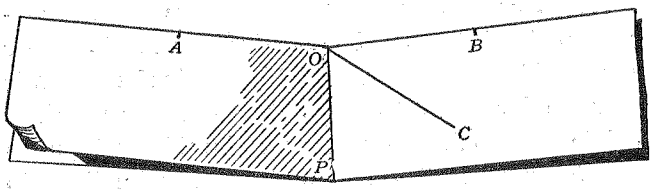


Fig. 39.

gato lungo OP. D'altra parte, quando si piega secondo la perpendicolare, OA coincide con OB, e ciò accade soltanto se la piega è fatta come abbiamo detto. Perciò *non vi è altra perpendicolare ad AB uscente da O e dalla stessa banda di AB tranne OP.* Ma sappiamo per la nostra piegatura che tutti e quattro gli angoli POA, POB, QOA, QOB sono eguali, perciò *OQ è anche perpendicolare ad AB, ed è il solo altro raggio perpendicolare ad AB in O.*

Guardandolo mi dite subito che POQ è una retta. Questo è vero, ma la vista non basta per noi; forse pare che sia così solo perchè abbiamo piegato male.

La ragione è la seguente. Se pieghiamo il foglio lungo PO, sappiamo che B coinciderà con A, sia stato o no il foglio piegato prima secondo AB. Se il foglio non era stato piegato prima, la continuazione della piega dalla stessa banda di AB, da cui sta Q, sarà il prolungamento di PO. D'altra parte sappiamo, nello stesso modo, che, se pieghiamo lungo OQ, B coinciderà con A. Ma quando si sovrappone B ad A la piega è perfettamente determinata, non la si può fare in due modi: quindi la OQ dev'essere la OP prolungata. I due raggi da O perpendicolari ad AB sono le due parti di un'unica retta.

Voi potete quindi facilmente provare che AOB è la perpendicolare a POQ nel punto O.

Vi ha dunque una ed una sola retta perpendicolare a una retta data per un punto dato. La seconda retta è anche perpendicolare alla prima.

La perpendicolarità è una relazione riguardante la « giacitura » di due linee rette che si tagliano.

Angoli retti. — Abbiamo detto che gli angoli AOP, BOP, QOA, QOB sono tutti eguali. Ognuno di essi prende il nome di *angolo retto*. Un angolo retto contiene esattamente 90 gradi (90°).

Se in un punto O' di una retta $A'B'$ conduciamo la perpendicolare $P'O'Q'$, possiamo in seguito, su un altro foglio di carta, piegare una copia esatta delle due linee, così che le due figure si possano sovrap-

porre; e, adoperando allora per questa copia le stesse lettere, possiamo sovrapporre questo foglio al primo per modo che O' giaccia sopra O ed $A'O'B'$ su AOB. Se ora pieghiamo con cura entrambi i fogli di carta lungo AB, e poi, tenendo fisso O, ripieghiamo il margine su se stesso, le pieghe debbono trovarsi lungo POQ in uno dei fogli e lungo $P'O'Q'$ nell'altro, e i quattro angoli retti di un foglio coincidono coi quattro angoli retti dell'altro, e sono quindi rispettivamente eguali. In questo modo è chiaro che *tutti gli angoli retti sono fra loro eguali.*

Ciò posto, è possibile condurre una perpendicolare a una retta data da un punto posto su di essa o no, senza piegare, servendosi di un modello di carta d'angolo retto. Non c'è che a situare un orlo del modello lungo la retta e farlo strisciare su di essa fino a che l'altro orlo passi proprio per il punto, poi far passare la matita rasente quest'orlo e prolungare, se si vuole.

ESERCIZI.

1. Piegate il più esattamente possibile ognuno dei seguenti angoli: 90°, 45°, $22\frac{1}{2}$ gradi; $11\frac{1}{4}$ gradi; $5\frac{1}{2}$ gradi: ritagliate attentamente quest'ultimo angolo, mettete un soldo sulla tavola dinanzi a voi, e trovate, mediante il vostro modello d'angolo, in che punto dovete porre l'occhio affinchè il modello sia eguale al diametro angolare del soldo.

2. Tenete lontano il soldo della lunghezza del braccio e determinate colla migliore approssimazione il numero di gradi dell'angolo sotteso al vostro occhio dal suo diametro

[2°]: dimezzando l'angolo di $5\frac{1}{2}$ gradi, quello ottenuto è un po' più ampio dell'angolo richiesto.

3. Ponete dritto un piatto, e trovate dove dovete mettervi affinchè il diametro angolare del piatto sia press'a poco dieci $\left[11\frac{1}{4}\right]$ gradi e cinque gradi rispettivamente.

4. Trovate dove vi dovete mettere perchè il diametro angolare del quadrante dell'orologio a pendolo possa essere press'a poco 5°.

5. Guardate delle cose all'aperto, alberi, case, pali telegrafici, ecc., e determinate approssimativamente quanti gradi sono nell'angolo sotteso al vostro occhio dai segmenti di verticali terminate ai loro punti più alti (altezza angolare o elevazione).

6. Guardate due pali telegrafici (o due altri oggetti simili) e determinate il più esattamente possibile quanti gradi conta l'angolo sotteso al vostro occhio dal segmento congiungente i loro piedi [Distanza angolare di due oggetti].

7. Trovate colla massima approssimazione il numero di gradi della distanza angolare fra due stelle brillanti quali siensi che voi possiate vedere.

Angoli supplementari. — Se da O conducete qualunque altro raggio OC, di origine O (fig. 40), è chiaro che O deve giacere entro uno degli angoli retti formati da PO con AB, e perciò (§ 12) uno degli angoli COA della figura, formato da OC con AB, sarà maggiore

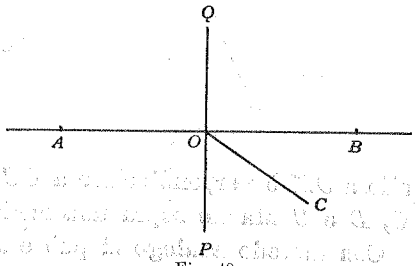


Fig. 40.

di un angolo retto e l'altro COB sarà minore di un angolo retto, e i due presi insieme varranno precisamente due retti. Un angolo maggiore di un retto prende il nome di *angolo ottuso*, un angolo minore di un retto ha il nome di *angolo acuto*; e *due angoli che presi insieme fanno due angoli retti vengono detti angoli supplementari.*

Allora *gli angoli che una semiretta o raggio fa con una retta che la interseca sono o entrambi retti o l'uno acuto e l'altro ottuso, e sono supplementari, vale a dire formano, presi insieme, due angoli retti.*

Fino ad ora, se avevate bisogno di vedere se tre punti giacevano in linea retta, potevate solamente piegare o verificare l'allineamento colla riga. Avete ora un altro mezzo: congiungete (fig. 41) uno dei punti O, con ciascuno degli altri D e C, e conducete OM perpendicolare a OD: se allora OM è perpendicolare a OC, e solamente allora O, D e C stanno sopra una medesima retta.

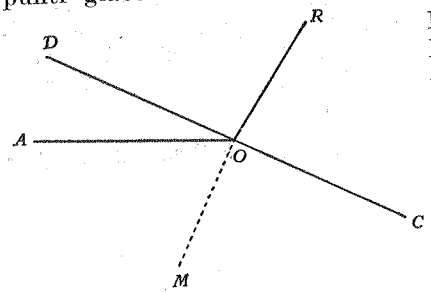


Fig. 41.

Con metodo analogo si può ora determinare se due raggi uscenti da un punto appartengono o no ad un'unica retta. Se, dato un angolo qualunque AOC,

si conduce un raggio OR (fig. 41) dalla banda di OC opposta ad A, di solito OR non sarà sulla medesima retta di OA. Ma se conducessimo OR così che l'angolo ROC fosse supplementare dell'angolo AOC, allora i due raggi AO e OR sarebbero disposti su una sola retta.

Quando, e solamente quando, due raggi OA, OR, da bande opposte di una retta DOC, formano angoli supplementari col raggio OC, AOR è una linea retta: i due raggi in tal caso formano angoli supplementari con qualunque raggio per O.

Angoli adiacenti: angoli opposti al vertice. — Disegnate due rette quali siensi AOB, COD, segantisi in O. Queste formano in O quattro angoli: nominateli (fig. 42).

Gli angoli aventi un lato comune si dicono angoli adiacenti, e due che abbiano comune soltanto il vertice si chiamano opposti al vertice.

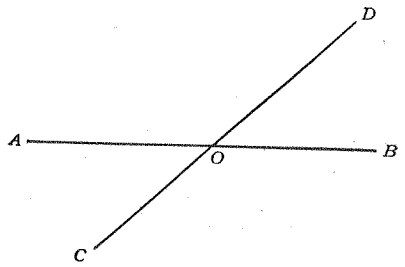


Fig. 42.

Quante sono le coppie di angoli adiacenti? Nominatele. Quante sono le coppie di angoli opposti al vertice? Nominatele.

Coppie di angoli adiacenti: AOC e COB; COB e BOD; BOD e DOA; DOA e AOC.

Coppie di angoli opposti al vertice: AOC e BOD; COB e DOA.

Ci sono due coppie sole di angoli opposti al vertice, ma quattro coppie di angoli adiacenti: un angolo adiacente a un altro è adiacente pure al suo opposto al vertice.

Che cosa potete dirmi di due angoli adiacenti? Essi sono supplementari, vale a dire formano presi insieme due angoli retti.

Che cosa potete dirmi di due angoli opposti al vertice? Sono eguali; giacchè ognuno coll'angolo adiacente ad entrambi forma due retti: per esempio AOC con $BOC = DOB$ con BOC.

ESERCIZI.

1. Verificare che le bisettrici di due angoli opposti al vertice stanno sopra una medesima retta.

2. Verificare che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

3. Sia O il centro di un circolo che passa per i punti B e D, e sia M il punto medio di BD: far vedere che OM è perpendicolare a BD.

4. Se A e C sono due punti di una circonferenza, verificate che il centro di questa sta sulla retta che biseca AC ad angolo retto.

Ciò posto, fate vedere in qual modo si può trovare il centro della circonferenza che passa per tre punti A, B e C non in linea retta, e disegnate la circonferenza.

Punti sovrapposti piegando. — Abbiamo visto che se OP (fig. 43) è perpendicolare al margine della riga di carta, la retta congiungente P col punto Q a cui esso era sovrapposto a margine piegato è la perpendicolare OQ: PQ è dunque bisecato in O dal margine.

Essendo C e D due punti sovrapposti quali si vogliano, quando il foglio di carta è piegato lungo una retta AB, è facile far vedere che lo stesso che accadeva per P e Q accade per C e D, cioè:

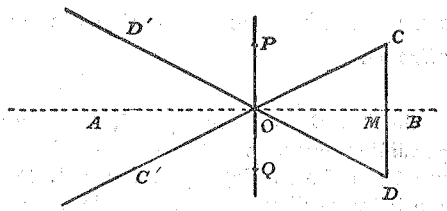


Fig. 43.

Dati due punti quali siensi A e B, se pieghiamo la carta così da tenerli fissi, CD è ripiegato su se stesso ed è bisecato ad angolo retto dalla piega.

Ciò accade perchè CD, essendo C e D da bande opposte della piega, deve incontrar questa in un punto: se il punto è M, M sta fisso e C è sovrapposto a D, per cui MC coincide con MD, e gli angoli che son sovrapposti sono adiacenti eguali e perciò retti.

Se è O un altro punto qualunque della piega, i segmenti OC e OD saranno analogamente sovrapposti e formeranno colla piega angoli eguali; questi però non saranno retti, perchè COD non è una retta unica.

Prolunghiamo ora DO fino in D', e trovate da voi a qual linea sarà sovrapposta la OD' quando si pieghi lungo la stessa retta di prima (OC' nella fig. 43).

Non c'è che a ricordare la proprietà che AB biseca non solo l'angolo COD, ma anche il suo opposto al vertice. Così si ha:

Se C e D sono punti sovrapposti e la piega passa per O, OC coinciderà con OB, e il prolungamento di OD oltre O sarà sovrapposto al prolungamento di OC pure oltre O.

ESERCIZIO.

Se B e D sono due punti, e A è un altro punto, ed è possibile piegare la carta così che AB sia sovrapposto ad AD, verificate che la piega passa per A. Da questo fate vedere che il luogo di un punto, il quale si muove in modo che le sue distanze da due punti dati si mantengano eguali, è una retta e biseca la distanza dei due punti ad angolo retto.

Disegnare una perpendicolare senza l'uso di un modello d'angolo retto. — Potete ora verificare che, date due circonferenze passanti per uno stesso punto A (fig. 44), i cui centri B e D non siano entrambi in linea retta con A, le circonferenze passeranno entrambe per un altro punto C ed AC sarà bisecato ad angolo retto da BD. Non avete che a piegare la carta lungo la linea dei centri BD: allora ognuna delle circonferenze è ripiegata su se stessa. Il punto C a cui A è sovrapposto, apparterrà certamente ad entrambe le circonferenze, e AC sarà bisecato ad angolo retto dalla piega.

Questo ci rende possibile la costruzione della retta perpendicolare ad una retta BD da un punto fuori di essa senza far uso del modello d'angolo retto. Non abbiamo che a scegliere due punti della retta data come centri, descrivere due circonferenze passanti per A e congiungere A coll'altro punto d'intersezione delle due circonferenze.

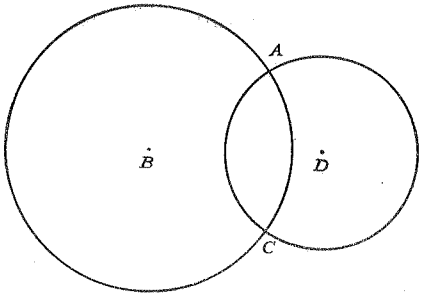


Fig. 44.

Intersezioni di due circonferenze. — È facile disegnare due circonferenze che non si seghino affatto. Troverete che così accade sempre se la somma

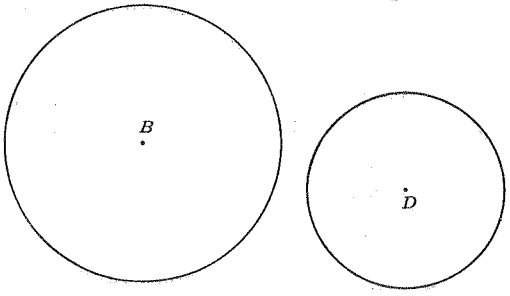


Fig. 45 *a*.

dei due raggi è minore della distanza BD fra i centri (fig. 45 *a*). Se la somma è precisamente eguale alla

distanza fra i centri, le due circonferenze passeranno per un punto comune T appartenente alla linea dei centri: si dice allora che le due circonferenze *si toccano*, e diciamo che *si toccano esternamente* poichè ognuno dei due circoli è posto fuori dell'altro (fig. 45 *b*).

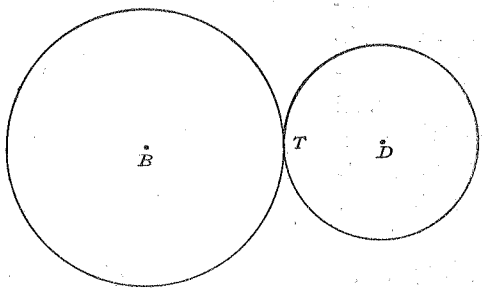


Fig. 45 *b*.

In un altro modo due circonferenze possono toccarsi (fig. 45 *c*): uno dei circoli sta tutto dentro l'altro, e si dice che si *toccano internamente*.

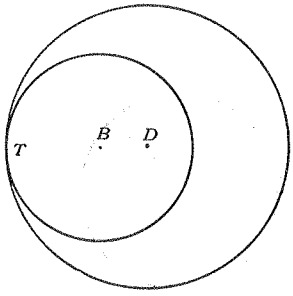


Fig. 45 *c*.

Se la somma dei raggi è maggiore della distanza BD fra i centri, le circonferenze s'incontrano sempre in due punti, come nella fig. 44. Capirete come vada questo dopo aver studiato i triangoli.

Se i raggi delle due circonferenze per A nella fig. 44 sono eguali, quando pieghiamo in modo che

i centri B e D coincidano la piega passa per A. (Eserc. pag. 84): similmente passa per C: sappiamo pure che la piega biseca BD ad angolo retto. In conseguenza, se M è il punto medio di BD (figura 46) A, M e C stanno sopra una stessa retta, e questa è la perpendicolare condotta a BD da M. (Eserc. pag. 61). *Questo ci fornisce un metodo per disegnare una perpendicolare a una retta data da un punto M dato su di essa*, senza bisogno di un modello d'angolo retto. Bisogna soltanto segnare sulla retta due segmenti eguali MB ed MD, e descrivere con centri in B e D due circonferenze congruenti, badando che s'incontrino, il che avverrà se il loro raggio è maggiore di MB o MD (per l'esattezza del disegno è meglio che tale raggio sia molto maggiore, così che i punti A e C possano essere abbastanza lontani e servir meglio di guida alla riga quando vengono congiunti): *AC è la richiesta perpendicolare da M.*

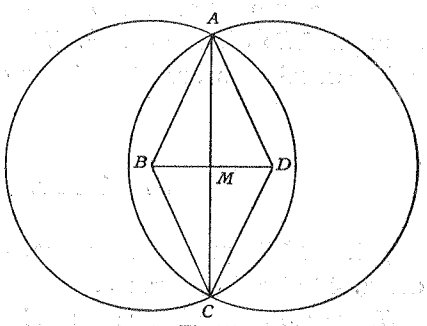


Fig. 46.

La fig. 46 è molto utile: ne possiamo derivare tre altre costruzioni col solo disegno senza bisogno di un modello o di una misura segnata sulla riga di carta

o di piegature. Sono le seguenti: 1° *Bisecare un dato segmento BC.* 2° *Bisecare un angolo BAD.* 3° *Condurre una perpendicolare a una retta BD da un punto A fuori di essa o da un punto M su di essa senza l'uso di un modello d'angolo retto.* Vi sarà facile eseguire tali costruzioni senza che vi vengano indicate qui.

IL ROMBO.

§ 14. **Definizione del rombo.** — La figura *ABCD* del n. 46 si chiama *rombo.*

Un rombo è una figura quadrilatera giacente in un piano, i cui lati sono segmenti eguali.

I segmenti *AC, BD,* congiungenti vertici opposti, si chiamano le sue *diagonali:* dal greco *dia,* che significa a traverso, come abbiamo già trovato per *diametro,* e *gonion,* che vuol dire angolo, la parola significa segmento condotto dall'uno all'altro angolo: abbiamo già trovato prima la parola diagonale, quando parlavamo del parallelepipedo rettangolare. È facile vedere che, piegando il rombo lungo la diagonale *BD, A* coincide con *C,* i segmenti *AB* e *CB* si sovrappongono, come pure *AD* e *CD,* per modo che il rombo è ripiegato su se stesso: se si piega secondo l'altra diagonale, *AC, B* si sovrappone a *D,* e di nuovo il rombo è ripiegato su se stesso. Abbiamo quindi i seguenti teoremi.

Le diagonali del rombo si bisecano scambievolmente ad angolo retto ed ognuna è bisettrice dell'angolo del rombo pel cui vertice passa. Gli angoli opposti del rombo sono fra loro eguali.

Simmetria del rombo. — Vedete che *un rombo è simmetrico rispetto a ciascuna delle sue diagonali.* Piegando il foglio secondo qualunque altra linea, si trova che le due parti non si sovrappongono, in conseguenza *il rombo ha due e due soli assi di simmetria, che sono le sue diagonali.*

Area del rombo. — Il rombo, come il circolo, ha un'area: vale a dire il suo circuito divide il piano in due parti, una delle quali non cambia mai considerando porzioni diverse di piano in cui il rombo è contenuto, mentre l'altra parte ingrandisce col crescere della porzione di piano. Nella fig. 47 l'area del rombo è tratteggiata: ogni punto di essa che non stia sul circuito si dice che giace *entro il rombo,* e un punto che non sia nè interno nè sul circuito si dice *esterno al rombo.*

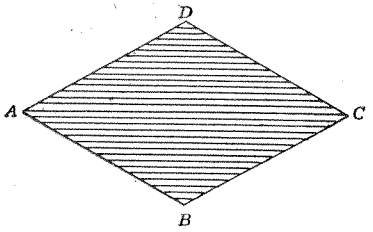


Fig. 47.

Costruzione di un rombo. — La fig. 46 ci insegna a *costruire un rombo data la lunghezza dei suoi lati e*

di una delle sue diagonali, e si può servirsene per ottenere una *costruzione del rombo data la lunghezza delle due diagonali,* poichè le diagonali del rombo si bisecano ad angolo retto.

Tali costruzioni si possono facilmente ottenere colla piegatura.

Piegare un rombo data la lunghezza delle sue diagonali: — Piegate due rette (1) e (2) ad angolo retto, segantisi in M: sulla (1) prendete due segmenti eguali dalle due parti di M, lunghi ognuno la metà di una delle diagonali, e sulla (2), dalle due parti di M prendete due segmenti ognuno eguale alla metà dell'altra diagonale, e piegate fra gli estremi d questi quattro segmenti. Otterrete il rombo richiesto (fig. 48).

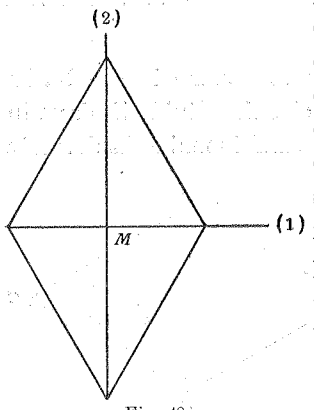


Fig. 48.

Piegare un rombo data la lunghezza de' suoi lati e di una delle sue diagonali: — Piegate una retta (1) e segnate su di essa un segmento BD eguale alla diagonale data e un segmento BE eguale al lato dato. Bisecate BD ad angolo retto ripiegando B su D, e sia la retta ottenuta (2). Piegato il foglio lungo BD, piegate ancora il margine che così si ottiene finchè E

venga a porsi sopra la linea (2), sempre mantenendo B fisso. Sia A il punto a cui E si sovrappone. Piegate lungo BA il foglio ancora piegato lungo BD: la piega, prendendo i due doppi del foglio [1], dà BA e BC. Piegati allora DA e DC, il rombo richiesto è $ABCD$ (fig. 49).

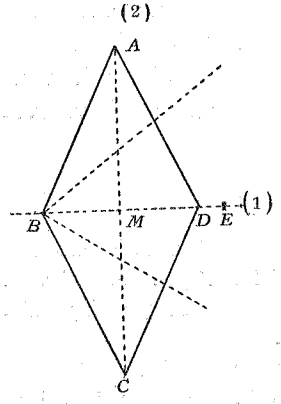


Fig. 49.

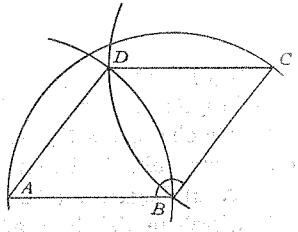


Fig. 50.

Disegnare un rombo coi lati eguali a un segmento dato e di cui un angolo sia eguale a un angolo dato.

METODO 1°. — Si può operare mediante un modello dell'angolo dato i cui lati abbiano la lunghezza dei lati del rombo. Questo metodo tuttavia non dà una grande esattezza.

METODO 2° — Segnate un segmento AB eguale al lato dato (fig. 50). Con centro in B conducete una

(1) Lo spessore della carta può fare che questa costruzione non dia tutta l'esattezza desiderabile. È meglio, dopo aver ottenuto con E il punto A, separare la parte del foglio contenente C da quella dove è A, e piegare BA da solo; in seguito, ripiegato E su C, piegare da solo BC. (Cfr. nota a pag. 93).

circonferenza passante per A. Costruite un angolo ABC eguale all'angolo dato, il cui lato BC incontri la circonferenza in C. Centro in A e in C e collo stesso raggio di prima, disegnate due circonferenze: queste passeranno entrambe per B, e, siccome A, B e C non stanno su una linea retta, si taglieranno in un altro punto, D. $ABCD$ è il rombo che si voleva.

ESERCIZI.

1. (*a*) Piegare e (*b*) disegnare un rombo, data una diagonale QC e la direzione di uno dei lati AQB. (Vedi fig. 99. La retta che biseca CQ ad angolo retto è l'altra diagonale, che a sua volta è bisecata da CQ).

2. (*a*) Piegare e (*b*) disegnare un rombo, dato un lato QC e la direzione del lato adiacente QB. (Vedi fig. 100. Una diagonale biseca l'angolo CQB, l'altra è la perpendicolare a questa uscente da C).

Piegare il rombo. — Piegate una retta (1) (figura 51). Piegate ora la (2) che faccia un angolo qualunque colla (1). Strappate la parte superflua del foglio, lasciando solo due orli abbastanza stretti vicino a (1) e a (2). Tenendo l'orlo ripiegato sotto (1), piegate (3) sovrapponendo (1) a (2). Non lasciate la carta piegata lungo (3), ma, tenendo ancora l'orlo piegato lungo la (1), segnate su questa il punto B a una distanza arbitraria dal vertice A dell'angolo costruito, e piegate (4) perpendicolare a (3) e passante

per il punto B, sovrapponendo (3) a se stessa e tenendo B fisso. Lasciando allora piegato il foglio lungo (1) e (4), piegate (5) in modo che coincida

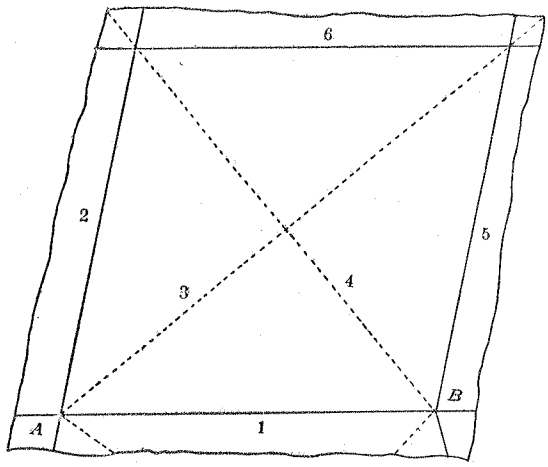


Fig. 51.

con (1). Similmente piegate (6) mediante (2), prima ripiegando l'orlo sotto (2), poi piegando lungo (4), e infine piegando il foglio in fuori lungo la (2) [1].

(1) In tutte le costruzioni seguenti mediante la piegatura è bene ricordare che è sempre più facile piegar bene da un punto in una data direzione che piegare fra due punti dati, ed anche che una linea richiesta per la costruzione non si deve mai piegare col foglio doppio, perchè in tal caso lo spessore della carta sarebbe causa di inesattezza, ma si deve, quando è necessario, come in questa costruzione, piegare il foglio in fuori lungo la piega già fatta colla quale deve coincidere la piegatura che si sta facendo.

Angoli di un rombo. — Vedete che non è necessario conoscere entrambi gli angoli di un rombo: conoscendo un angolo e la lunghezza di un lato si ha il rombo interamente determinato, e lo sono gli angoli rimanenti: uno di questi, l'angolo *opposto* al dato, è, lo sapete, uguale al dato, e, gli altri due, ad esso *adiacenti*, sono eguali l'uno all'altro: come possiamo determinare a qual angolo sono eguali entrambi? Vedrete che sono supplementari all'angolo già noto, vale a dire ognuno di essi dà con quello due angoli retti. Non potete ancora dimostrar questo, ma potete procurarvi la soddisfazione di vedere che è vero piegando nel modo seguente.

Bisecate uno dei lati del rombo in L (fig. 52). Vedrete ora che uno dei due punti A e D, prendiamo A, può esser condotto, tenendo fisso L e piegando, a giacere sopra DC e poi si può disporre AL e DL l'uno a lato dell'altro: troverete allora che il margine AB sta lungo DC, così che i due angoli LDC ed LAB del rombo sono perfettamente supplementari.

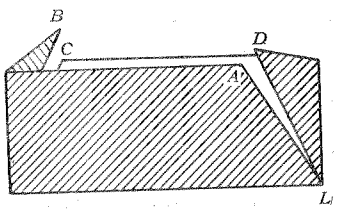


Fig. 52.

Il punto C sta in tal caso sotto un punto di AB, e vedrete che vi è possibile piegare in su B, che sta oltre C, così da portarlo vicino ad esso, e ancora i

due angoli così addossati del rombo LDC ed LAB sono supplementari.

Fatto tutto questo, voi avete ripiegato il rombo in una figura quadrilatera avente un angolo retto a ciascun vertice, detta *rettangolo*. Più tardi diremo qualcos'altro dei rettangoli. Le faccie di un parallelepipedo come quello che noi avevamo considerato sono rettangoli. I lati di questo rettangolo non sono tutti eguali. Un rettangolo di cui tutti i lati siano eguali è una specie particolare di rombo, a voi ben familiare, che si chiama *quadrato*.

IL QUADRATO.

§ 15. **Definizione del quadrato.** — *Il quadrato è un caso particolare del rombo. Se uno degli angoli del rombo è retto, il rombo è un quadrato* (fig. 53).

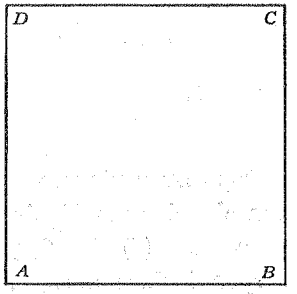


Fig. 53.

Ognuno degli angoli del quadrato è retto, poichè un angolo retto ha per supplemento un angolo retto; ma non è necessario dir questo nella definizione del quadrato, basta dire che è retto uno degli angoli.

Siccome un modello d'angolo retto si può costruire e adoperare con molta precisione, è facile disegnare un quadrato col primo metodo dato per la costruzione del rombo.

Piegare un quadrato. — Si può operare come nel caso generale, ma la piegatura può in questo caso esser resa più semplice, essendo così facile condurre una retta perpendicolare ad un'altra da un punto preso su di essa o fuori di essa.

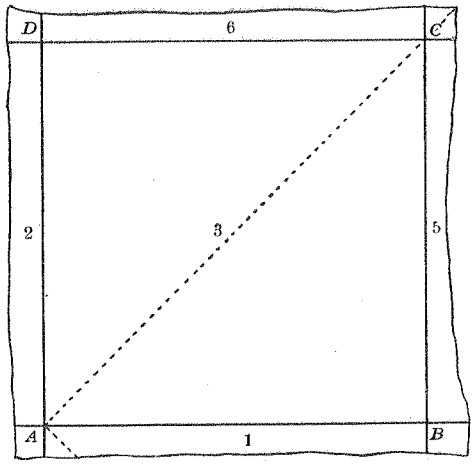


Fig. 54.

Dopo aver piegato le (1), (2) e (3) al modo di prima, non c'è bisogno di piegare l'altra diagonale (4).

La retta (5) si può piegar subito passante per B e perpendicolare alla (1), e, se è C il suo punto d'incontro con la (3), la retta (6) si può piegare perpendicolare alla (5) e uscente da C. Se non v'importa di segnare entrambe le diagonali, potete, in luogo di piegare la (3), curvare solo (1) su (2) senza premere,

in modo da ottenere su (2) il quarto vertice D, e allora piegare (6) perpendicolare a (2) e partente da D; o anche si può adoperare una riga per fare AD della lunghezza voluta (fig. 54).

Le diagonali di un quadrato sono eguali. — Si può verificar questo colla riga, o, se si è ben certi che ciascun angolo della figura costruita sia retto, si può dimostrarlo piegando nel modo seguente: Piegato il quadrato così che A sia sovrapposto a D, essendo gli angoli in A e in D retti, AB coinciderà con DC, e B starà su C poichè questi due segmenti sono eguali: anche AD e BC saranno ripiegati su se stessi, e la piega li dimezzerà. Perciò la parte della diagonale AC che sta vicino ad A coinciderà colla parte della diagonale DB vicina a B, giacchè queste sono le bisettrici degli angoli retti sovrapposti. In conseguenza, se M è l'intersezione delle diagonali, ne segue che M sta sulla piega ed MA è sovrapposto ad MD, così che queste due metà di diagonali sono eguali, e perciò sono eguali le diagonali stesse.

Simmetria del quadrato. — Abbiamo visto che il rombo è simmetrico rispetto alle sue diagonali, accadrà perciò lo stesso del quadrato; ma questo ha due altri assi di simmetria: sapreste dirmi quali? Le congiungenti i punti medî di due lati opposti. Se piegate lungo una di queste, gli angoli consecutivi

sono sovrapposti l'uno all'altro, mentre, piegando lungo la diagonale, si sovrapponevano due angoli opposti, e le due metà degli altri due si ripiegavano l'una sull'altra.

Disegnare un quadrato. — Non volendo adoprare un modello d'angolo retto, uno dei modi migliori di disegnare un quadrato è di costruirlo secondo la fig. 46, prendendo come diagonale del quadrato BD (fig. 55).

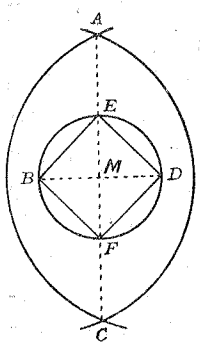


Fig. 55.

Si descriva un circolo con centro in M, punto medio di BD, la cui circonferenza passi per B e D e incontri la perpendicolare AC in E ed F. Congiungendo, $BEDF$ è il quadrato. Questo dà un metodo per disegnare un quadrato le cui diagonali hanno una lunghezza data. Se è data la lunghezza del lato, possiamo invece adoperare la fig. 46 per ottenere un angolo retto e terminare poi la costruzione come per il rombo (figura 50).

Nella fig. 55 il quadrato è *inscritto* in un circolo, ossia disegnato coi vertici sulla circonferenza. Il circolo si dice *circoscritto* al quadrato.

Il centro del circolo circoscritto è nel punto d'intersezione delle diagonali del quadrato.

Area di un quadrato. — L'area del quadrato è parte dell'area del circolo circoscritto, quindi (per il nostro assioma che il tutto è maggiore della parte) *l'area di un circolo è maggiore di quella del quadrato in esso inscritto* (fig. 56).

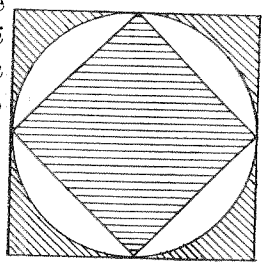


Fig. 56.

ESERCIZI.

1. Descrivete un quadrato sopra un dato segmento, e circoscrivete ad esso un circolo.

2. Descrivete un circolo e iscrivete in esso un quadrato. Fate vedere, mediante la rotazione, che tutti i quadrati inscritti nel medesimo circolo hanno lati eguali ed aree eguali.

3. Disegnate un quadrato: bisecatene i lati e congiungete i punti di bisezione. Fate vedere che questi segmenti limitano un quadrato.

Tale quadrato è inscritto nel quadrato maggiore. Circoscrivete un circolo intorno al quadrato più piccolo: vedrete che l'interno del circolo è tutto rinchiuso nel quadrato più grande, e così è per la sua circonferenza: questa passa solo per i quattro punti di bisezione. Questo circolo è inscritto nel quadrato: il suo centro è pure nella intersezione delle diagonali. Il quadrato maggiore è circoscritto a questo circolo. *L'area di un circolo è minore di quella del quadrato ad esso circoscritto* (fig. 56).

Paragone delle aree di dati quadrati. — Se abbiamo due quadrati aventi i lati eguali, $ABCD$ e $PQRS$, si può costruire un altro quadrato coi lati eguali in un altro foglio, ed è chiaro che si potrà sovrapporre questo terzo quadrato a ognuno degli

altri. In conseguenza *quadrati coi lati eguali sono congruenti,* ed hanno perciò la stessa area.

Dati due quadrati $ABCD$, $PQRS$ coi lati diseguali, uno di essi avrà i lati più lunghi: sia il quadrato $ABCD$ (fig. 57). Noi possiamo allora tagliare una parte AE, sopra AB, eguale a PQ, e completare il quadrato $AEFH$ sopra AE dalla parte su cui sta D:

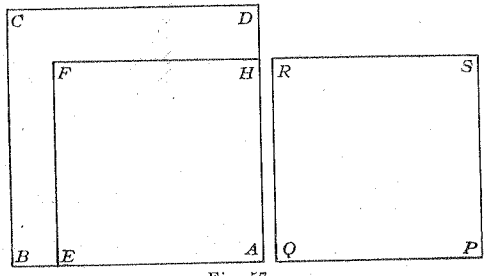


Fig. 57.

naturalmente questo nell'angolo in A si adatta esattamente al quadrato $ABCD$. Ciò si vede forse meglio se i quadrati sono piegati, come nella fig. 54. L'area del quadrato $AEFH$ è allora solo parte dell'area di $ABCD$, ed è perciò minore di quella di $ABCD$; ma il quadrato $AEFH$ è congruente a $PQRS$: perciò *il quadrato $PQRS$, di lato minore, ha anche minor area del quadrato $ABCD$, di lato maggiore.*

È da notare che il circuito o *perimetro* $AEFH$ è pure minore di quello di $ABCD$, giacchè vale quattro volte AE, il che fa meno di quattro volte AB. È importante notar questo, perchè, quando confrontavamo circoli non congruenti, potevamo confrontarne le aree direttamente per sovrapposizione, ma non ci era possibile sovrapporre alcuna parte dei loro circuiti, per modo che non potemmo trarre alcuna conclusione sulle grandezze relative di questi.

Dunque: *per confrontare le aree di due quadrati basta confrontare i loro lati: il quadrato di lato maggiore ha maggior area e, se i lati sono eguali, le aree sono pure eguali.*

Misure d'area. — Un quadrato avente per lato un centimetro viene detto *un centimetro quadrato.* Dato un quadrato avente per lato due centimetri, se si dimezzano i suoi lati opposti, e si congiungono i punti di divisione sui lati, si divide il quadrato in quattro quadrati aventi un centimetro di lato: quindi l'area di un quadrato di lato 2 centimetri è 4 centimetri quadrati (4 cm.^{2}) o due volte due centimetri quadrati. Analogamente l'area di un quadrato di lato 3 centimetri vale 9 centimetri quadrati o tre volte tre centimetri quadrati, e quella di un quadrato di lato quattro centimetri è 4 volte 4 o 16 centimetri quadrati. Questi numeri, 4, 9, 16, 25, 36, ecc., sono chiamati *quadrati.* Quattro è detto il quadrato di due, e si scrive 2^2; nove è il quadrato di tre, 3^2, e così di seguito, perchè sono il numero di centimetri quadrati dell'area dei quadrati di cui ora si è parlato. La regola per calcolare il numero di centimetri quadrati contenuti in un quadrato qualunque è la

seguente: *Si misuri col centimetro il lato del quadrato e si moltiplichi il numero di centimetri ottenuto per il numero stesso, o, come si suol dire, si faccia il quadrato di tal numero: il prodotto dà il numero di centimetri quadrati dell'area.*

Si vede subito che tutto quanto abbiamo detto è ancora vero se prendiamo un metro o *qualunque altra unità di lunghezza* in luogo del centimetro. L'area del quadrato, di lato un metro, è detta un metro quadrato ($1\,m^2$), l'area del quadrato avente per lato 2 metri è $4\,m^2$, e così via.

ESERCIZI.

1. Fate vedere mediante la piegatura che l'area di un quadrato avente per lato mezzo centimetro è un quarto di centimetro quadrato.

2. Fate vedere che l'area di un quadrato di centimetri $2\frac{1}{2}$ di lato vale centimetri quadrati $6\frac{1}{4}$.

IL CUBO.

§ 16. Definizione del cubo. — *Dicesi cubo un parallelepipedo rettangolo avente gli spigoli eguali.*

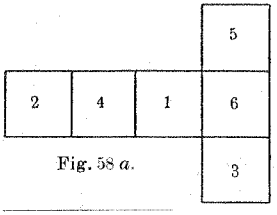


Fig. 58 *a*.

Costruiremo ora un campione di cubo. La fig. 58 *b* ne dà il modello [1], che dapprima bisognerà piegare, in seguito liberare della parte tratteggiata e incidere lungo le linee più premute. Si bada allora che tutte le pieghe

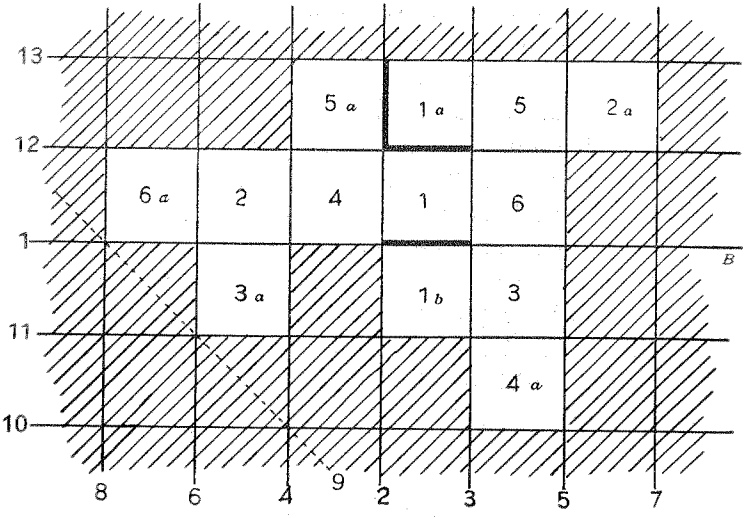


Fig. 58 *b*. (*a*) Sviluppo e (*b*) modello piano del cubo.

siano fatte dalla stessa banda (voglio dire che, piegando il foglio lungo qualsiasi di esse, stia sempre

[1] La fig. 58 *a* è ciò che si dice lo *sviluppo* del cubo: è un modello di cubo senza facce superflue da ripiegare. Disegnando lo sviluppo di un cubo sopra un pezzo di cartone, passando leggermente con un temperino lungo le linee di separazione delle faccie, e poi ritagliando lo sviluppo, si può ad esso far prendere la forma del cubo, e farlo stare a posto con liste di carta da francobolli o di altra carta gommata. Non è tuttavia così facile costruire il cubo in questa maniera come il piegarlo nel modo indicato alla fig. 58 *b*. Non daremo perciò mai gli sviluppi, ma dei modelli da piegare. È facile da uno di questi ottenere lo sviluppo omettendo le facce in più che vengono adoprate per ripiegare in dentro. Per ogni figura l'alunno potrà costruire da solo lo sviluppo, come esercizio.

al di fuori una stessa pagina). La figura viene infine connessa, piegando i quadrati che portano lo stesso numero l'uno sotto l'altro, l'ordine delle lettere mostrando quale dev'essere posto più sotto: così 1 *b* va sotto 1 *a* e 1 sta all'infuori di tutti i quadrati segnati colla medesima cifra.

Non c'è alcuna difficoltà a mettere i quadrati a posto: il quadrato 6*a* è l'ultimo da collocare e tiene insieme tutto il cubo.

Piegando il modello sarà conveniente piegare le rette nell'ordine indicato dalle cifre ai margini. Prima si piegano (1) e (2) ad angolo retto, poi si piega (3) perpendicolarmente ad (1), essendo la distanza fra (2) e (3) il lato dei quadrati che limitano il cubo. Le altre rette fino a (8) si piegano di seguito perpendicolari a (1) e ottenendole da una di quelle costruite prima [1]: per esempio la (4) è ottenuta piegando il foglio lungo la (2), poi piegando la (3) dalla banda opposta in dentro e infine piegando all'indietro l'altra metà del foglio in modo che il margine che si ottiene coincida con (3).

Per ottenere i rimanenti lati dei quadrati, prima pieghiamo la diagonale (9) facendo coincidere (1) con (8): è meglio usare questa diagonale affinchè non resti piegata alcuna delle faccie esteriori del cubo. Le rette rimanenti si ottengono in ordine, (12) e (13)

[1] Cfr. la nota a pag. 93.

vengono piegate mediante (11) e (10) essendo il foglio piegato lungo (1).

La figura è molto migliore se, in luogo di apporre alle facce numeri e lettere, si dà loro una tinta, la stessa a quelle che hanno lo stesso numero. Per ciò che avremo a dire in seguito, supponiamo che le facce siano state colorate nel modo seguente:

1. arancio	4. cremisi
2. verde	5. violetto
3. rosso vivo	6. giallo chiaro.

La convenzione ci sarà utile in seguito, quando ci accingeremo a tagliare il cubo.

La fig. 59 mostra il campione finito: si possono trovare parecchi oggetti a noi familiari i quali hanno la forma di cubo.

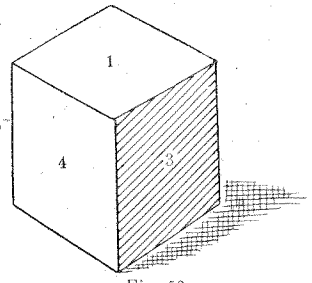


Fig. 59.

Facce, vertici e spigoli del cubo. — Contiamo ora il numero delle facce, dei vertici e degli spigoli del cubo. Ricorderete di averlo fatto molto più indietro per il parallelepipedo rettangolo, e siccome del parallelepipedo rettangolo il cubo è un caso particolare, i numeri saranno gli stessi.

Facce	6	Spigoli	12
Vertici	8		2
	14		14

Aggiungendo al numero delle facce il numero dei vertici e aggiungendo due al numero degli spigoli si ottiene in ambi i casi il medesimo risultato. Troverete che la stessa cosa si verifica per tutte le figure solide limitate da porzioni di piano.

Abbiamo adoperato i primi sei numeri per nominare le facce del cubo: come nomineremo gli spigoli? Si possono usare delle coppie di numeri, nominando ogni spigolo mediante i numeri delle due facce che passano per esso: allora (1,4) è lo spigolo secondo cui si incontrano le facce 1 e 4.

Mediante gli stessi numeri, come nomineremo i vertici? Si possono usare i numeri delle tre facce concorrenti nel vertice, così che gli estremi dello spigolo (1,4) sono i vertici (1,4,3) e (1,4,5).

È questo un modo di nominare facce, vertici e spigoli diverso da quello usato per il parallelepipedo rettangolo. Avremmo naturalmente potuto fare come allora: si cominciava col nominare i vertici colle otto prime lettere dell'alfabeto, ogni spigolo aveva quindi due lettere, e tre lettere indicavano una faccia. Ma ricorderete che a questa maniera una stessa faccia poteva essere indicata con nomi diversi, giacchè in ogni faccia vi sono quattro vertici, e a noi non ne occorrono che tre per nominarla. Le otto lettere erano di fatto più simboli del necessario per nominare vertici, facce e spigoli del cubo e vedrete che bastano sei simboli soli. Abbiamo qui preso come simboli i

sei primi numeri: potevamo naturalmente prendere invece le sei prime lettere, o i nostri sei colori, o qualunque altro simbolo ci piacesse, ma, una volta che ne abbiamo scelti sei, c'è uno ed un solo nome, per ogni faccia, vertice, o spigolo del cubo, che sia formato con essi.

Diagonali. — Nominiamo ora le diagonali delle facce, dando ad ognuna il nome dei vertici che essa congiunge. Non esse sole sono le linee congiungenti i vertici: quale, fra queste ultime, non è diagonale di una faccia?

La retta congiungente (1, 3, 4) con (2, 5, 6). Notiamo che compaiono qui tutti e sei i numeri, mentre, se si nomina una diagonale d'una faccia, ne manca uno, appartenente alla faccia opposta a quella di cui si sta nominando la diagonale. Che cos'è la retta congiungente (1, 3, 4) con (2, 5, 6)? Una diagonale del cubo. Tenete questo in modo che tale retta stia verticale. Non la potete vedere, perchè sta nell'interno del cubo, ma potete imaginarla. Se il cubo fosse di vetro, e in esso un filo colorato congiungesse quei due vertici opposti, vi sarebbe possibile vederla. Mentre tenete ancora come prima il campione di cubo, indicatemene le altre diagonali e ditemi come le chiamereste: (2, 4, 5) (1, 3, 6); (2, 3, 4) (1, 5, 6) e (1, 5, 4) (2, 3, 6).

Tenete ora il cubo col pollice e l'indice sulle facce 4 e 6, lo spigolo (1, 3) in alto e la faccia 1 verso di voi, come nella fig. 61. È possibile far passare un piano per tre punti quali siensi.

Conducendone uno per i punti (1, 5, 6), (1, 5, 4) e (2, 3, 4) come sarà esso posto? Orizzontalmente.

Come taglierà le rimanenti facce del cubo? Vedrete facilmente che incontra il cubo nello spigolo (2, 3) e passerà così per il punto (2, 3, 6) sulla faccia 6: passa anche per il punto (1, 5, 6) opposto ad esso sulla stessa faccia 6. Taglierà dunque il cubo lungo la diagonale di essa faccia passante per quei due punti.

Abbiamo così dunque quattro vertici del cubo che giacciono in un piano che non è una faccia del cubo. Quattro punti presi a caso sappiamo che non giacciono in un piano: qui il fatto dipende dalla simmetria del cubo. Quali delle diagonali del cubo stanno su questo piano? (1, 5, 4), (2, 3, 6) e (1, 5, 6), (2, 3, 4). Analogamente le altre due diagonali del cubo giacciono in un piano il quale, nella posizione in cui tenevate la figura (fig. 61), è verticale.

Secondo un piano noi possiamo tagliare. Se tagliamo secondo questo, che cosa avverrà del cubo? Esso rimarrà diviso in due cunei.

Vedremo ora come si possano costruire due tali cunei che riuniti costituiscono il cubo e in cui si vedono, sul piano di divisione, le diagonali del cubo stesso.

Coppia di cunei costituenti un cubo. — La figura 60 ne dà i modelli. La linea (1) divide l'un cuneo dall'altro. Sono state segnate cogli stessi numeri le pieghe che si corrispondono nei due cunei, accentando gli spigoli posti inferiormente nel modello. Le linee fino a (4) e (4′) sono piegate come per il cubo.

La (5) biseca gli angoli fra (1) e (2) e dà su (3) il punto per cui deve passare la (6). Si deve piegare all'infuori (7) mediante (6), essendo il foglio piegato in dentro lungo (2), mentre (8) biseca l'angolo di (4) e (6). Si piegano ora (9) e (10) perpendicolarmente a (8) e passanti per le intersezioni di questa rispettivamente con (2) e (6). Per piegare (11) si fa coincidere (9) con (6) piegando il più leggermente possibile: (11) giace allora su (3) e, facendo su (9) una pieghetta nel punto dove (6) incontra (3), otteniamo il punto P per cui (11) viene piegata perpendicolarmente a (9). Si piega allora (12) perpendicolare a (11) e passante per l'intersezione di questa con (2).

Le linee punteggiate si ottengono più facilmente dopo aver ritagliato il modello. I numeri sui quadrati e mezzi quadrati corrispondono a quelli usati prima per il cubo. Le due faccie più estese senza numeri sono le sezioni all'interno del cubo; e, colorando i modelli, dovranno essere tinte in azzurro chiaro, secondo la nostra convenzione di fare azzurra la parte interna del cubo.

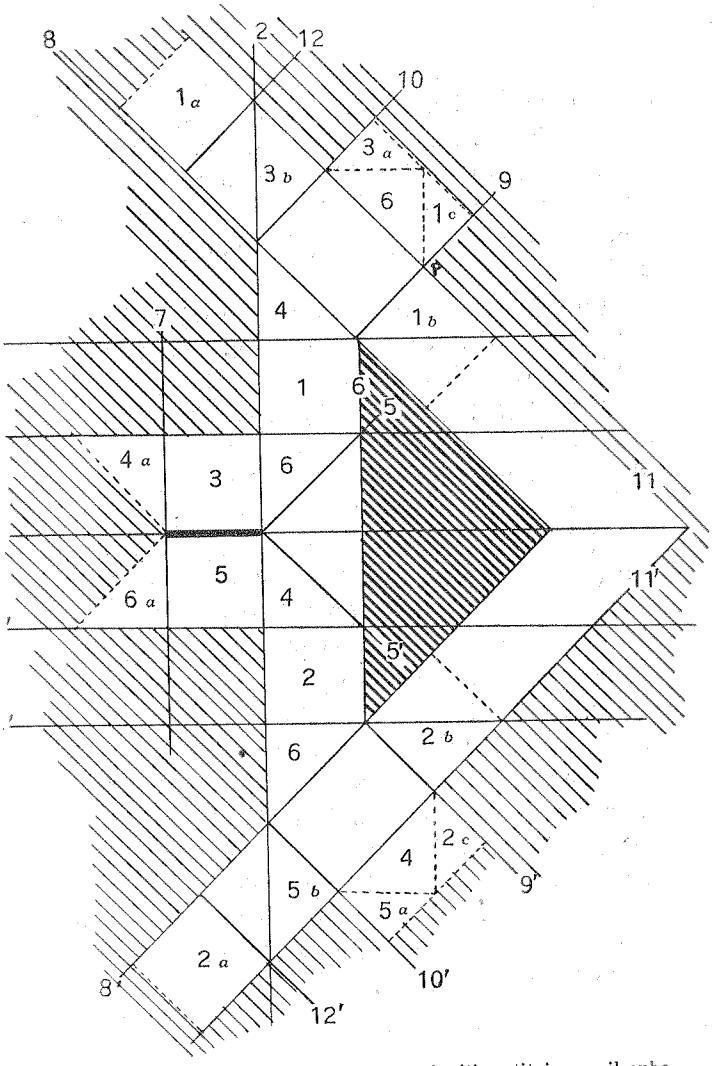


Fig. 60. Modello piano dei due cunei che riuniti costituiscono il cubo.

Le diagonali del cubo, che stanno su queste facce, possono, se si vuole, venir disegnate sul modello, e sono le diagonali delle facce azzurre.

Centro del cubo. — Il punto d'intersezione delle diagonali delle facce azzurre di uno dei nostri cunei si chiama *centro del cubo.* È un punto interno al cubo, in modo che, guardando la figura del cubo, non lo si può vedere, ma si può figurarsi dov'è: sta in mezzo al cubo, così come il centro della sfera sta in mezzo alla sfera.

Disponete le vostre figure del cubo e dei due cunei che lo ricostruiscono accanto dinanzi a voi, con la faccia 4 in alto, e lo spigolo (1, 5) più vicino a voi. Il piano di sezione dei cunei è allora verticale e va nella vostra direzione: vedrete subito qual è il punto della faccia superiore 4 sotto cui sta il centro: è l'intersezione delle diagonali di questa faccia. Se noi tagliassimo il cubo secondo l'altra diagonale di 4, non ottenendo più le facce azzurre dei nostri cunei, questo taglio passerebbe anche per il centro, e taglierebbe di nuovo il cubo in due cunei come i precedenti, non diversi per altro che per la posizione diversa dei colori sulle loro facce. Le facce azzurre di questi nuovi cunei conterrebbero ancora il centro, il quale sarebbe l'in-

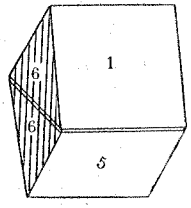


Fig. 61.
Cubo tagliato in due.

tersezione delle loro diagonali, che sono le rimanenti due diagonali del cubo. In conseguenza *le quattro diagonali del cubo s'intersecano in un punto: questo punto è detto centro del cubo:* esso giace proprio sotto l'intersezione delle diagonali di qualunque faccia ci piaccia di porre in alto.

Simmetria del cubo. — I due cunei ottenuti tagliando in due il cubo sono (a meno dei colori, i quali non sono che un modo per indicare le facce, e non una parte essenziale del cubo) perfettamente eguali l'uno all'altro: sono riflessioni l'uno dell'altro, così che *il cubo è simmetrico rispetto al piano passante per due delle sue diagonali.*

Quanti saranno i piani come questo? Tanti quante sono le facce, perchè ognuno passa per una diagonale di ciascuna di due facce opposte, per modo da esserci una coppia di piani per ogni coppia di facce opposte, e cioè tanti piani quante facce. Abbiamo dunque sei piani rispetto ai quali è simmetrico il cubo, e ciascuno di essi passa per il centro.

I piani di simmetria del cubo non sono questi soli. Potete indicare gli altri guardando la figura?

La retta secondo cui uno dei piani considerati taglia una faccia del cubo deve naturalmente essere una linea di simmetria per quel quadrato.

Quali sono le linee di simmetria di un quadrato oltre le sue diagonali? Le rette congiungenti i punti

medî de' suoi lati opposti, e tali rette passano per l'intersezione delle diagonali del quadrato. Se tagliamo giù dritto il cubo premendo sulla retta congiungente i punti di mezzo dei lati opposti (1, 4) e (2, 4) della faccia superiore 4 del cubo, per quale punto interno al cubo andremo a passare? Per il centro. Questa sezione bisecherà i lati opposti delle facce 1 e 2 che stanno dalle due parti della faccia 6: quindi il nostro piano divide in parti simmetriche le facce che taglia e le facce rimanenti, 3 e 5, sono riflessioni l'una dell'altra sul piano di sezione, così che *il cubo stesso è diviso simmetricamente da un piano per il centro il quale bisechi una coppia di lati opposti di qualunque delle facce.*

Quanti saranno questi piani? Tanti quante sono le coppie di facce opposte, giacchè per ognuno si ha una tale coppia che non ne può essere tagliata, per esempio per il piano di prima le facce 3 e 5. I piani in questione sono perciò tre. Stando le figure nella posizione che avevamo detto, due di questi piani sono verticali e uno orizzontale.

In quali figure viene diviso il cubo da uno di questi piani? In due *parallelepipedi rettangoli.* Essi sono raffigurati alla fig. 63, e la fig. 62 dà il modello per costruirli. Naturalmente esso differisce dal modello del cubo per il solo fatto che le facce non sono tutte quadrate. Come per i cunei di prima, si possono due di questi parallelepipedi tagliare insieme.

Per semplicità di figura non si è dato il disegno così, ma si può supporre che tutta la figura venga riflessa

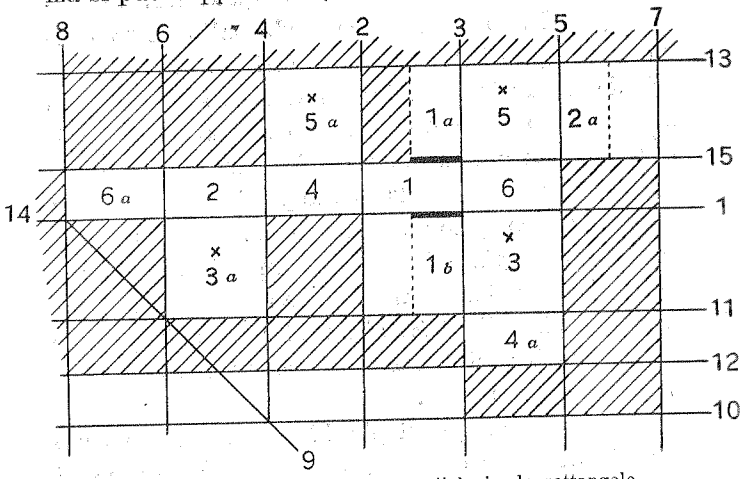


Fig. 62. Modello piano di un parallelepipedo rettangolo.

dall'altra banda della retta (13) come nella fig. 60, e si piegano le linee in corrispondenza.

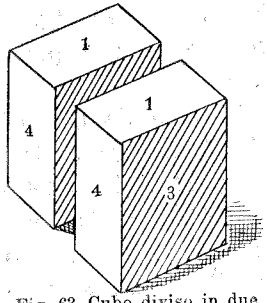


Fig. 63. Cubo diviso in due parallelepipedi rettangoli.

Nella fig. 62 le faccie 5 e 3 sono contrassegnate da un asterisco per far vedere che la 5* di una delle figure e la 3* dell'altra sono le sezioni (azzurre) interne al cubo. Le facce 1 *a*, 2 *a* e 1 *b*, devono, dopo che si è ritagliato, venir piegate lungo

le punteggiate; ma è solo necessario portar via il lembo di 1 *a*, quello di 1 *b* può venir ripiegato convenientemente e lasciato a tagliare.

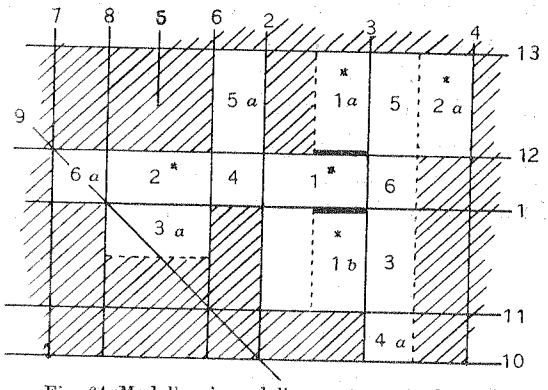


Fig. 64. Modello piano della quarta parte del cubo.

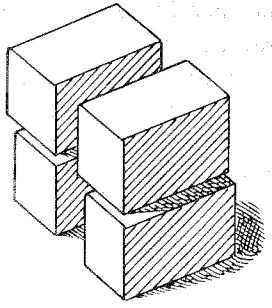


Fig. 65. Cubo diviso in quattro parallelepipedi

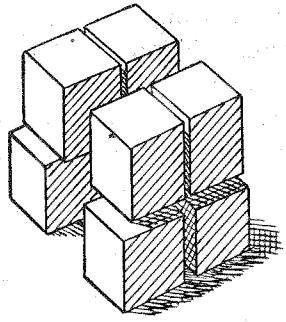


Fig. 66. Cubo diviso in otto parti,

Se noi tagliamo ora il cubo lungo il secondo degli ultimi piani di simmetria considerati, divideremo ognuno dei due mezzi cubi in due nuovi parallelepipedi rettangoli a base quadrata (fig. 65). E questi possono venir costruiti col metodo di prima mediante il modello dato alla fig. 64.

Se infine tagliamo secondo il terzo piano di simmetria, ognuno dei quattro quarti di cubo è diviso in due piccoli cubi i cui lati sono lunghi la metà di quelli del cubo dato, per modo che il cubo è diviso in otto di tali cubetti (fig. 66).

IL RETTANGOLO.

§ 17. — **Definizione del rettangolo.** — Nella figura del cuneo (fig. 60), la faccia che era sezione interna del cubo, e che avevamo perciò tinto in azzurro chiaro, non era un quadrato. Essa rassomiglia al quadrato in quanto *è una figura piana quadrilatera con tutti gli angoli retti*, ma i suoi lati non sono tutti eguali, sono soltanto eguali a coppie; sono eguali gli opposti, mentre sono diseguali gli adiacenti.

Questa figura prende il nome di *rettangolo* [1].

Il nome non è del tutto indovinato, perchè dà l'impressione che il rettangolo sia uno speciale angolo;

[1] Cfr. la fine del § 14.

mentre la parola è solo l'abbreviazione di *figura quadrilatera rettangolare.*

Nelle nostre ultime figure rappresentanti divisioni del cubo abbiamo svariati esempi di rettangoli che si presentano come facce dei parallelepipedi costruiti.

Noteremo che tanto il rombo quanto il rettangolo hanno come caso speciale il quadrato, figura più simmetrica. Il rombo ha tutti eguali i lati, e gli angoli eguali a coppie, essendo eguali gli angoli opposti e diseguali gli adiacenti: per il rettangolo si ha qualcosa di analogo; solo gli angoli sono in questo caso sostituiti dai lati, e i lati dagli angoli.

C'è però una differenza importante. Il lato del rombo può essere di qualunque lunghezza ci piaccia, ma gli angoli adiacenti del rombo sono supplementari; quindi il rombo è determinato, e si può costruire, conoscendo la lunghezza di un lato e l'ampiezza di un angolo. L'angolo del rettangolo è fisso in ampiezza, è un angolo retto; d'altra parte non c'è alcuna relazione fra due lati adiacenti, e si può costruire un rettangolo coi lati eguali a due segmenti quali siensi: esso è allora interamente determinato eccetto che nella posizione, vale a dire tutti i rettangoli ottenuti in tal modo sono congruenti.

Si dice che un rettangolo è *contenuto* dai suoi due lati adiacenti. Così che il rettangolo azzurro nella figura del cuneo è contenuto dalla diagonale di una faccia e da uno spigolo del cubo.

PERPENDICOLARITÀ.

§ 18. **Rette e piani perpendicolari.** — Quando abbiamo tagliato il cubo in due cunei, abbiamo visto che la sezione (azzurra) era un rettangolo. Quindi lo spigolo (1, 5), lungo il quale tagliammo e che sapevamo essere perpendicolare ai due spigoli della faccia 6 che lo incontrano, sembra essere perpendicolare pure alla diagonale che incontra della faccia 6.

Possiamo agevolmente far vedere che non solo così sembra, ma così è veramente. Chiamiamo A il punto (1, 5, 4) su uno spigolo, e B il punto (1, 5, 6), e siano C e D gli altri vertici della sezione (azzurra), la quale sarà quindi $ABCD$. Mettiamo le stesse lettere, accentate, per l'altro cuneo. Possiamo allora capovolgere il secondo cuneo, così che D' venga a sovrapporsi a B, A' a C, C' ad A: l'angolo $C'D'A'$ è così sovrapposto all'angolo ABC, e i due angoli saranno eguali. Si può ora far rotare il secondo cuneo attorno allo spigolo $A'D'$, così che la faccia 4 coincida colla 6 del primo cuneo. Questo è allora collocato al di sopra del secondo per modo che le loro due facce quadrate 2 e 1 stanno sullo stesso piano con un lato comune avente un estremo nel punto che abbiamo chiamato B per l'una figura e D' per l'altra; perciò i lati BA e $D'C'$, perpendicolari entrambi al lato comune, giacciono sopra un'unica retta. Gli

angoli eguali $C'D'A'$ e ABC sono ora i due angoli formati dalla retta $ABD'C'$ colla retta BC, così che ciascuno è un angolo retto; il che dimostra che *lo spigolo* (1, 5) *o* AB *è perpendicolare alla diagonale* BC *della faccia* 6, come già prima a occhio ci era sembrato.

Troverete, e potrete dimostrare precisamente nello stesso modo che, tagliando qualunque parallelepipedo rettangolo in due cunei eguali con una sezione passante per due spigoli opposti, questa sezione è in ogni caso un rettangolo. Si possono imaginare parallelepipedi rettangoli ottenuti dal nostro cubo facendo in modo che abbiano sempre uno spigolo disposto lungo (1, 5) e una faccia parte della 6. Quando tagliamo uno di tali parallelepipedi in due cunei, la sezione sulla faccia 6 sarà una retta di essa faccia, e possiamo fare che sia una retta qualunque scegliendo in modo adatto il parallelepipedo. Perciò (1, 5) *è perpendicolare a qualunque retta della faccia* 6 *che lo incontra.* Quando una retta e un piano sono in condizioni come queste, l'una rispetto all'altro, si dicono *perpendicolari. Lo spigolo* (1, 5) *è dunque perpendicolare alla faccia* 6 *del cubo.* E, data la perfetta regolarità di un cubo, ne segue che *ogni spigolo del cubo è perpendicolare a qualunque faccia che lo incontri senza contenerlo.*

Se disponiamo lo spigolo (1,5) verticalmente, il piano 6 rimane orizzontale: perciò *una retta verticale e un*

piano orizzontale sono perpendicolari; o, ciò che è lo stesso, *una retta verticale e una orizzontale che si incontrino sono perpendicolari.*

IL TRIANGOLO ISOSCELE.

§ 19. **Definizione del triangolo isoscele.** — *Una figura piana trilatera ABD, come quella della figura 46, con due lati eguali AB, AD, è detta triangolo isoscele.*

Isos è voce greca che significa eguale: triangolo è una figura piana con tre angoli, uno in A, uno in B, uno in D: A, B, D si chiamano *vertici* del triangolo, e il lato passante per due di essi dicesi *opposto* al terzo. Per distinguere dagli altri due il lato diseguale BD gli si dà talvolta il nome di *base:* l'angolo (convesso) opposto si chiama *angolo al vertice:* gli altri (convessi) vengono detti *angoli alla base.*

Costruzione d'un triangolo isoscele. — La fig. 46 ci indica il modo di *costruire un triangolo isoscele sopra una base data e con lati di data lunghezza.* Non abbiamo che a prendere per base BD e fare che i raggi dei circoli siano eguali alla lunghezza data; ABD è allora il triangolo voluto. La fig. 49 c'insegna a piegare un tale triangolo.

È manifesto, da ciò che si era detto riguardo all'intersezione di circoli, che BA dev'essere maggiore

della metà di BD; a parte questa restrizione, la base ed i lati sono del tutto arbitrari. *Se il lato è uguale alla base, il triangolo si dice equilatero, cioè a lati eguali.*

Non tutti i triangoli sono isosceli; se, in luogo di prendere eguali i raggi dei due circoli, li prendiamo diversi l'uno dall'altro e da BD, e i circoli s'incontrano in E, avremo che BDE è un triangolo non isoscele (fig. 67).

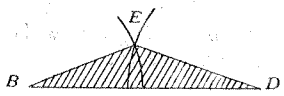


Fig. 67.

Angoli d'un triangolo isoscele. — Come si era visto piegando il rombo, *gli angoli alla base d'un triangolo isoscele sono eguali l'uno all'altro,* e ciascuno è la metà del corrispondente angolo del rombo. D'altra parte si può far vedere facilmente che *un triangolo avente due angoli eguali è un triangolo isoscele.*

ESERCIZI.

1. Fate vedere che la retta congiungente il punto medio della base di un triangolo isoscele col vertice è perpendicolare alla base.

2. Fate vedere che gli angoli formati dalla base d'un triangolo isoscele coi prolungamenti dei lati sono eguali.

3. Fate vedere che il triangolo ABC della fig. 46 è isoscele.

4. Se il foglio è piegato così che due punti B ed M siano sovrapposti a due punti C ed N; e BM e CN s'incontrano in A, fate vedere che A sta sulla piega e che ABC è un triangolo isoscele.

Fate vedere pure che, se CM e BN s'incontrano in un punto O, questo giace sulla piega, e il triangolo OBC è isoscele.

5. Piegate un triangolo isoscele ABC: bisecatene il lato AB in N e il lato AC in M, piegate BM e CM, i quali si taglino in O, piegate AO e fate vedere che AO taglia BC ad angolo retto.

Area del triangolo. — Un triangolo, analogamente a un rombo, divide il piano in due regioni delle quali una, ombreggiata nella fig. 67, rimane invariata per quanto noi consideriamo porzioni di piano sempre maggiori, e si dice *racchiusa* dal circuito del triangolo: questa parte viene detta l'*area del triangolo*: i lati del triangolo formano insieme il suo perimetro: ogni punto dell'area che non stia sul perimetro si dice *interno al triangolo*, e ogni punto dell'altra regione del piano, pure non appartenente al perimetro, dicesi *esterno al triangolo*.

Alla fig. 46, se si piega il foglio lungo BD, i triangoli isosceli ABC e CBD si sovrappongono, e le loro aree, che coincidono, saranno eguali. Poichè queste due aree prese insieme formano l'area del rombo, ognuna d'esse varrà la metà dell'area del rombo stesso.

ESERCIZI.

1. Mostrate in che modo si possa disegnare e piegare un triangolo isoscele data la lunghezza dei suoi lati eguali e l'ampiezza dell'angolo compreso fra essi.

2. Indicate il modo di disegnare e piegare un triangolo isoscele data la lunghezza de' suoi lati eguali e l'ampiezza de' suoi angoli eguali.

Angoli d'un triangolo isoscele. — Ricorderete che ci siamo accertati mediante la piegatura che gli angoli adiacenti del rombo sono supplementari; ne segue che i *tre angoli di un triangolo isoscele valgono due angoli retti;* giacchè i due angoli alla base equivalgono all'angolo del rombo adiacente all'angolo al vertice del triangolo. Ci possiamo assicurare del fatto in maniera diversa, piegando nel seguente modo.

Pieghiamo un triangolo isoscele ABC, e bisechiamo BC (fig. 68) in L. Pieghiamo il disegno in modo da sovrapporre A ad L. È facile vedere che, se pieghiamo in dentro B così da portarlo in L, NB coinciderà con NL e l'angolo in B sarà sovrapposto all'angolo NLB. Similmente dall'altra banda l'angolo in C potrà esser fatto coincidere con MLC. In tal modo i tre angoli del triangolo sono sovrapposti ai due angoli retti di vertice L.

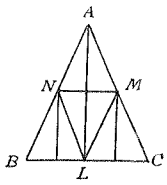


Fig. 68

ESERCIZIO.

Disegnate o piegate un triangolo isoscele, date la lunghezza della sua base e l'ampiezza del suo angolo al vertice.

IL TRIANGOLO EQUILATERO.

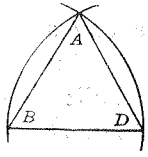


Fig. 69.

§ 20. **Disegnare un triangolo equilatero.** — Se nella fig. 46 prendiamo i raggi dei due circoli eguali a BD, allora ABD è un triangolo equilatero:

questo è il modo migliore di disegnare un triangolo equilatero (fig. 69).

Piegare un triangolo equilatero. — Piegate una linea retta (1) e segnate su di essa due tratti in B e C per modo che BC abbia una data lunghezza. Bisecate BC ad un angolo retto con una retta (2): tenendo la carta piegata lungo BC, portate in su il margine, tenendo fisso B, fino a che C cada sulla (2): la nuova piega sia (3) e sia A il punto a cui C era sovrapposto. Ripiegate in fuori il foglio lungo BA sul margine BC. Aprendo ora la carta, piegate AC perpendicolare alla (3). ABC è il triangolo equilatero richiesto.

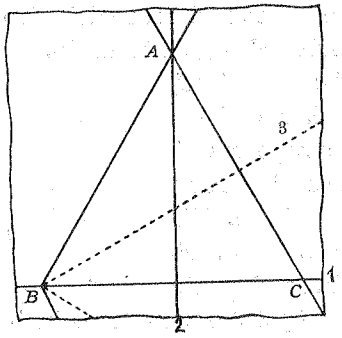


Fig. 70.

È molto utile fare anche un' altra costruzione di triangolo equilatero (fig. 71), senza pieghe nel triangolo stesso, come ve ne hanno invece in quello della costruzione precedente (fig. 70).

Quest' altra costruzione si fonda sull' eguaglianza degli angoli del triangolo equilatero e sul fatto che tutti i triangoli equilateri hanno angoli eguali: l'angolo di un triangolo equilatero vale infatti i due terzi di un angolo retto.

Pieghiamo le linee nell'ordine indicato nella fig. 71. La (2) è perpendicolare alla (1), e le linee (3), (5), (7) e (9) sono perpendicolari alla (2). La distanza fra (3) e (4) è presa ad arbitrio, ed è eguale a quella fra (4) e (5); tutte e tre queste rette sono piegate vicino all'orlo del foglio, giacchè occorrono soltanto per trovare l'angolo del triangolo. La retta (6) è piegata come nella fig. 70, portando l' intersezione di (2) e (3), segnata con una croce sulla figura, sopra la linea (4) mentre si tiene fisso il punto d'incontro di (2) con (5). Per ottenere la (8) si deve ripiegare il foglio in fuori sulla (5), essendo (1) la piega mediana, e ottenere la (7), e congiungere poi l' intersezione di (7) e (2) con l'intersezione di (6) e (1). Le rette (6) e (8) formano allora l'angolo di un triangolo equilatero, e qualunque

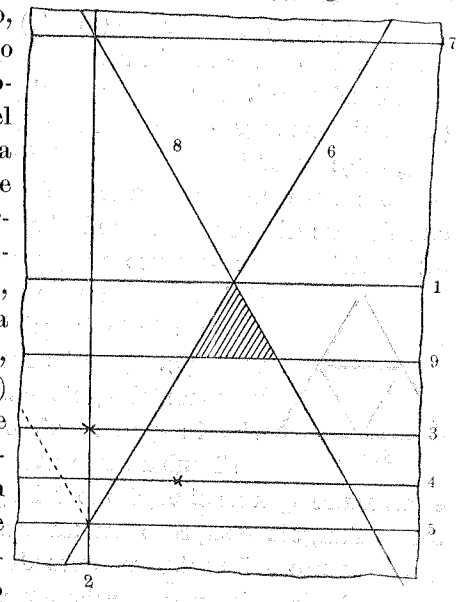


Fig. 71.

retta (9) perpendicolare a (2) dà con esse un triangolo equilatero.

Questa costruzione è specialmente utile se si deve coprire il foglio di una rete di triangoli equilateri, come spesso ci occorrerà di fare. Disegnato un triangolo equilatero fra le rette (1) e (9) secondo la fig. 71, è facilissimo costruire in seguito tutto un reticolato di tali triangoli. Per questo si pieghi il foglio lungo (9), e si disponga accuratamente il margine ottenuto lungo (6): si ottiene così un secondo triangolo equilatero avente un lato comune col primo e posto alla sua destra: disponendo il medesimo margine (9) lungo (8) si ottiene non soltanto un triangolo analogo verso sinistra, ma anche un altro di sotto, formato dalle due pieghe ultime e dalla retta (9). Questi quattro triangoli formano un triangolo equilatero grande diviso in quattro piccoli (fig. 72).

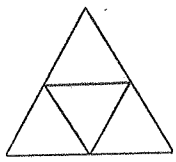


Fig. 72.

Si può andare avanti a questo modo, e costruire quanti si vogliono triangoli, sempre bisecando l'angolo compreso fra un lato di un triangolo già costruito e il prolungamento di un altro lato. Si può così ricoprire una porzione qualunque di piano con triangoli equilateri tutti connessi fra loro.

ESERCIZI.

Fate vedere che:

1. Gli angoli di un triangolo equilatero sono eguali, e ognuno vale due terzi di angolo retto.

2. La retta congiungente il punto medio di un lato di un triangolo equilatero col vertice dell'angolo opposto è perpendicolare al lato e biseca l'angolo.

3. Le rette congiungenti un vertice di un triangolo equilatero col punto medio del lato opposto s'incontrano in un punto: la circonferenza che ha questo punto per centro e passa per uno dei vertici passa anche per gli altri due. (Per far veder questo prendete i punti medi L, M, N di BC, CA, AB, e piegate AL e BM che s'incontrino in O. Piegando allora lungo AL, B si sovrappone a C, e M ad N, mentre O è fisso; perciò OM coincide con ON e quindi ON prolungato oltre O giace su OB e passa per C).

L'ESAGONO REGOLARE.

§ 21. **Costruzione dell'esagono regolare.** — Se, dopo aver costruito come prima tre triangoli equilateri posti tutti fra le rette (1) e (9) della fig. 71, pieghiamo il foglio lungo (1) e facciamo un'altra piega all'infuori sopra (9), otteniamo un triangolo equilatero posto sopra il primo; piegando poi per i suoi vertici e per quelli posti sopra (1) degli altri triangoli, si avranno sei triangoli equilateri eguali, disposti intorno al vertice del primo triangolo che giace sopra (1), A, e ricoprenti una porzione di piano, tratteggiata nella fig. 73, la quale è separata dal rimanente del piano dai lati dei sei triangoli che si oppongono ad A. Si dice che questi sei segmenti eguali limitano un *esagono*

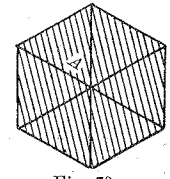


Fig. 73.

regolare (dal greco *hex* = sei, *gonion* = angolo); la parte tratteggiata del piano è detta la sua *area, limitata* dai lati dell'esagono. Gli angoli dell'esagono sono gli angoli compresi fra i suoi lati adiacenti, ed ognuno vale due volte un angolo di triangolo regolare, come si vede subito guardando la figura. I sei vertici di questi angoli si chiamano *vertici* dell'esagono.

ESERCIZI.

1. Fate vedere che si può descrivere una circonferenza passante per i vertici di un esagono regolare e descrivetela (circonferenza circoscritta).

2. Iscrivete un esagono regolare in un circolo dato.

3. Piegate o disegnate per i vertici di un esagono regolare le perpendicolari ai lati dei sei triangoli costituenti l'esagono regolare i quali non sono lati dell'esagono. Verificate che le perpendicolari ci dànno un nuovo esagono regolare.

In questo sono inscritti l'esagono regolare di prima e il suo circolo circoscritto (cfr. fig. 56), così che l'area del circolo è compresa fra quella dei due esagoni, uno dei quali è iscritto nel circolo e l'altro è ad esso circoscritto.

§ 22. **Il triangolo rettangolo isoscele.** — Se il rombo della fig. 46 è un quadrato, il triangolo isoscele ABD ha un angolo retto in A, e ognuno degli angoli alla base vale un mezzo retto: un tale triangolo dicesi rettangolo isoscele.

Piegare un triangolo rettangolo isoscele sopra una base data. — Piegate una perpendicolare (2) alla base BD da uno dei suoi estremi D, e bisecate l'angolo fra questa perpendicolare e la base facendo coincidere le due rette e premendo (fig. 74); in seguito piegate (4) perpendicolare alla piega (3) e passante per l'estremo B: questa incontra la (3) nel vertice A del triangolo cercato.

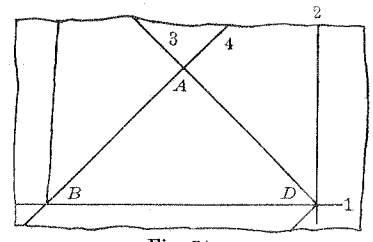


Fig. 74.

ESERCIZI.

1. Fate vedere che la retta congiungente il vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo isoscele col punto medio della base divide il triangolo dato in altri due triangoli rettangoli isosceli.

2. Disegnare un triangolo rettangolo isoscele sopra una data base.

IL TETRAEDRO DI PUNTA.

§ 23. **Taglio del tetraedro da una punta del cubo.** — Prendiamo la nostra figura di cubo, e vediamo come sia possibile ottenere su di esso un triangolo rettangolo isoscele i cui lati eguali sono spigoli

del cubo. Prenderemo per base una diagonale di una faccia, di (1), e per angolo al vertice opposto a questa il punto (1,3,4). C'è qualche altro triangolo analogo, collo stesso vertice, sulla superficie del cubo? Ve ne sono altri due, uno in ciascuna delle facce passanti per il punto (1,3,4), (fig. 75).

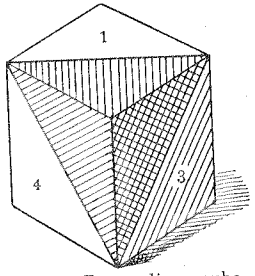


Fig. 75. Punta di un cubo.

Che cosa si può dire riguardo alla posizione delle basi di questi tre triangoli? Esse giacciono tutte nello stesso piano, giacchè s'incontrano a due a due: sono eguali, essendo tutte diagonali di facce, e formano quindi un triangolo equilatero.

Dato che le tre basi giacciono in un piano, noi possiamo tagliare secondo questo piano il cubo, e portar via così la punta del cubo. Fatto questo, che sorta di figura avremo ottenuto? Ne avete mai vista una così? È una specie nuova di figura.

Quanti sono i suoi vertici? Quattro, come le facce. Noi la diciamo un *tetraedro*, dalle due parole greche *tetra*, quattro, e *hedron*, faccia.

E lo chiameremo *tetraedro di punta*, rappresentando esso una punta di un cubo. Si può costruire la figura del tetraedro di punta e della parte di cubo che rimane dopo che quello ne è stato tagliato. La fig. 76 dà il modello del primo, la fig. 77 del secondo solido, la fig. 75 ne mostra le due figure.

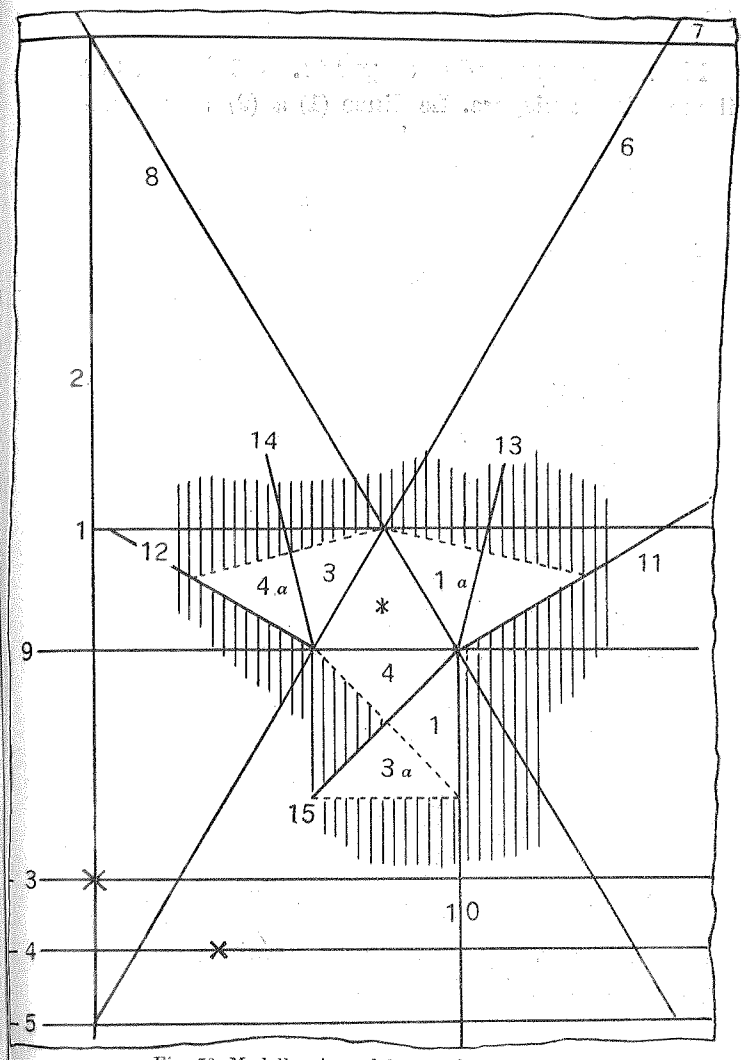


Fig. 76. Modello piano del tetraedro di punta.

Figura del tetraedro di punta. — La fig. 76 dà il modello da piegare. Le linee (1) a (9) sono come

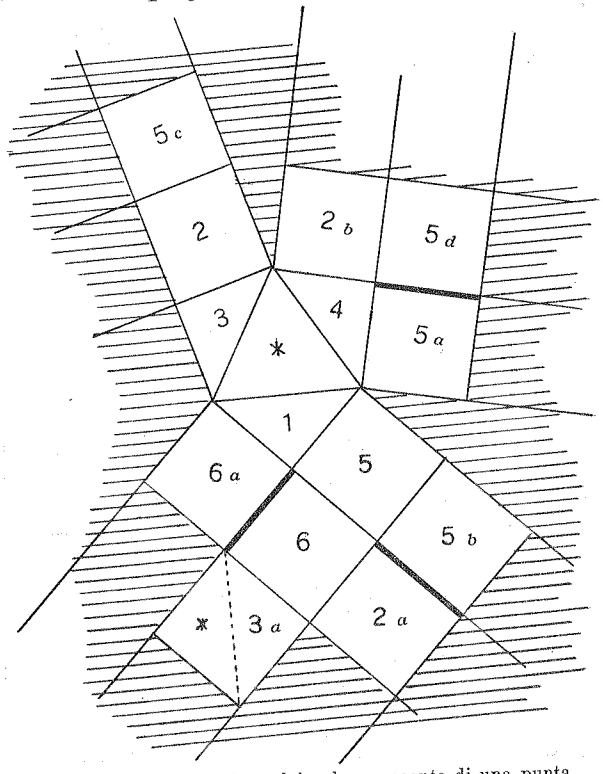


Fig. 77. Modello piano del cubo mancante di una punta.

quelle della fig. 71, e servono a costruire il triangolo equilatero sui lati del quale verranno poi disposti i

triangoli rettangoli isosceli secondo la figura 74. Le linee 13, 14, 15, come le linee punteggiate, si piegano meglio dopo aver tagliato secondo le (10), (11), (1), (12), (6), (3), in modo da non piegare il modello. È bene tagliare due tetraedri insieme, continuando il modello simmetricamente oltre la linea (1); molte delle linee servono per entrambi i modelli, e noi avremo bisogno di quattro tetraedri di punta.

La fig. 84 mostra la figura costruita. Essa ha:

Vertici	4	Spigoli	6
Facce	4		2
	8		8

Così che di nuovo *la somma del numero dei vertici e di quello delle facce supera di due il numero degli spigoli.*

Cubo con una punta tagliata. — Vediamo ora se accade lo stesso per la parte di cubo rimasta dopo che abbiamo tagliato il tetraedro. Questa è una figura solida irregolare, con tre facce quadrate e tre triangolari, due delle quali sono triangoli rettangoli isosceli e la terza è un triangolo equilatero. La fig. 77 insegna a disegnarne il modello: per semplicità sono state omesse le rette di costruzione. Si piega dapprima il triangolo equilatero secondo la fig. 71 e i

triangoli rettangoli sui suoi lati come alla fig. 74; i quadrati si hanno al modo solito.

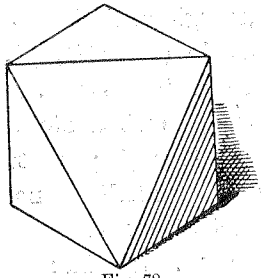


Fig. 78.

La fig. 78 mostra il modello montato; esso ha:

Vertici	7	Spigoli	12
Facce	7		2
	14		14

Guardate la vostra figura di cubo privo di una punta: è assai irregolare e acquisterebbe un po' più di regolarità se tagliassimo anche la punta (1, 5, 6).

Che cosa otteniamo allora? Un solido avente un margine tagliente, una carena, lungo la diagonale della faccia 1, che avevamo tagliata da principio, e pog-

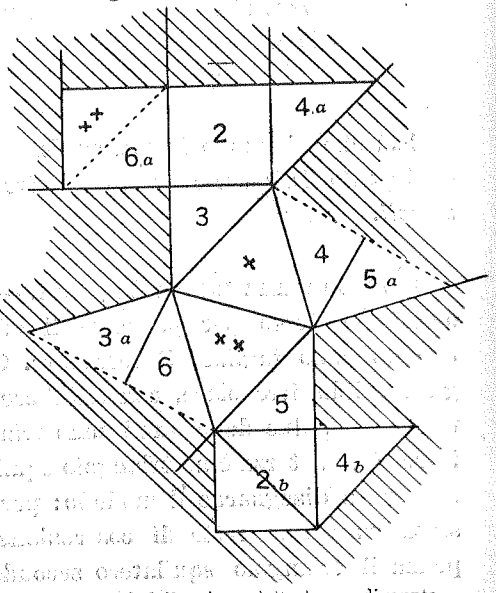


Fig. 79. Modello piano della barca di punta.

giante sopra una base quadrata, la faccia 2. Le altre facce sono tutte triangoli, quattro triangoli rettangoli isosceli, e due triangoli equilateri. La fig. 79 dà il modello per la costruzione di questo solido [1], e la figura 80 mostra la figura finita, colla carena in basso: vedrete che assomiglia abbastanza a una barca, e la chiameremo la barca di punta.

Essa ha:

Vertici	6	Spigoli	11
Facce	7		2
	13		13

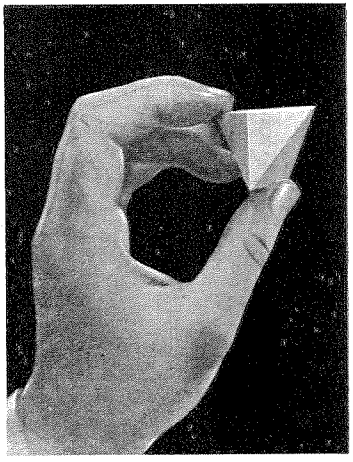


Fig. 80 Battello di punta.

Con due tetraedri di punta posti con le loro facce equilatere sulle due facce equilatere della barca si può ricostruire il cubo originario.

Doppio tetraedro. — Tagliamo ora dal cubo un terzo tetraedro di punta, dal vertice (2, 4, 5). Che

[1] Omesse le linee di costruzione: il triangolo equilatero con due asterischi è ottenuto da quello che ne ha uno solo piegando sul lato comune, e piegando poi in fuori i lati del secondo triangolo lungo quelli del primo.

cosa rimane del cubo? Da principio si può pensare che la figura è ben irregolare, ma vedrete che ciò non è.

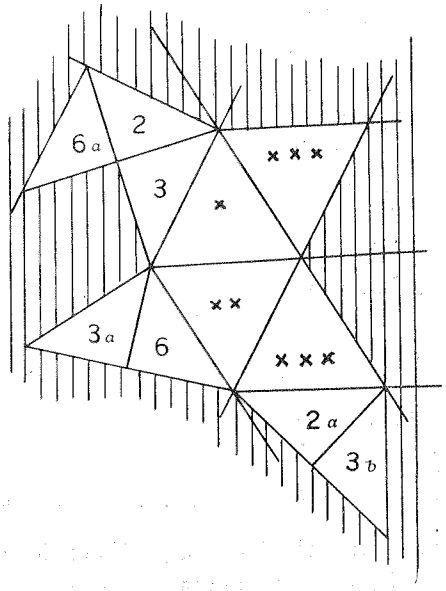


Fig. 81. Modello piano del doppio tetraedro.

La fig. 81 ne dà il modello [1] e la 82 la figura finita. — Tenendo questa come alla fig. 82 col vertice (2, 3, 6) in basso e col punto d'incontro dei tre triangoli equilateri in alto, vedrete che non è punto così

[1] Vedi la nota precedente.

irregolare come sembrava a tutta prima che essa dovesse essere.

Essa ha:

Vertici	5	Spigoli	9
Facce	6		2
	11		11

Le tre facce superiori sono triangoli equilateri, le tre del basso triangoli rettangoli isosceli rimasti attorno all'ultimo vertice del cubo. Formano la base

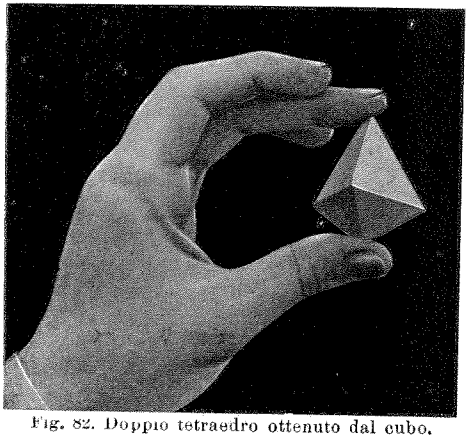


Fig. 82. Doppio tetraedro ottenuto dal cubo.

equilatera dell'ultimo tetraedro di punta tre spigoli non concorrenti nel vertice superiore nè nell'inferiore, e questo triangolo equilatero incontra anche lungo uno spigolo ognuno degli altri tre. Questi quattro triangoli equilateri limitano essi pure un

tetraetro, ma questo non assomiglia al tetraedro di punta, poichè tutte le sue facce sono equilatere.

Quindi *la nostra figura è un doppio tetraedro in cui i due tetraedri sono congiunti per le basi.*

Tetraedro regolare. — Se portiamo via l'ultimo tetraedro di punta del cubo, rimaniamo con questo

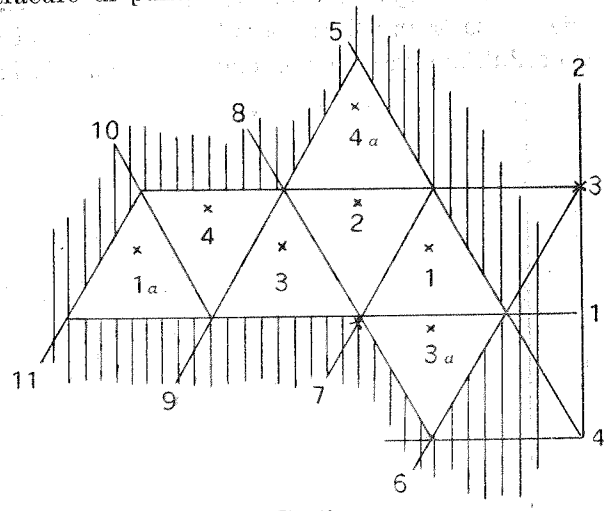


Fig. 83.

nuovo tetraedro che viene detto *tetraedro regolare.* La fig. 83 ne dà il modello e la 84 mostra la figura costruita.

Nella fig. 83 sono date le linee di costruzione. È stato applicato il principio della fig. 71 per costruire

le rette (5) e (6); tutte le linee successive si costruiscono meglio come bisettrici di angoli fra linee già descritte e le linee (1) e (3): per esempio la (7) viene piegata mediante la (3) che è portata sulla (5). Le faccie del tetraedro regolare sono segnate con 1*, 2*, 3*, 4*, gli asterischi significando come prima che le

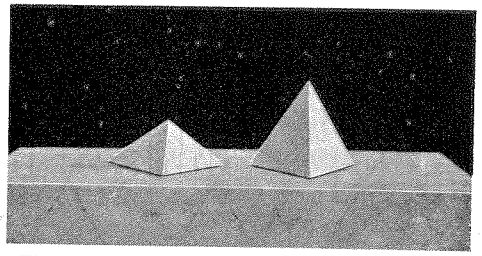


Fig. 84. Tetraedro di punta e tetraedro regolare.

faccie sono *sezioni* del cubo, sono cioè ottenute tagliando nella parte interna del cubo stesso.

Alla fig. 84 si vedono il tetraedro di punta e il tetraedro regolare tagliati dallo stesso cubo: il tetraedro regolare è più alto dell'altro, ed ha un vertice più aguzzo in cima. Non abbiamo che a porre su ogni faccia del tetraedro regolare un tetraedro di punta aderente al primo colla sua faccia equilatera per riavere il cubo da cui eravamo partiti.

Di tutti questi solidi che abbiamo ottenuto dal cubo *il tetraedro regolare è il primo le cui facce siano tutte congruenti. Vedete pure che in ogni vertice concorre*

lo stesso numero di facce disposte nello stesso modo. Perciò il tetraedro con quattro facce equilatere dicesi *regolare*, come è regolare il cubo.

Riunione di due tetraedri regolari. — *Un solido a facce congruenti non è necessariamente regolare.* Ne potete costruire uno colla massima facilità: un doppio

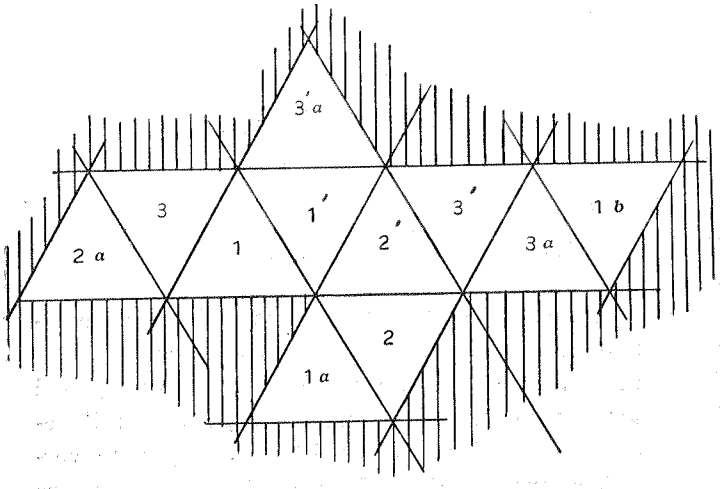


Fig. 85. Modello piano di un doppio tetraedro regolare.

tetraedro ottenuto con due tetraedri regolari è un tal solido. Se ne ottiene il modello piegando il foglio a triangoli equilateri, come alla fig. 81, poi ritagliandoli nel modo voluto. Il modello tagliato è dato alla fig. 85 e il solido finito alla fig. 86.

Due dei vertici, lo vedete, sono molto più acuminati degli altri tre, solo tre facce s'incontrano nei vertici aguzzi e quattro invece nei rimanenti: questo non è un solido regolare.

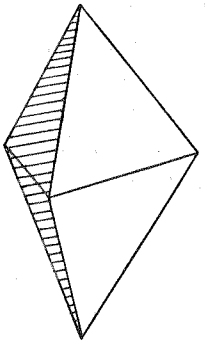


Fig. 86. Doppio tetraedro regolare.

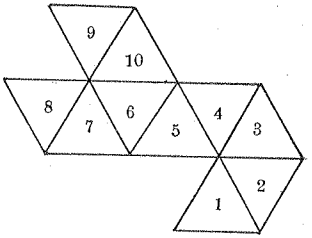


Fig. 87 a.

ESERCIZI.

Mettete assieme cinque tetraedri regolari a formare un solido le cui facce sono tutte congruenti, ma che non è re-

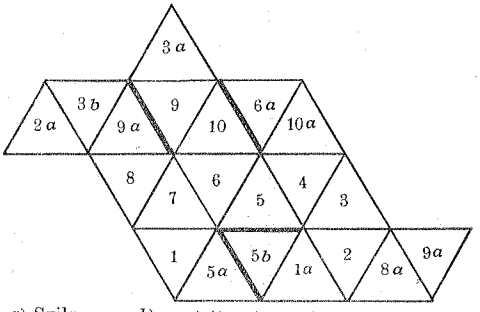


Fig. 87. *a*) Sviluppo e *b*) modello piano di una losanga di Bimbo.

golare. Fate un modello piegato di questo solido. (Losanga di Bimbo, fig. 87 *a*, 87 *b*).

Contatene i vertici, le facce, gli spigoli.

IL TRIANGOLO.

§ 24. **Triangolo rettangolo, ottusangolo, acutangolo.** — Abbiamo detto qualcosa intorno a triangoli isosceli ed equilateri, e abbiam visto che non tutti i triangoli sono o equilateri o isosceli. Un triangolo rettangolo isoscele è, come abbiamo veduto, la metà di un quadrato, ed è chiaro che la metà di un rettangolo, ottenuta tagliando questo lungo una diagonale, è anche un triangolo con un angolo retto, e non è isoscele. *Gli angoli di un triangolo sono gli angoli (convessi) formati dai lati del triangolo l'uno coll'altro.*

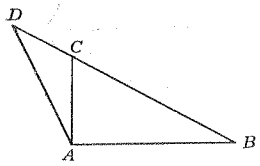


Fig. 88.

Un triangolo con un angolo retto si dice *triangolo rettangolo* (fig. 88). Se è ABC un triangolo rettangolo coll' angolo retto in A, e si prolunga la base BC fino a un punto qualunque D; congiunto A con D, si ottiene un triangolo DAB, il quale ha in A un angolo maggiore del retto, cioè un angolo ottuso; un tale triangolo dicesi *ottusangolo*.

Un triangolo nè rettangolo nè ottusangolo viene detto triangolo *acutangolo;* tutti gli angoli di esso sono acuti.

Angoli di un triangolo. — Guardando la vostra figura, vedrete che tanto il triangolo rettangolo da

voi costruito quanto l'ottusangolo hanno due angoli acuti per ciascuno. È necessariamente così? Certo: ora lo proveremo. Ricorderete di aver dimostrato che ognuno degli angoli eguali di un triangolo isoscele è acuto; questo ci servirà a dimostrare che *ogni triangolo ha almeno due angoli acuti.*

Infatti in un triangolo o gli angoli sono a coppie eguali, nel qual caso ogni angolo della coppia è acuto, come abbiamo visto, o uno degli angoli è maggiore dell'altro.

In quest'ultimo caso sia B il vertice dell'angolo maggiore, C il vertice dell'altro, e A quello del terzo angolo del triangolo. Se allora, piegando, portiamo C a coincidere con B, l'angolo in C si sovrapporrà a una parte dell'angolo ABC, di cui un lato è BC, mentre l'altro lato dell'angolo in C giace nell'interno del triangolo ABC, e taglierà quindi AC in un punto che diremo E. Allora EBC è un triangolo con due angoli eguali ECB ed EBC, ognuno dei quali vale quindi meno di un retto. Dunque di ogni coppia di angoli di un triangolo almeno uno è acuto, e perciò al più uno degli angoli di un triangolo può essere maggiore di un retto.

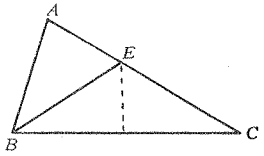


Fig. 89.

Somma di due angoli di un triangolo. — È chiaro che la somma di due angoli di un triangolo non

ottusangolo è sempre minore di due angoli retti, ma non è chiaro che l'angolo ottuso insieme con uno degli acuti non possa valere due retti. La cosa è tuttavia veramente impossibile, e si può dimostrarlo come segue.

TEOREMA.

La somma di due angoli di un triangolo è minore di due angoli retti.

Pieghiamo un triangolo qualunque, anzi, per ciò che si è detto prima, sarà meglio farlo ottusangolo

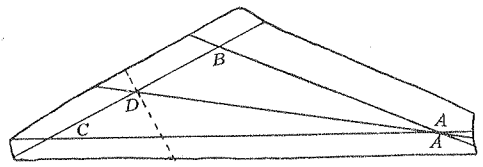


Fig. 90.

(fig. 90). Presi due, quali che siano, dei suoi angoli, proveremo che sommano, presi insieme, a meno di due retti: si può scegliere l'angolo ottuso e quello dei due acuti che appare più ampio. Ripiegato in sotto l'orlo lungo il lato congiungente i vertici B e C dei due angoli che abbiamo scelto, bisechiamo il lato stesso ad angolo retto. Sia D il punto di bisezione: facciamo una piega passante per esso e per il vertice rimanente A del triangolo.

Quest'ultima retta forma angoli supplementari col lato bisecato, così che solo uno di questi angoli può essere maggiore di un retto: sia ADB non maggiore di un angolo retto: sarà ADC non minore di un angolo retto: ADB e ADC formano insieme due retti. Tagliamo ora accuratamente il foglio lungo AD. Te-

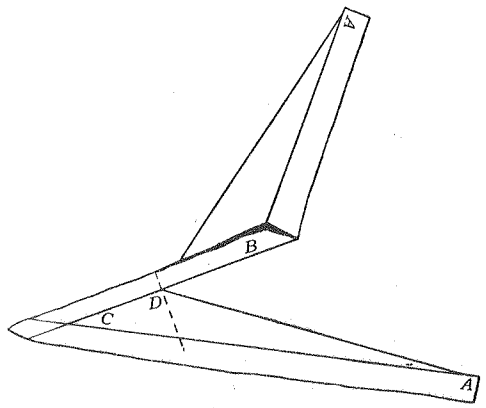


Fig. 91.

nendo l'orlo piegato lungo BC, giriamo in sotto il triangolo ADB, così che esso giaccia a faccia in giù dall'altra parte di DB (fig. 91). Allora esso giace tutto dalla stessa banda della perpendicolare che bisecava BC, cioè dalla banda opposta a C. Se dunque ora noi pieghiamo la parte di foglio che sta sotto lungo questa secante, così che la faccia di prima torni di nuovo a voltarsi in su, DB giacerà proprio

lungo DC, C sovrapposto a B, e l'angolo BDA sarà posto dalla banda di DC da cui non sta l'angolo CDA; ed essendo di questo il supplemento, il suo lato DA sarà in linea retta col lato DA dell'angolo CDA. Perciò AC, BA e ADA formano ora un triangolo (fig. 92); così che gli angoli ABD e ACD non dànno un angolo concavo, ma costituiscono insieme uno degli

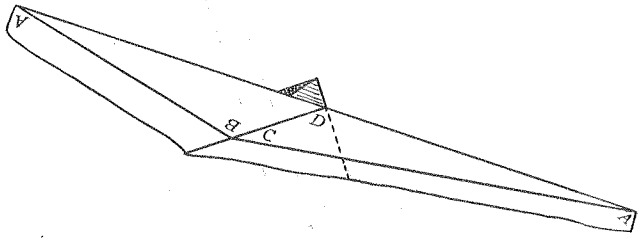


Fig. 92.

angoli di questo triangolo: la loro somma è perciò minore di due angoli retti. Il che dimostra il nostro teorema che *due angoli di un triangolo dànno insieme meno di due angoli retti.*

C'è un solo modo diverso di enunciare la stessa proprietà, ed è questo: *Se si prolunga un lato di un triangolo, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli interni opposti.*

ESERCIZIO.

In un triangolo ABC una perpendicolare da A sopra la retta BC cade o no entro il triangolo, a seconda che gli angoli in B e C sono entrambi acuti oppure no.

Abbiamo visto che un triangolo isoscele ha eguali gli angoli opposti ai lati eguali, possiamo ora dimostrare che in qualunque triangolo avente due lati diseguali al lato più lungo è opposto un angolo più ampio di quello opposto al più corto.

TEOREMA.

In ogni triangolo il maggior angolo è opposto al maggior lato.

Sia AB il lato maggiore (fig. 93) e sia il minore AC. Pieghiamo AC sopra AB; allora C cadrà fra A e B, e sia D il punto di AB su cui esso cade. La piega biseca l'angolo CAB e perciò incontra il segmento BC in un punto P, e CP è sovrapposto a PD, e l'angolo ACB all'angolo ADP, che è angolo esterno del triangolo PBD, maggiore quindi dell'interno opposto DBP, cioè maggiore di ABC. Dunque l'angolo ACB opposto al maggior lato è più grande dell'angolo ABC opposto al lato minore.

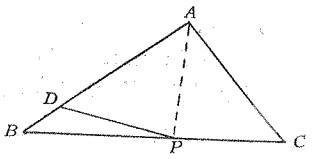


Fig. 93.

Lati di un triangolo. — Se d'altra parte abbiamo qualche cognizione riguardo agli angoli di un triangolo, possiamo dir subito qualcosa intorno ai suoi lati: se due degli angoli sono eguali, abbiamo visto che i lati ad essi opposti sono pure eguali; se due

fra gli angoli sono diseguali, il lato opposto all'angolo maggiore dev'essere più lungo di quello opposto all'angolo minore, giacchè è impossibile che sia eguale ad esso o minore: se infatti si desse uno di questi due casi il lato opposto non potrebbe essere il maggiore. Adunque *in un triangolo al maggior angolo si oppone il maggior lato.*

TEOREMA.

La somma di due lati di un triangolo è maggiore del terzo lato.

È manifestamente solo necessario provare che *il maggior lato di un triangolo è minore degli altri due presi insieme.* Sia BC il lato maggiore (fig. 94) ed A il vertice ad esso opposto. Pieghiamo il foglio in modo che BA giaccia lungo BC: allora, essendo BC maggiore di BA, A giacerà sopra un punto D del segmento BC tale che AD sarà perpendicolare alla piega e ripiegato su se stesso. La piega, bisettrice dell'angolo ABC, incontra AC in un punto E e l'angolo EAD è sovrapposto a EDA, che è parte di CDA, cosicchè EAD, cioè CAD, è minore di CDA. Perciò, nel triangolo CAD il lato AC, opposto all'angolo maggiore, è maggiore del lato DC, opposto

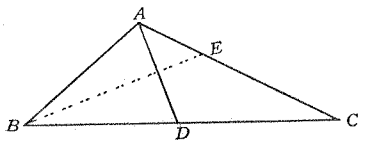


Fig. 94.

all'angolo minore. Perciò, se tagliamo il foglio lungo AD, e, dopo aver ripiegato BA su BD, pieghiamo ancora CA su CB, il punto A cadrà fra B e D e BA e AC insieme non solo ricopriranno interamente BC, ma sovrabbonderanno, così che essi valgono fra tutti e due di più di BC, come si era detto.

ESERCIZIO.

Quale fra i triangoli seguenti è acutangolo, quale ottusangolo, quale rettangolo?

Un triangolo equilatero; ognuno dei triangoli in cui un triangolo equilatero è diviso dalla congiungente il punto medio di un lato col vertice opposto; ognuno dei due triangoli in cui uno dei precedenti viene diviso da una retta che parta dallo stesso vertice di prima e bisechi il lato opposto.

Area di un triangolo. — Un triangolo, come già abbiamo veduto (§ 19), ha un'area. Secondo la definizione di quell'area e degli angoli del triangolo, è chiaro che *la parte interna di un triangolo è interna a ciascuno degli angoli del triangolo.*

TRIANGOLI CONGRUENTI.

§ 25. **Dimostrazione della congruenza di due triangoli.** — Nel capitolo precedente abbiamo spesso avuto a che fare con due o più triangoli ritagliati da

un triangolo unico e a mostrare che tali triangoli potevano venir sovrapposti l'uno all'altro. Due triangoli suscettibili di essere sovrapposti diconsi *congruenti o eguali sotto ogni rapporto*, perchè è chiaro non solo che essi hanno la stessa area, ma ancora che i loro lati sono, a coppie, eguali, e così pure i loro angoli, dato che tutti sono a due a due sovrapposti.

Se due triangoli sono disegnati sopra un foglio, non è sempre possibile piegare questo convenientemente, in modo da vedere se i triangoli sono, o no, congruenti. Perciò è necessario sapere quanto noi dobbiamo conoscere intorno a due triangoli per poter dire se sono congruenti o no, senza bisogno di sovrapporli realmente. Se si confrontano due triangoli, si hanno sette coppie di elementi da paragonare: l'area, tre coppie di lati e tre coppie di angoli. Non abbiamo bisogno di sapere se tutte queste sono effettivamente eguali per concludere che i triangoli sono congruenti. Delle aree non dobbiamo occuparci affatto: esse debbono manifestamente essere uguali se tutte le altre coppie lo sono. Per ciò che riguarda i lati e gli angoli ci importa di conoscere l'eguaglianza solo di alcuni fra essi per essere certi anche dell'eguaglianza degli altri. Ci sono tre casi differenti, che è necessario conoscere molto bene, nei quali è sufficiente la conoscenza di tre delle coppie.

TEOREMA.

Due triangoli sono congruenti se due lati dell'uno sono eguali a due lati dell'altro e se gli angoli compresi sono eguali.

Siano ABC e DEF due tali triangoli in cui

$$AB = DE$$
$$AC = DF$$

e l'angolo BAC = l'angolo EDF;

faremo vedere che i triangoli sono congruenti.

Nella fig. 95 i due triangoli sono stati disegnati in tal maniera che non sarebbe possibile piegarli l'uno

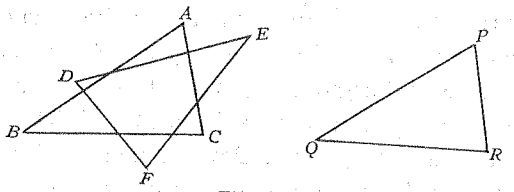


Fig. 95.

sull'altro e non è facile accorgersi a occhio che essi sono congruenti.

Prendiamo ora un altro foglio, pieghiamo una retta e segniamo su di essa due punti, P e Q, in modo che sia PQ eguale ad AB: appoggiato il segmento PQ su DE, si trova che è ad esso eguale. In P pieghiamo un angolo eguale a BAC, che adattato sull'angolo EDF, si rivelerà eguale ad esso. In ultimo, segnato sull'ultima retta un punto R, tale che PR sia eguale

ad AC, e posto PR su DF, questi due segmenti sono pure eguali. Pieghiamo quindi la retta QR, e ritagliamo il triangolo piegandone ben diritto i margini. — Quando si porti il punto P sopra A, e la retta PQ sopra AB, il punto Q giace in B, e il punto R o sta dalla medesima banda di AB da cui sta C oppure no: in quest'ultimo caso non abbiamo che a far rotare il triangolo PQR dall'altra parte, mantenendo fisso PQ ed R verrà a cadere dalla banda di AB da cui sta C. Ora, poichè l'angolo QPR è uguale all'angolo BAC, e i lati PQ e AB sono sovrapposti, e i lati PR e AC giacciono dalla stessa banda di AB, questi due lati saranno anch'essi sovrapposti, e, dato che sono eguali, R giacerà su C. Perciò, poichè Q ed R sono sovrapposti a B e C, i segmenti QR e BC sono sovrapposti, e sono sovrapposti i triangoli PQR e ABC, che saranno dunque congruenti. Perfettamente nello stesso modo si può far vedere che sono congruenti PQR e DEF; così che si potrà concludere che ABC e DEF, congruenti entrambi a PQR, sono congruenti fra loro, come si era detto.

Congruenza diretta e simmetria. — Può darsi che il triangolo PQR venga a sovrapporsi ad ABC e a DEF avendo in giù la medesima faccia oppure che la sovrapposizione si faccia a vicenda su pagine opposte: nel primo caso i due triangoli ABC e DEF si rassomiglierebbero perfettamente quando fossero

disposti davanti a noi l'uno accanto all'altro, e si dicono *direttamente congruenti*, nel secondo caso, disponendo i triangoli ABC e DEF coi lati AB e DE coincidenti, e C e F da bande opposte di AB, potremmo, tenendo fisso questo lato, ripiegare un triangolo sull'altro: i triangoli allora non avrebbero precisamente lo stesso aspetto, ma sarebbero figure simmetriche, nel senso che avevamo dato prima alla parola: appaiono come l'immagine riflessa l'uno dell'altro, e si dicono appunto *simmetrici*.

TEOREMA.

Due triangoli sono congruenti se due angoli dell'uno sono eguali a due angoli dell'altro e se questi comprendono lati pure eguali.

La fig. 95 mostra due tali triangoli, ABC e DEF, aventi l'angolo ABC eguale all'angolo DEF, l'angolo ACB eguale all'angolo DFE, e BC eguale ad EF. La dimostrazione si conduce come nel caso precedente.

TEOREMA.

Due triangoli sono congruenti se i tre lati dell'uno sono eguali ai tre lati dell'altro.

La fig. 96 dà due triangoli aventi AB eguale a DE, BC eguale ad EF, CA eguale ad FD. Disegniamo

un triangolo PQR congruente ad ABC, come per la dimostrazione di uno dei teoremi precedenti. Poniamo P sopra D, ed R su F, cosa possibile per l'eguaglianza dei segmenti PR e DF e disponiamo il triangolo così che Q stia dalla banda di DF opposta a E: sia G il punto in cui cade Q: congiungiamo E con G. Allora, essendo DG eguale a ED, il foglio può venir piegato in modo che G coincida con E,

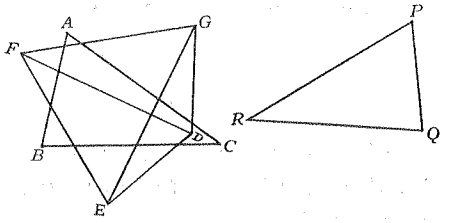


Fig. 96.

rimanendo D sovrapposto a se stesso, ma c'è un solo modo di piegare così da sovrapporre G a E, e allora EG è ripiegato su se stesso ed è perpendicolare alla piega, la quale dev'essere DF. Dunque, se pieghiamo il triangolo PQR, che era sovrapposto a GDF, sul lato PR che coincideva con DF, P coinciderà con E, e il triangolo PQR coinciderà con DEF, e sarà quindi ad esso congruente. Dunque i due triangoli ABC e DEF, congruenti entrambi a PQR, saranno a loro volta congruenti.

RETTE PARALLELE.

§ 26. **Lati opposti di un rombo.** — I lati opposti di un rombo o di un rettangolo si dicono paralleli. Un quadrato, essendo un caso speciale di rettangolo, ha i lati opposti paralleli.

Se si prolungano i lati opposti d'un rombo, si trova che non s'incontrano nel foglio del disegno, e a occhio

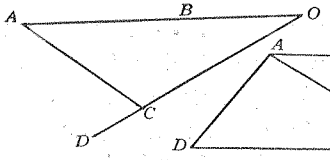


Fig. 97.

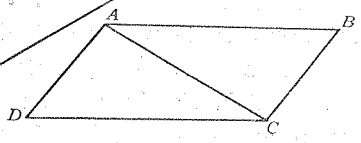


Fig. 98.

si può forse anche dire che non s'incontrano affatto: lo possiamo del resto dimostrare.

I lati opposti di un rombo non s'incontrano per quanto lontano vengano prolungati.

Infatti, se noi abbiamo due rette che s'incontrano, chiamiamo O il loro punto d'intersezione, e segniamo sulla prima due punti A, B nell'ordine ABO e sulla seconda due punti C e D, nell'ordine DCO (fig. 97), quindi congiungiamo A con C: l'angolo ACD è un angolo esterno del triangolo ACD, ed è perciò maggiore dell'angolo interno opposto CAO, oppure CAB. Dunque $ABCD$ non può essere un rombo perchè, se ciò fosse, gli angoli ACD e CAB sarebbero eguali,

ciascuno essendo la metà di una coppia di angoli opposti del rombo.

Quindi i lati opposti di un rombo non s'incontrano se prolungati. È chiaro che i lati prima del prolungamento non s'incontrano neppure, trovandosi da bande opposte di una diagonale. Perciò i lati opposti di un rombo non s'incontrano affatto. E neppure s'incontrano le rette AB, CD e AD, BC della fig. 98).

Definizione delle parallele. — Il parallelismo è una relazione fra la positura di due linee rette e non semplicemente di due segmenti o tratti, come la perpendicolarità. Perciò, sebbene abbiamo dapprima incontrato le rette parallele in relazione al rombo, dove abbiamo visto com'è fatta la loro figura, sarà meglio non servirsi del rombo per definire le rette parallele.

DEFINIZIONE. — *Sono parallele delle linee rette giacenti in un medesimo piano e che non s'incontrano per quanto lontano si prolunghino in entrambi i sensi.*

Il nostro ultimo teorema dice allora in altre parole che *i lati opposti di un rombo sono paralleli.*

ESERCIZI.

1. Provare che i lati opposti d'un rettangolo sono paralleli.

2. Provare che la retta che biseca i lati eguali di un triangolo isoscele è parallela alla base. (Entrambe sono perpendicolari alla medesima retta).

Costruzione di parallele. — *Costruire una retta parallela a una retta data per un punto dato fuori di essa.*

Si vede facilmente che qualunque dei metodi seguenti può essere impiegato.

Sia C il punto dato e AB la retta data (fig. 99): congiungiamo C con un punto Q di AB.

Metodo 1°. Si disegni un rombo con CQ per dia-

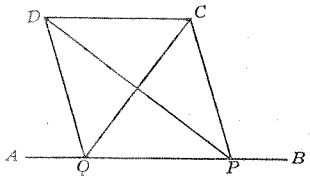


Fig. 99.

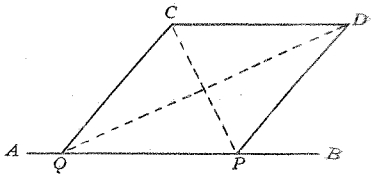


Fig. 100.

gonale e un lato lungo QA: il lato CD, opposto ad A, Q è la parallela richiesta (fig. 99).

Metodo 2°. Si disegni un rombo con CQ e QA per lati adiacenti. Il lato CD opposto ad AQ è la parallela cercata (fig. 100).

Metodo 3°. Nel punto C, dalla banda di CQ opposta a B, si costruisca l'angolo QCD eguale all'angolo CQB. CD è la parallela (fig. 99).

L'ultimo metodo si fonda sulla proprietà che gli angoli opposti di un rombo sono eguali e le diagonali li tagliano per metà. È facile specialmente se disegniamo da prima CQ perpendicolare ad AB, come

si può fare colla massima facilità mediante la riga di carta, e poi conduciamo CD perpendicolare a CQ. Questo metodo è il più pratico per la piegatura.

Esistenza di una parallela a una retta per un punto dato. — Si vede subito che *per un punto qualsiasi passa una retta parallela a una retta data*, anche se non riusciamo a costruirla.

Se tenete in mano la riga, esiste una retta, passante per un punto della luna, parallela ad essa, la quale giace nel piano determinato da quel punto e dal margine della riga, ed è perpendicolare a qualunque retta di quel piano che sia perpendicolare al margine stesso. La quistione è ora di sapere se questa è la sola retta passante per il punto dato e parallela alla retta data.

In primo luogo otteniamo noi sempre, colle nostre varie costruzioni, la medesima retta? La cosa non è chiara qui, come era nel caso della perpendicolare, in cui il metodo stesso dava manifestamente una retta sola. Possiamo scegliere il punto Q ovunque sopra B: otteniamo dunque sempre la stessa retta finale come parallela cercata? Troverete che è così sempre, ma non vi è possibile dimostrarlo, precisamente come non potevate dimostrare che gli angoli adiacenti di un rombo erano supplementari, quantunque abbiate trovato piegando che è così sempre per tutti i rombi che avete disegnato. Se

aveste dimostrato che gli angoli adiacenti del rombo sono supplementari, potreste facilmente dimostrare che qualunque costruzione vi conduce alla medesima parallela, facendo vedere che la perpendicolare su AB condotta dal vertice D del rombo ha la stessa lunghezza che la perpendicolare da C.

Ci occorre qui un altro assioma, e stabiliamo il seguente:

Assioma. — *Per un punto passa una sola retta parallela a una retta data.*

Ad illustrare questo assioma, prendiamo un foglio molto largo e conduciamo in esso una retta AB.

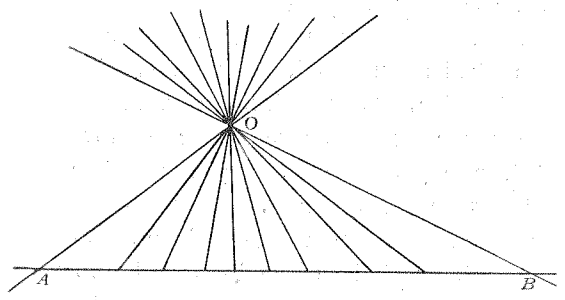


Fig. 101.

Scelto ad arbitrio un punto O, congiungiamolo coi vari punti di AB e prolunghiamo le rette ottenute oltre O (fig. 101). Andando avanti punto dopo punto su AB, si ottengono sempre nuovi raggi della stella che ha per centro O, giacenti nel piano del foglio, e

tutti questi raggi, o questi raggi prolungati oltre O, incontrano AB. Vi persuaderete ben presto che si potrebbe, volendo, ricoprire con queste linee tutto il foglio, salvi due angoli opposti al vertice in O, formati dalle due rette che uniscono O coi punti dove AB incontra l'orlo della carta. Se prendiamo un foglio più grande, tali angoli diverranno più piccoli, e, per quanto piccoli si possano pensare, potremo sempre immaginare di avere a disposizione una porzione di piano tanto grande che gli angoli siano tanto più piccoli dei pensati quanto lo desideriamo.

Mentre gli angoli divengono più e più piccoli, i lati OA e OB dei due angoli, che non giacciono sulla medesima retta, fanno un angolo che va sempre più avvicinandosi a due retti, e tendono a disporsi sopra una retta unica. Potete allora agevolmente figurarvi che c'è una ed una sola retta per O lungo la quale essi finiranno per giacere, e questa è l'unica parallela ad AB passante per O.

Si vede che, dato il nostro assioma, non solo i diversi metodi usati di costruzione ci danno sempre la medesima retta, ma nessun altro metodo ce ne potrebbe dare un' altra giacente nel medesimo piano e che non incontri la retta data. È del tutto indispensabile dire *nel medesimo piano,* perchè qualunque raggio della stella di centro O che non giaccia nel piano OAB ha con esso in comune il solo punto B e perciò non incontra AB. *Per un punto dato passano*

quante si vogliono linee rette che non incontrano una retta data, ma non passa che una sola retta parallela alla data.

Spigoli paralleli del cubo. — Prendete il cubo che avevate costruito, e disponetelo colla faccia 1 in alto, e lo spigolo (3, 4) verso di voi, (fig. 59). Ditemi quali spigoli sono paralleli a (3, 4) e in quali piani essi giacciono. Ce ne sono tre: (3, 6) nel piano 3: (4, 5) nel piano 4; e (5, 6) nel piano che divide il cubo in due cunei eguali. Quest'ultimo è parallelo a ciascuno dei tre altri nominati ora, come si vede subito, essendo lato opposto ad essi nei quadrati: non è così facile vedere che è parallelo a (3, 4); ma, se si guarda la figura di uno dei cunei, si vede immediatamente che è così, giacchè esso è il lato della faccia azzurra opposto a (3, 4).

Date due rette parallele quali si vogliano, per esempio gli spigoli (3, 6) e (5, 6), e preso un punto qualsiasi O sulla seconda, se per esso e per la prima retta si fa passare un piano, questo dovrà contenere per intero la seconda retta: ciò segue dal nostro assioma delle parallele: infatti noi possiamo disegnare nel piano condotto una retta parallela alla prima, e, dato che non c'è che una parallela possibile, questa dovrà essere la seconda. Sicchè *ogni piano condotto per l'una di due rette parallele o contiene l'altra oppure non la incontra affatto.*

Retta e piano paralleli. — *Se una retta e un piano in tutta la loro estensione non s'incontrano, si dicono essere paralleli.*

Dite quali spigoli del cubo sono paralleli al piano che passa per (3, 5) e (5, 6) [1].

Abbiamo visto che *ogni piano passante per l'una di due rette parallele e non contenente l'altra è ad essa parallelo.* D'altra parte *un piano passante per una retta incontra un piano ad essa parallelo lungo una parallela alla retta,* giacchè la retta d'intersezione non può incontrare la prima, giacendo in un piano che non la incontra.

Parallele ad una stessa retta. — Ritornando ai nostri tre spigoli paralleli a (3, 4), abbiamo visto, senza tagliare il cubo, che (5, 6) era parallelo a (3, 6) e che (3, 6) era parallelo a (3, 4): avremmo potuto concludere subito che (5, 6) era parallelo a (3, 4), poichè *rette parallele ad una medesima retta sono parallele fra loro.* Dimostreremo questo per i tre spigoli del cubo, ma la dimostrazione è del tutto generale, e dimostra il teorema per qualunque altra serie di parallele.

È chiaro che la prima e la terza retta, (3, 4) e (5, 6) non possono incontrarsi, giacchè, se ciò accadesse, il punto d'intersezione giacerebbe nel piano 3 e nel piano 6 e perciò sulla retta (3, 6), e noi sappiamo che questo non può essere, perchè nessun punto della prima o della terza retta giace sulla seconda, (3, 6). Non ci resta dunque a dimostrare altro se non che la prima e la terza retta giacciono in un piano e si sa allora che sono parallele.

(1) (3, 6) e (4, 5).

Conduciamo un piano per la prima retta, (3, 4), e per un punto qualunque O della terza, (5, 6); questo piano è parallelo alla seconda, (3, 6), ed è perciò tagliato dal piano 6 in una retta parallela alla (3, 6) stessa. Ma questa retta non può essere se non la (5, 6). essendo questa l'unica retta per O parallela alla seconda; quindi il piano che passa per la prima retta e per O contiene la (5, 6); dunque (3, 6) e (5, 6) sono parallele.

Spigoli sghembi del cubo. — Dite ora quali spigoli del cubo passanti per il vertice (3, 5, 6) non sono paralleli a (3, 4) e neppure lo incontrano per quanto prolungati. Devono essere gli spigoli non giacenti nel piano dei due spigoli paralleli (3, 4) e (5, 6). Sono gli spigoli (1, 5) e (1, 6).

Potete ora nominare tutti gli spigoli del cubo che nè sono paralleli a (2, 4) nè lo tagliano. Non ce ne sono che due, oltre quelli già nominati, (2, 5) e (2, 6).

Vedete dunque che tutti gli spigoli del cubo si separano in tre gruppi: il primo consta di (3, 4) e di tutti gli spigoli ad esso paralleli, il secondo di tutti gli spigoli che intersecano (3, 4) e il terzo di tutti gli

spigoli che non sono paralleli a (3, 4) e nemmeno lo incontrano, che sono, come noi diciamo, *sghembi* con (3, 4). Di quante rette è formato ogni gruppo? Di quattro. Tre volte quattro è il numero totale di spigoli del cubo, cioè dodici.

ESERCIZIO.

Quale degli spigoli di un tetraedro è sghembo con uno spigolo dato?

PIANI PARALLELI.

§ 27. **Definizione dei piani paralleli.** — Guardando le faccie 1 e 2 del cubo, si vede che le intersezioni di 2 con 3 e con 4 sono parallele a quelle di 1 con le medesime faccie. Questo mostra che *i piani di 1 e 2, per quanto estesi, non possono incontrarsi,* poichè, se si incontrassero, poichè il piano 2 non incontra nè (1, 3) nè (1, 4), la retta d'intersezione non incontrerebbe nessuna di tali rette, ma giacerebbe in un piano con esse: esisterebbe dunque una retta parallela tanto alla (1, 3) quanto alla (1, 4), cosa impossibile, poichè una parallela a una di queste due è perpendicolare, e non parallela, all'altra.

DEFINIZIONE. — *Due piani che non s'incontrano si dicono paralleli.*

Quindi *le facce opposte di un cubo sono piani paralleli.*

Allo stesso modo di prima, presa la figura del tetraedro regolare e appoggiatala su una delle facce, si può far vedere che *il piano bisecante i tre spigoli che concorrono nel vertice superiore è parallelo al piano di base.*

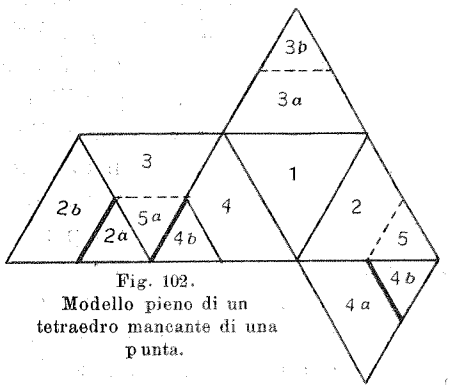


Fig. 102. Modello pieno di un tetraedro mancante di una punta.

Se tagliamo il tetraedro lungo questo piano, portiamo via dall'alto un piccolo tetraedro regolare, e ci rimane in basso una figura solida, da costruirsi secondo le figure 102 e 103.

È da notarsi che il modello piano della figura è precisamente lo stesso del tetraedro regolare, (fig. 83),

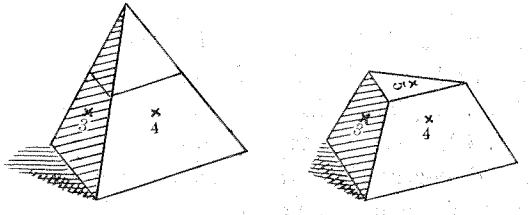


Fig. 103. Tetraedro con una punta tagliata.

e viene poi piegato lungo le linee punteggiate e le premute e ritagliato nelle linee premute.

Se paragoniamo la nuova figura con quella del tetraedro regolare, della barca di punta e del cubo, vedremo da prima che il piano lungo il quale abbiamo tagliato passa per quella diagonale della faccia quadrata dalla barca la quale è parallela alla carena, cioè allo spigolo tra le faccie 1 e 2 del tetraedro. Di fatto il piano di sezione passa per l'intersezione delle diagonali della faccia quadrata della barca di punta, e contiene perciò quella linea, dato che essa è parallela alla carena, ed è così la retta che biseca i lati della faccia 2* del tetraedro, per la quale il piano di sezione era stato condotto.

La faccia quadrata della barca di punta è la faccia 2 del cubo; dunque il nostro piano di sezione passa per una diagonale della faccia 2 e biseca le diagonali di 5 e 6 uscenti dal vertice (1, 6, 5); il che è quanto dire che esso è il piano segante il tetraedro di punta di vertice (2, 5, 6). Tutto questo si vede benissimo coi modelli.

Adunque *se si tagliano tutte le quattro punte del tetraedro regolare si ha un solido analogo a quello che si può ottenere tagliando in modo conveniente le otto punte del cubo.* Che cosa ci resterà dopo ciò?

Prima di cercar risposta a questa domanda, notiamo il numero delle facce, vertici e spigoli della nostra ultima figura.

Facce	5	Spigoli	9
Vertici	6		2
	11		11

OTTAEDRO REGOLARE.

§ 28. — Disponiamo ora la figura del tetraedro regolare e quella del tetraedro senza la punta al modo della fig. 80, colla carena del battello di punta (cioè l'intersezione delle faccie 1* e 2* del tetraedro) in basso e la faccia 4 del tetraedro in faccia: la punta che è stata tagliata sarebbe a sinistra, quella che taglieremo prossimamente è a destra (fig. 104 e 105). Il nuovo piano di sezione tornerà a passare per la diagonale della faccia quadrata del battello di punta parallela alla carena e ripasserà quindi per il punto medio dello spigolo alto del tetraedro che, ricorderete, è l'intersezione delle diagonali della faccia 2 del cubo. Noi porteremo dunque via quanto rimane di detto spigolo, lasciando un vertice al suo punto

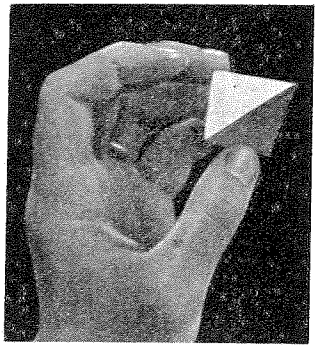


Fig. 104.

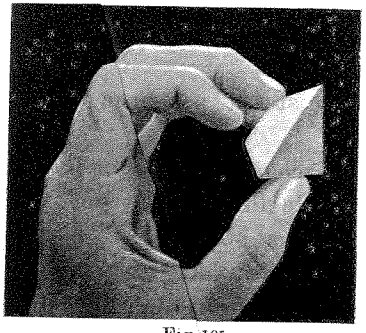


Fig. 105.

medio. Quanti triangoli equilateri vi si incontrano? Quattro. Sotto questi la nuova figura è identica a quella del tetraedro.

La fig. 106 dà il modello piano per la costruzione del tetraedro mancante di due punte, e la 107 mostra

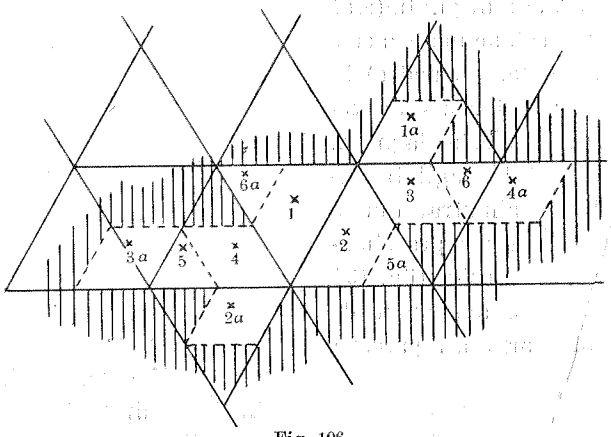


Fig. 106.

la figura finita, tenuta nella stessa posizione delle fig. 80, 104 e 105.

È facile ora rappresentarsi come apparirebbe il solido quando avessimo tagliato le due punte rimanenti. La parte più bassa assomiglierebbe perfettamente alla superiore, e sarebbe limitata da quattro triangoli equilateri. La fig. 108 dà il modello piano per questo solido, e la fig. 109 lo presenta finito. Esso viene detto *ottaedro regolare*. Si sa che deve essere regolare, perchè lo si è ottenuto tagliando via tutte le punte del cubo o tutte quelle del tetraedro regolare, e, in qualunque ordine le punte vengano tolte, noi dobbiamo rimanere alla fine colla medesima figura. Non c'è che a guardare il modello per vedere che tutte le facce sono eguali e che ne concorrono quattro in ogni vertice, così che tutti gli angoli si rassomigliano, e che lo stesso accade per gli spigoli. La figura ricorda abbastanza il doppio tetraedro, sebbene quello non fosse regolare, giacchè intorno a due dei vertici c'erano solo tre triangoli, mentre intorno agli altri se ne avevano quattro.

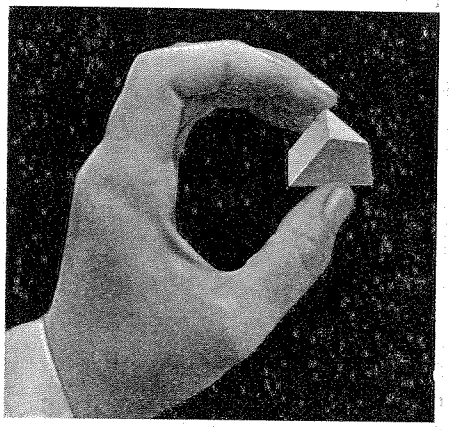


Fig. 107.

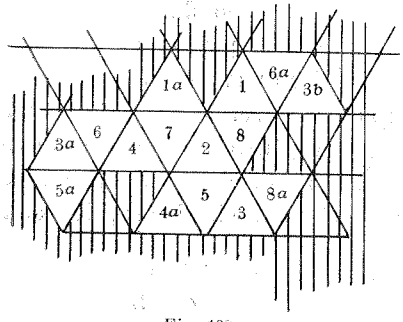


Fig. 108.

Il vertice superiore del nostro ottaedro era, come abbiamo veduto, l'intersezione delle diagonali della faccia 2 del cubo, e l'inferiore l'intersezione delle diagonali della faccia 1; in modo analogo è naturale che ogni vertice dell'ottaedro sia l'intersezione delle diagonali di una delle faccie del cubo. Quanti vertici avrà dunque l'ottaedro? Tanti quante sono le facce del cubo, cioè sei. Se noi tagliamo secondo il piano di una delle facce dell'ottaedro, portiamo via una punta del cubo; così che il numero delle facce dell'ottaedro dev'essere quello dei vertici del cubo, otto. Ora, se la nostra regola è giusta, l'ottaedro deve avere lo stesso numero di spigoli che il cubo, dodici. E, se si guarda la figura, si vede che è proprio così.

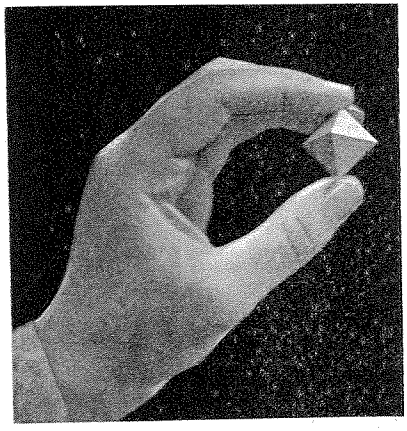


Fig. 109. Ottaedro regolare.

Vertici	6	Spigoli	12
Facce	8		2
	14		14

Riassumendo tutto ciò che abbiamo trovato mediante le nostre sezioni:

È possibile tagliare da un cubo un tetraedro regolare e un ottaedro regolare. Il tetraedro regolare si ottiene portando via quattro delle punte del cubo, ogni coppia di queste terminando coi vertici opposti di una faccia. I quattro vertici del tetraedro sono i quattro vertici del cubo che rimangono. Gli spigoli del tetraedro sono diagonali, una in ciascuna delle sei faccie del cubo. L'ottaedro regolare si ottiene dal cubo portandone via tutte le punte. I vertici dell'ottaedro sono le intersezioni delle diagonali delle sei faccie del cubo. L'ottaedro si può ottenere dal tetraedro regolare tagliando altri tetraedri regolari di spigolo metà del tetraedro grande da ogni punta di questo. I vertici dell'ottaedro sono i punti medî dei sei spigoli del tetraedro.

PROPRIETÀ
DI UNA COPPIA DI RETTE PARALLELE.

§ 29. **Angoli formati da una retta con una coppia di parallele.** — Se AB e CD sono rette parallele, sappiamo che esse giacciono in un medesimo piano, e che, qualunque rombo si costruisca con un lato su AB e uno dei vertici su CD, il lato di esso opposto ad AB starà sopra CD. Ne segue che congiungendo due punti, P di una retta e Q dell'altra,

PQ si può considerare come la diagonale di un tal rombo, e forma perciò angoli eguali con le due parallele, ma da bande opposte di PQ: diciamo che *PQ forma angoli alterni uguali con le due parallele*, (fig. 110).

Prolungando PQ in ambi i sensi in R ed in S, (fig. 110), abbiamo quattro angoli intorno al punto P

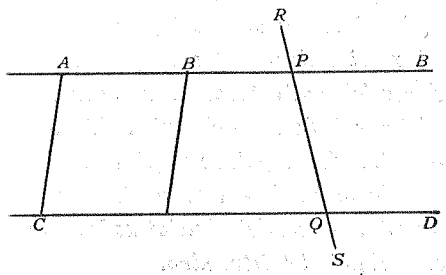


Fig. 110.

e quattro intorno al punto Q: ricordando che gli angoli opposti al vertice sono eguali, e che una retta forma con un' altra angoli adiacenti supplementari, si possono raggruppare questi angoli in due serie di quattro angoli ciascuna, gli angoli di ogni serie essendo fra loro eguali.

I quattro angoli formati colle parallele dal segmento PQ sono detti *gli angoli interni*, gli altri prendono il nome di *angoli esterni;* l'angolo interno e l'esterno dalla medesima banda di RS, non adiacenti,

si dicono l' uno all' altro *corrispondenti*. Così per esempio:

PQC è un angolo interno,
RPA è esterno e corrispondente ad esso,
CQS è esterno e adiacente al primo,
QPB è ad esso alterno,
PQD è interno e ad esso adiacente,
SQD è il suo opposto al vertice.

Vedremo che *ogni angolo interno è eguale al suo alterno, all'esterno corrispondente e all'opposto al vertice*. Questa è la serie di quattro angoli eguali: un' altra è formata di un angolo adiacente e dei tre altri eguali ad esso.

Se le rette AB e CD non fossero parallele, tali angoli non sarebbero eguali, e questo ci dà modo di vedere se due rette sono parallele oppure no.

ESERCIZI.

1. Essendo AFB ed EFG due rette che s'incontrano in F, si conducono per E e G due rette, EK, GL parallele ad AB: dimostrare che EK è parallela a GL.

2. ABC è un triangolo e D è il punto medio di AB: far vedere che la parallela a BC per D bisseca AC.

Se abbiamo due segmenti, AB e CD, non aventi un punto comune, (fig.111) e congiungiamo un punto P del primo con un punto Q del secondo, allora o *la somma dei due angoli interni BPQ e DQP da una banda*

di PQ è minore di due angoli retti, o è uguale a due retti, o è maggiore di due retti. Se è uguale a due angoli retti, le linee AB e CD sono parallele, poichè in tal caso APQ e DQP sono entrambi supplementari a BPQ, così che APQ e DQP sono eguali, e questi sono angoli alterni. *Se valgono insieme meno di due angoli retti,* i due angoli interni dall'altra parte di PQ, essendo ad essi supplementari, valgono fra tutti

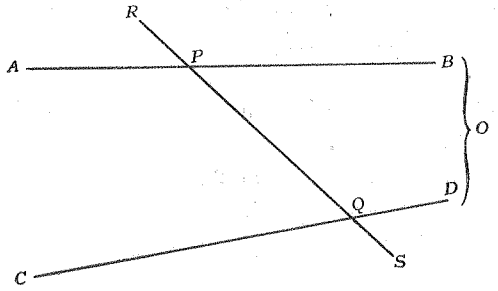


Fig. 111.

e due più che due retti; in questo caso AB e CD non sono parallele, e debbono incontrarsi se le prolunghiamo. Se il loro punto d'incontro si chiama O, OPQ è un triangolo, e gli angoli OPQ e OQP valgono perciò presi insieme meno di due angoli retti, quindi O si trova dalla stessa banda di PQ da cui stanno B e D, cioè *le rette, prolungate, s'incontrano dalla parte dove la somma degli angoli interni è inferiore a due retti.*

TEOREMA.

La somma dei tre angoli di un triangolo è uguale a due angoli retti, (180°).

Costruiamo un triangolo qualunque. Due almeno dei suoi angoli essendo acuti, chiamiamo B e C i loro vertici, e il terzo vertice sia A. Allora, se AP (fig. 112) è la perpendicolare condotta da A su BC, PA e PB s'incontrano in P, e s'incontrano così che i due an-

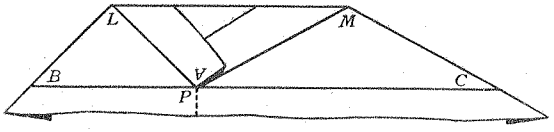


Fig. 112.

goli interni dalla stessa banda di BP da cui sta A dànno meno di due angoli retti e uno di essi, quello in P, è retto: quello in B dovrà essere acuto, quindi P si trova fra B e C.

Se ripieghiamo A su P, la piega biseca AP ad angolo retto, ed è perciò parallela a BC, e taglia in conseguenza (cfr. Eserc. 2, pag. 173) AB e AC in due punti L ed M, tali che $AL=LB$ e $AM=MC$. Possiamo perciò portare tanto B quanto C a giacere in P, così che LB giaccia lungo LP ed MC lungo MP: allora i tre angoli del triangolo ricoprono per l'appunto in P due angoli retti, il che dimostra il teorema.

ESERCIZI.

1. Due angoli di un triangolo valgono rispettivamente 22 gradi e mezzo e 45°. Qual è l'ampiezza del terzo angolo? Piegare un tale triangolo.

2. Quanti gradi misura un angolo d'un triangolo equilatero?

3. Piegare con precisione un angolo di 15°.

4. Costruire un triangolo rettangolo di cui un angolo valga 30°. Quanto è ampio il terzo angolo?

IL TRIANGOLO RETTANGOLO.

§ 30. — Pieghiamo due rette quali siensi ad angolo retto, AB ed AC, e una terza, BC, che le incontri entrambe: ABC è un *triangolo rettangolo:* il lato BC, opposto all' angolo retto, si chiama la sua *ipotenusa.* Poichè i tre angoli di un triangolo sommano a due angoli retti, *l'angolo retto BAC è uguale alla somma degli altri due angoli del triangolo.*

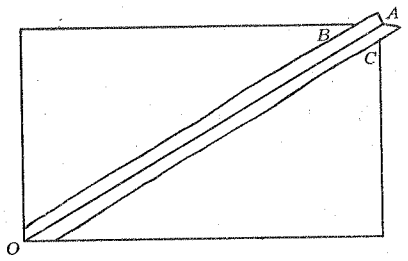


Fig. 113.

Possiamo ripiegare gli angoli in B e C per modo da portarli a ricoprire l'angolo retto in A. Infatti, se O è il punto medio di BC, la perpendicolare condotta

da O sopra AB è parallela ad AC e biseca perciò AB (cfr. Eserc. 2, pag. 173). Se allora pieghiamo il foglio così che B coincida con A, la piega passerà per O, e OB coinciderà con OA (fig. 113).

Similmente, se ripieghiamo C su A, OC giacerà lungo OA, accanto ad OB, e i due angoli acuti del triangolo si troveranno esattamente sovrapposti all'angolo retto. Questo dimostra nello stesso tempo che, *essendo O il punto medio dell'ipotenusa BC di un triangolo rettangolo ABC,*

$$OA = OB = OC,$$

e perciò un circolo di diametro BC passa per A.

ESERCIZI.

1. Far vedere che, se la somma di due angoli di un triangolo equivale al terzo, il triangolo è rettangolo.

2. Far vedere che un triangolo iscritto in un semicircolo, ed avente per uno dei lati il suo diametro è un triangolo rettangolo.

3. La retta congiungente il vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo col punto medio dell'ipotenusa divide l'angolo retto in due parti rispettivamente eguali ai due angoli acuti del triangolo.

4. In un triangolo qualunque la retta congiungente un vertice col punto medio della base è maggiore o minore della metà di tale base secondo che l'angolo al vertice considerato è acuto od ottuso.

5. La perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo sull'ipotenusa divide il triangolo dato in due triangoli ognuno dei quali ha gli angoli rispettivamente eguali a quelli del triangolo dato.

6. La perpendicolare dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa in un triangolo rettangolo forma con uno dei lati contenenti l'angolo retto lo stesso angolo che l'altro di questi lati forma con la retta congiungente il vertice dell'angolo retto col punto medio dell'ipotenusa. (La perpendicolare e la mediana si chiamano perciò coniugate isogonali. (Cfr. pag. 195).

7. Un triangolo rettangolo di cui un angolo valga la metà d'un retto è un triangolo rettangolo isoscele.

AREA DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO E DI UN RETTANGOLO.

§ 31. **Area del triangolo rettangolo.** — Per gli estremi B e C dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo ACB conduciamo delle perpendicolari ai lati. Queste s' incontreranno dalla parte di BC opposta ad A, e formeranno un rettangolo $ABZC$ (fig. 114).

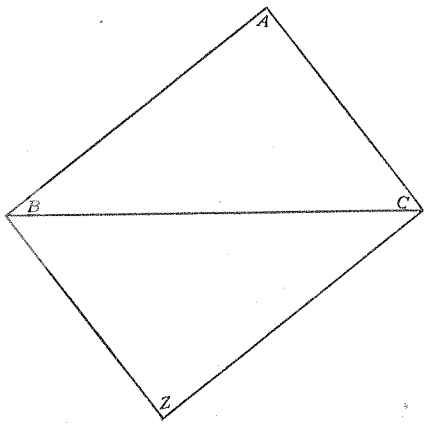


Fig. 114.

Il triangolo ZBC ha l'angolo in B eguale all'angolo ACB, perchè insieme con ABC forma un angolo retto; così l'angolo in C del triangolo ZBC è uguale all'angolo ABC. Quindi i due triangoli ABC, ZBC sono congruenti, perchè hanno eguali due angoli e il lato compreso fra questi è loro comune. I due triangoli hanno quindi eguale area, e ciascuna è la metà dell'area del rettangolo $ABZC$, contenuto da AB e AC (§ 17). *Dunque l'area di un triangolo rettangolo vale metà dell'area del rettangolo contenuto dai lati che comprendono l'angolo retto.*

Area del rettangolo. — Ripieghiamo AB sul prolungamento di AC così da ottenere la bisettrice dell'angolo retto adiacente a BAC, (fig. 115). La piega incontri il prolungamento di ZB in F, e il prolungamento di ZC in H. Per F e H pieghiamo le perpendicolari LF ed LH, segantisi in L. Sia K il punto d'incontro di LH con BA, e G quello di CA con FL (fig. 115).

È agevole far vedere che BAF, ZHF e CAH sono triangoli rettangoli isosceli (Eserc. 7, pag. 178) e che, se pieghiamo il foglio lungo FH, FZ coincide con FL, ed HZ con HL, AB con AG e AC con AK. Quindi, siccome un triangolo rettangolo isoscele è metà di un quadrato, $ZFLH$ è un quadrato, e tali sono pure $ABFG$ e $ACHK$; questi ultimi sono evidentemente i quadrati dei lati AB e AC del rettangolo. Il quadrato grande $ZFLH$ è quadrato della somma

dei lati adiacenti del rettangolo, poichè BF è eguale a BA, essendo questi lati di un quadrato.

Allora, se AB fosse un centimetro e AC due centimetri, ZF varrebbe tre centimetri: il quadrato più piccolo varrebbe un centimetro quadrato, il secondo quattro centimetri quadrati, e il grande nove centi-

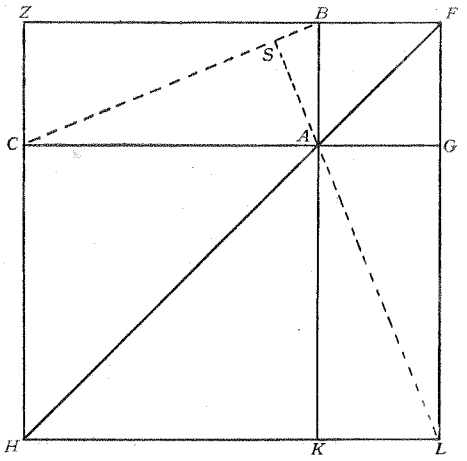


Fig. 115.

metri quadrati. Quando si ripieghi ancora il foglio lungo FH, i quadrati si ripiegheranno tutti su se stessi poichè FH è diagonale di tutti quanti. Quindi il nostro rettangolo $ABZC$ si sovrapporrà ad $AGLK$, che è perciò ad esso congruente. Così che i quadrati dei lati diseguali di un rettangolo, presi insieme con

due volte il rettangolo contenuto da quei lati, valgono il quadrato della somma del lati. È lo stesso dire che *l'area di un rettangolo è metà della differenza fra il quadrato della somma dei suoi lati diseguali e la somma dei quadrati dei lati stessi.*

Dal che si vede che noi possiamo confrontare l'area di un rettangolo con l'area di dati quadrati e, poichè abbiamo imparato a valutare l'area dei quadrati in centimetri o in metri quadrati, potremo valutare analogamente l'area dei rettangoli.

Così, per esempio, tenendo gli stessi numeri di prima, l'area del rettangolo $ABDC$ è metà della differenza fra nove e la somma di uno e quattro centimetri quadrati, cioè l'area è metà di quattro, ossia due, centimetri quadrati.

Poichè l'area di un triangolo rettangolo vale la metà di quella di un rettangolo, ne segue che l'area di un triangolo rettangolo può anch'essa venir misurata in centimetri o metri quadrati.

Quando abbiamo bisogno di sapere quanti centimetri o metri quadrati stanno in un dato rettangolo o triangolo, non è necessario trovare l'area dei tre quadrati e poi sommare i due numeri più piccoli ottenuti e sottrarre la somma dal più grande. C'è un modo più breve di ottenere lo stesso risultato: si può fare il prodotto dei due numeri che indicano le lunghezze dei lati del rettangolo o del triangolo. Si vede che questo ci avrebbe di nuovo dato due nell'esempio di

prima, perchè due volte uno fa due, ed è facile persuadersi con un numero qualunque di esempi che la regola dà sempre il risultato esatto. La dimostrazione di questa regola è così difficile come quella della regola per trovare in modo soddisfaciente l'area dei quadrati e dev'essere rimessa a studio più avanzato.

ESERCIZI.

1. Nella fig. 115 mostrate colla piegatura e dimostrate che AL è eguale e perpendicolare a BC (cfr. Eserc. 6, pagina 178).

2. Fate vedere che un quadrato è diviso da due rette condotte parallelamente ai lati per un punto qualsiasi d'una diagonale, C, in due quadrati e due rettangoli, e che questi ultimi sono congruenti (fig. 115).

3. Se nella fig. 115 si conducono due perpendicolari a BC, BX e CY, a incontrare LF ed LH in X e Y, fate vedere che $BC\,YX$ è un quadrato (BX e CY sono entrambe eguali e parallele ad AL).

4. Inscrivere un quadrato in un quadrato dato, con uno dei vertici in un dato punto. (Sia il punto B nella fig. 117: fate $ZC = BF$: C è un altro vertice del quadrato, poi valetevi dell'esercizio precedente).

TEOREMA DI PITAGORA.

§ 32. — **L'ipotenusa.** — Qual è il maggior lato di un triangolo rettangolo? L'ipotenusa, che è opposta all'angolo più grande. Sappiamo tuttavia che l'ipotenusa è minore della somma dei due lati che comprendono l'angolo retto; perciò, per il § 15, il quadrato costruito sull'ipotenusa è minore del quadrato costruito sulla somma dei cateti. La fig. 115 ci ha fatto vedere ben chiaro che la somma dei quadrati

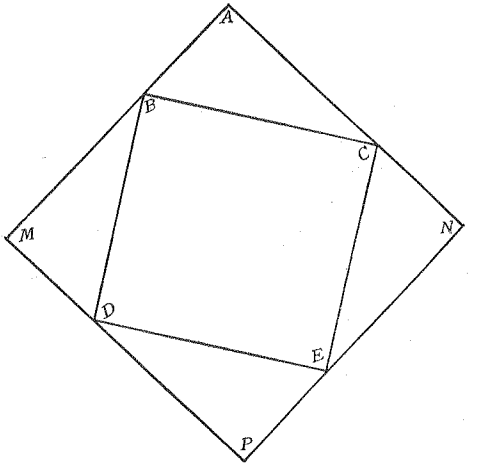


Fig. 116.

dei cateti del triangolo rettangolo era minore del grande quadrato costruito sulla loro somma. La fig. 116 ci mostra per bene che il quadrato dell'ipotenusa è minore dello stesso grande quadrato. Ora queste due aree, entrambe minori dell'area del quadrato grande, sono in realtà eguali fra loro, e la fig. 117 ci indica come possiamo piegare il foglio per far vedere questo

mediante la sovrapposizione. Nella fig. 116 il quadrato dell'ipotenusa è inscritto nel quadrato della somma dei cateti.

Per piegare questa fig. 116 dapprima costruiamo il quadrato $BCED$ e pieghiamo in seguito le perpendicolari da D e da E sopra AB e AC (che dovevano già esser stati prolungati nel piegarli), si forma così la figura $AMPN$ che è facile far vedere essere il quadrato della somma dei cateti, giacchè i quattro triangoli ABC, BMD, PDE, NEC si dimostrano subito congruenti. Ne segue allora che il quadrato dell'ipotenusa, insieme con quattro volte l'area del triangolo, equivale al quadrato della somma dei cateti; ma, poichè il doppio dell'area del triangolo vale il rettangolo contenuto dai cateti, ne segue che l'area del quadrato dell'ipotenusa, come la somma delle aree dei quadrati dei cateti, deve essere aggiunta al doppio del rettangolo dei cateti per dare il quadrato costruito sulla somma dei cateti stessi. Adunque *il quadrato dell'ipotenusa equivale alla somma dei quadrati dei cateti* (teorema di Pitagora).

La fig. 117 insegna come si debba piegare la carta perchè ciò si veda con tutta chiarezza. Qui sono riunite le fig. 115 e 116: il triangolo ZBC della fig. 115 non è piegato nella 117 per maggiore semplicità. La parte di figura che sta sotto la linea BC può essere sovrapposta, in due pezzi, alla parte sopra la stessa linea, piegando lungo BC e lungo la retta che taglia

il segmento BC ad angolo retto. Ciascuna delle parti sovrapponibili consta di tre triangoli congruenti ad ABC e poi del quadrato dell'ipotenusa per l'una, e per l'altra dei quadrati dei cateti. I pezzi da sovrapporre sono colorati rispettivamente in verde-giallo e in azzurro.

Il triangolo BME può venire immediatamente sovrapposto ad ALK piegando lungo AB e lungo la retta che lo taglia per metà ad angolo retto. Similmente il triangolo CND si può sovrapporre al triangolo AGL piegando lungo AC e alla sua bisettrice perpendicolare. Infine il triangolo PED si può sovrapporre ad ABC, piegando secondo le diagonali CE e BD del quadrato di BC.

Dunque, per le avvenute sovrapposizioni:

1. La figura sotto BC = la figura sopra BC.
2. Triangolo BME = Triangolo AKL.
3. Triangolo CND = Triangolo AGL.
4. Triangolo PDE = Triangolo ABC.

In conseguenza: Quadrato $BCDE$ = Somma dei due quadrati $AGFB$ e $AKHC$.

ESERCIZI.

1. Se nella fig. 117 si prolunga EB a incontrare FL in X, e DC a incontrare HL in Y, si faccia vedere piegando e poi si dimostri che $BXYC$ è un quadrato.

2. Nella fig. 117 si faccia vedere piegando e si dimostri che LA è perpendicolare a BC.

PARALLELOGRAMMI.

§ 33. — **Definizione e proprietà del parallelogramma.** — Se disegnate un triangolo qualunque ABC, e per B e C conducete le parallele ad AB e AC, queste si incontreranno dalla banda di BC opposta ad A, poichè gli angoli che ivi essi formano con BC sono alterni degli angoli in B e C del primitivo triangolo, e dànno perciò una somma minore di due retti. Sia Z il punto in cui s'incontrano, allora il triangolo ZBC è congruente ad ABC, avendo i due triangoli il lato BC comune e gli angoli che lo comprendono rispettivamente eguali. L'interno dei due triangoli uniti costituisce una porzione di piano separata dal rimanente dai quattro segmenti AB, BZ, ZC, CA, i quali formano *un quadrilatero coi lati opposti paralleli, detto perciò parallelogramma.*

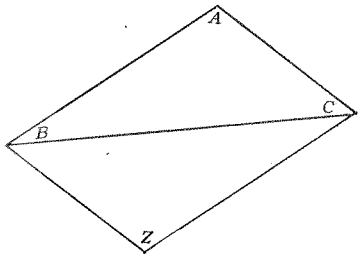


Fig. 118.

Segue da ciò che abbiamo detto che *i lati opposti di un parallelogramma sono eguali.*

La porzione di piano compresa entro i due triangoli, insieme col lato comune BC, dicesi parte *interna* del parallelogramma e si chiama la sua *area*: i lati del parallelogramma la chiudono o la *limitano*. L'area del parallelogramma è dunque doppia di quella del triangolo ABC.

Gli angoli del parallelogramma sono gli angoli (convessi) formati dai segmenti che sono suoi lati: l'interno del parallelogramma è interno a ciascuno dei suoi angoli.

È chiaro che *gli angoli opposti del parallelogramma sono eguali, e gli adiacenti sono supplementari.*

I segmenti BC e AZ sono detti *diagonali del parallelogramma. Una diagonale divide il parallelogramma in due parti congruenti.* Ciò è stato già stabilito per la diagonale BC, e si può provare allo stesso modo per l'altra diagonale.

Se uno degli angoli d'un parallelogramma è retto, il parallelogramma è un rettangolo, così che *un rettangolo è un particolare parallelogramma,* come un quadrato è un particolare rombo.

ESERCIZI.

1. Se le diagonali di un parallelogramma sono eguali, il parallelogramma è un rettangolo.
2. La diagonale maggiore di un parallelogramma è quella che ne congiunge i vertici degli angoli acuti.
3. Se ABC e ZBC sono due triangoli costruiti da bande opposte di una base comune BC, così che siano eguali AB e ZC, e siano pure eguali AC e ZB, si faccia vedere che $ABZC$ è un parallelogramma.

(I triangoli ABC e ZBC sono congruenti perchè i tre lati dell'uno sono rispettivamente eguali ai tre lati dell'altro; perciò gli angoli alterni ABC e ZBC sono eguali).

Presi due segmenti eguali e paralleli, congiungete un punto P dell'uno con un punto Q dell'altro. Gli estremi dei due segmenti possono ora venire distinti come giacenti alla destra o alla sinistra di PQ, cioè alla vostra destra o sinistra se state guardando dritto nella direzione da P a Q (fig. 119).

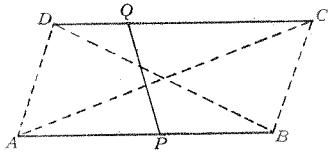


Fig. 119.

Chiamiamo i due estremi di sinistra A e D e quelli di destra B e C, così che AB e DC sono i segmenti paralleli. I quattro punti A, B, C, D, possono venir congiunti mediante quattro altri segmenti AC, AD, BC e BD: di questi AD è tale che B e C stanno dalla medesima banda di esso, giacendo entrambi alla destra di PQ, mentre AD è alla sua sinistra. Per la stessa ragione A e D stanno entrambi dalla stessa banda di BC. Ma AC separa B da D e BD separa A da C, poichè, essendo DCA un triangolo, la somma dei suoi due angoli DAC e ADC è minore di due retti, e perciò minore della somma degli angoli DAB e ADC interni alle parallele AB e DC; quindi l'angolo DAC è minore dell'angolo DAB, così che CA è interno all'angolo DAB e separa B e D: similmente BD separa A e C.

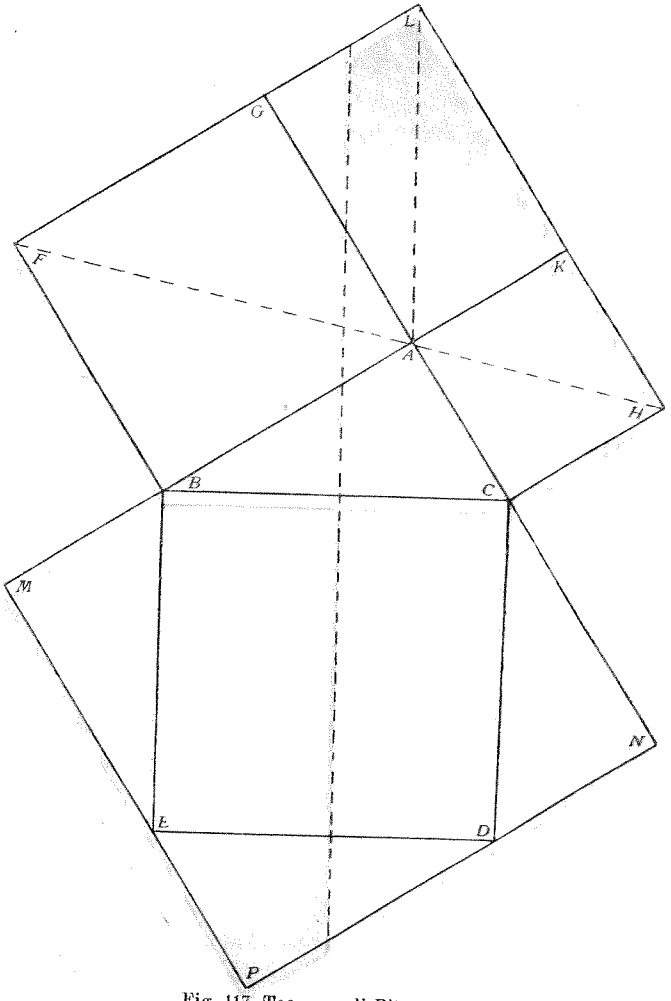


Fig. 117. Teorema di Pitagora.

Dunque, *se due dei segmenti congiungenti quattro punti sono eguali e paralleli, due e due soli dei sei segmenti sono tali che ognuno separa i due punti che non giacciono su di esso.*

TEOREMA.

Se AB e CD sono segmenti eguali e paralleli, e AD e BC sono l'altra coppia di segmenti, congiungenti ognuno due estremi senza separare gli altri due, $ABCD$ è un parallelogramma.

Tiriamo AC: questo separa B da D per modo che BAC e DCA sono angoli alterni e quindi eguali. Ancora AB è eguale a CD e AC è comune ai triangoli BAC e CAD, e gli angoli che or ora si son trovati eguali sono gli angoli da essi compresi; perciò i triangoli considerati sono congruenti, e gli angoli DAC e ACB sono eguali, così che AD è parallelo a BC e $ABCD$ è un parallelogramma.

Area del parallelogramma e del triangolo. — Abbiamo visto che l'area di un triangolo è metà dell'area di un certo parallelogramma. Il teorema seguente mostra che si può misurare l'area di un parallelogramma essendo essa eguale a quella di un determinato rettangolo.

TEOREMA.

L'area di un parallelogramma è uguale a quella di un rettangolo avente la stessa base e compreso fra le stesse parallele.

Pieghiamo un parallelogramma $ABCD$ e le perpendicolari per A e B alle parallele AB, DC (fig. 120). Se queste incontrano CD in E e in F, EF, AB e CD sono eguali fra loro come lati opposti di parallelogrammi. Perciò uno dei punti E od F deve trovarsi fuori del segmento CD, e può darsi che ne siano anche fuori entrambi. Sia F il punto fuori di CD nel primo caso o quello fra i due più lontano da C e D nel secondo, e per F conduciamo FG, parallela ad AD o BC.

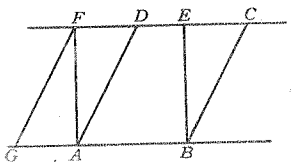


Fig. 120.

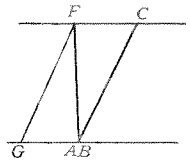


Fig. 121.

Se allora si piega il foglio così da far coincidere B con A, E si sovrapporrà ad F. Ripiegate ora indietro il triangolo CEB lungo BE così che i due triangoli CBE e GAF siano distesi innanzi a voi: insieme essi formano allora un parallelogramma, poichè AC è perpendicolare a BE che coincide con AF, e così AG, mentre BC e GF, parallele prima della piegatura, fanno con EC, appoggiato su un altro tratto della sua stessa retta, angoli alterni eguali, e sono quindi parallele ancora. Dunque CEB e GAF sono triangoli congruenti, metà del parallelogramma che si è ottenuto colla piegatura (fig. 121). I due triangoli

sono perciò entrambi congruenti al triangolo ADF, che, sulla parte di foglio non piegata, forma con GAF un parallelogramma. Sono dunque congruenti i tre triangoli GAF, ADF, CEB. Se si piegano in dentro i due primi, si ottiene il parallelogramma $ABCD$; se si ripiegano invece il primo e l'ultimo, si rimane col rettangolo $ABEF$. Dunque le aree del parallelogramma e del rettangolo sono eguali, giacchè, con due dei tre triangoli dimostrati congruenti, costituiscono la medesima figura $GBCD$.

ESERCIZI.

1. Far vedere che parallelogrammi aventi la medesima base o basi eguali e compresi fra le stesse parallele [1] hanno aree eguali.

2. Far vedere che triangoli aventi la medesima base o basi eguali e compresi fra le stesse parallele [2] hanno area eguale.

La lunghezza del segmento di perpendicolare condotto dal vertice di un triangolo sulla base dicesi *altezza* del triangolo. Quindi il nostro teorema stabilisce in altre parole che l'area di un triangolo è metà di quella d'un rettangolo i cui lati valgano rispettivamente la base e l'altezza del triangolo: più breve-

[1] Si dice che un parallelogramma è compreso fra due parallele se uno dei suoi lati è parte dell'una e il lato opposto è parte dell'altra.

[2] Si dice che un triangolo è compreso fra due parallele se la sua base è parte dell'una e il suo vertice appartiene all'altra.

mente diciamo *l'area di un rettangolo è metà di quella del rettangolo contenuto dalla sua base e dalla sua altezza.*

Divisione di un rombo in due piccoli rombi e due parallelogrammi. — Abbiamo veduto (v. fig. 115) che un quadrato è scomponibile in due quadrati e due rettangoli mediante due parallele ai lati condotte per

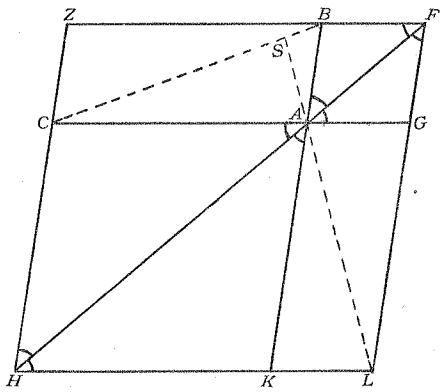


Fig. 122.

un punto qualunque d'una diagonale. Proprio nella stessa maniera (fig. 122), un rombo viene scomposto da due tali rette in due rombi più piccoli e due parallelogrammi.

TEOREMA.

I rombi costruiti su due segmenti quali siensi, con qualunque angolo, presi insieme con due volte il parallelogramma costruito cogli stessi due segmenti e col

medesimo angolo, hanno area eguale a quella del rombo costruito, sempre coll'angolo scelto, sulla somma dei due segmenti.

La dimostrazione di questo teorema è del tutto simile a quella data per il caso del quadrato. La diagonale FAH del rombo grande biseca i suoi angoli e forma coi lati e colle parallele BAK e CAG angoli alterni eguali; allora gli otto angoli segnati nella fig. 122 sono eguali; dal che consegue che BAF e CAH sono triangoli isosceli. Se ora pieghiamo il foglio lungo FH, ne segue, appunto come per il quadrato, che Z coincide con L, B con G, C con K. Quindi $ABZC$ e $AGLK$ sono parallelogrammi congruenti, e $BFGA$, $CAKH$, che si possono ottenere piegando triangoli isosceli sopra la loro base, sono rombi descritti sui lati dei parallelogrammi stessi. Infine la somma dei lati adiacenti di ciascun parallelogramma è uguale alla lunghezza del lato del rombo maggiore, giacchè BA e BF, lati di uno stesso rombo, sono eguali, e ZF vale la somma di ZB con AB.

TRIANGOLI CONIUGATI.

§ 34. **Definizione e costruzione.** — Dato un triangolo e scelto quale dei lati, p. es. BC, si voglia considerare come base, sia A l'opposto angolo al vertice: abbiamo visto che esso determina un parallelogramma,

di cui BC è una diagonale. Se AZ è l'altra, il triangolo ABZ è anch'esso metà del parallelogramma, ed è solo congruente ad ABC se il parallelogramma è un rettangolo, cioè se l'angolo in A è retto. Questo triangolo ABZ accompagna ABC ed è da questo determinato; e a sua volta determina il triangolo ABC: questo triangolo ABZ, o qualunque triangolo ad esso congruente dicesi *coniugato* di ABC rispetto alla base BC, e le due diagonali BC e AZ sono dette *basi coniugate*.

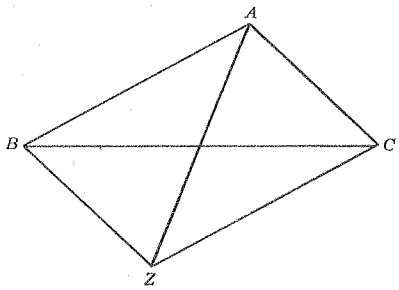


Fig. 123.

Se desiderate costruire un triangolo coniugato a un triangolo dato, potete farlo in tre diversi modi, a seconda del lato del triangolo che scegliete per base. Se il triangolo dato è equilatero, i vari triangoli ottenuti sono congruenti l'uno all'altro. Ma in generale, dato un triangolo, ve ne sono tre, non congruenti fra loro, ad esso coniugati.

ESERCIZI.

1. Dato un triangolo ABC, costruite sopra un segmento eguale ad AC e dalla stessa banda di esso due triangoli, ognuno avente due lati eguali ad AB e AC e area eguale ad ABC. Fate vedere che l'uno di essi è congruente e l'altro è coniugato ad ABC. (ZBC e ZBA nella fig. 123).

2. Sia ABC un triangolo qualunque (fig. 122) di base BC e angolo al vertice in A. Prolungati BA in K e CA in G, così che divengano lati dei rombi $BAGF$ e $CAKH$ su BA e CA, si prolunghino i lati FG e HK opposti a BA e CA fino ad incontrarsi in L. I triangoli LKA e LAG sono entrambi coniugati ad ABC, e BC ed AL sono basi coniugate.

RETTE CONIUGATE ISOGONALI.

§ 35. **Rette associate.** — Scelto il lato BC di un triangolo ABC come sua base, sarà A l'angolo al vertice. Ogni retta condotta per A e segante la base BC in T, determinerà una e una sola retta ulteriore AS, passante per A, che formi con AB lo stesso angolo che AT forma con AC. Viceversa AS determina nello stesso modo AT e nessun'altra retta. AS incontrerà dunque pure la base BC, e potremo prendere come punto S il punto d'incontro di AS con BC.

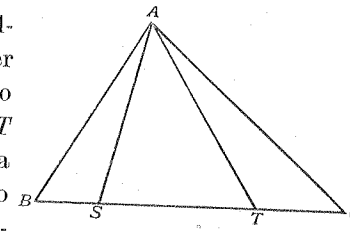


Fig. 124.

Due tali rette passanti per il vertice di un angolo e formanti coi lati di esso angoli eguali diconsi con nome scientifico *coniugate isogonali*, vale a dire rette che si accompagnano formando angoli eguali. Si pos-

sono anche chiamare semplicemente *rette associate* riguardo agli angoli.

Se ABC è un triangolo e T il punto medio della base BC, AT prende il nome di *mediana* per A. Se il triangolo ABC ha un angolo retto in A, (fig. 125), l'angolo SAB, essendo eguale all'angolo TAC è uguale

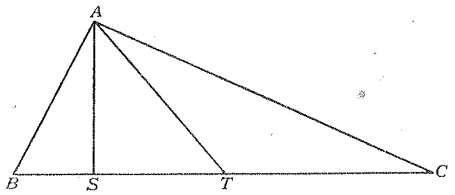


Fig. 125.

all'angolo TCA o BCA, e, insieme coll'angolo CBA o SBA, forma un angolo retto, così che SBA è un triangolo rettangolo, e AS è la perpendicolare condotta da A sull'ipotenusa. Dunque *la coniugata AS della mediana relativa al vertice A dell'angolo retto di un triangolo rettangolo è la perpendicolare all'ipotenusa uscente da A.*

ESERCIZIO.

Fate vedere che, se la mediana AT e la perpendicolare AS dal vertice A di un triangolo di base BC, sono coniugate rispetto all'angolo al vertice, il triangolo è rettangolo.

La simmediana. — La coniugata isogonale della mediana è detta *simmediana*. Nel caso del triangolo non rettangolo essa ha spesso le proprietà della

perpendicolare condotta dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa nel triangolo rettangolo, come si può vedere paragonando gli esercizi seguenti con quelli alla fine del § 31.

ESERCIZI.

1. Nella fig. 122 fate vedere piegando e poi dimostrate che AL è coniugato alla base BC del triangolo ABC, e che il prolungamento di AL è la simmediana condotta da A.

2. Nella fig. 122 le simmediane da A e Z sulla base comune BC dei triangoli ABC e ZBC sono parallele.

3. Se nella fig. 122 si conducono EX e CY parallele alle simmediane da A su BC ad incontrare LF ed LH in X ed Y, fate vedere che $BCYX$ è un parallelogramma, e che i suoi lati adiacenti sono basi coniugate.

4. Inscrivere in un rombo dato un parallelogramma, avente un dato vertice e i cui lati adiacenti siano basi coniugate dei triangoli che esso taglia ai vertici del rombo.

Fare vedere che gli angoli di questo parallelogramma equivalgono a quelli formati dalla base di uno dei triangoli con le simmediane.

Quest'ultimo problema 4 corrisponde a quello illustrato dalla fig. 116, che è il caso speciale di questo quando il rombo sia un quadrato: i triangoli tagliati ai vertici sono allora triangoli rettangoli, così che le basi coniugate sono eguali e la simmediana è la perpendicolare stessa. Adoperando le stesse lettere della fig. 116, otteniamo la 126, che illustra il caso generale. Se B è il vertice dato dell'Es. 4, dobbiamo prendere AC eguale a BM e determinare i punti D ed E facendo ME e PD eguali ciascuno ad AB. Si vede allora facilmente che il triangolo PED è congruente ad ABC e può essere ad esso effettivamente sovrapposto, piegando il foglio lungo le diagonali BD e CE. I triangoli MBE

ed NCD sono poi ciascuno coniugato ad ABC, poichè, come agevolmente si può far vedere, i due lati che s'incontrano nei due vertici M od N del rombo sono eguali ad AB e AC, mentre l'angolo compreso è supplementare a BAC. Quindi BE e CD sono entrambe basi coniugate di BC e sono perciò eguali. Viene in conseguenza, come nell'Eserc. 3 del § 32, che $BEDC$ è un parallelogramma; infatti, tirando BD, gli angoli CBD ed EDB sono eguali: questi sono angoli alterni; poichè C ed E stanno certo da bande opposte di BD; quindi BC e DE sono parallele: similmente sono parallele BE e CD, così che $BCDE$ è un parallelogramma, i cui lati sono basi coniugate dei triangoli tagliati ai vertici.

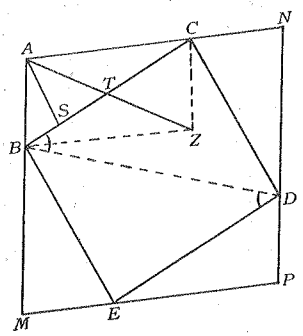


Fig. 126.

Per mostrare che gli angoli di questo parallelogramma sono eguali a quelli formati con BC dalle simmediane si conducono CZ e BZ parallele ad AB ed AC, formando il parallelogramma $ABZC$: AZ è allora la mediana per A del triangolo ABC. I triangoli MBE ed AZC sono entrambi coniugati ad ABC rispetto alla base BC, e sono perciò congruenti; così che l'angolo EBM è eguale all'angolo ZAC, e questo è uguale all'angolo SAB formato con AB dalla simmediana. Ma AS e BE stanno dalla medesima banda di AB, in modo che EBM ed SAB sono corrispondenti; in conseguenza BE è parallela alla simmediana AS e così pure CD; quindi ancora l'angolo CBE, o SBE, è eguale al suo alterno BSA, e, poichè gli angoli adiacenti del parallelogramma sono supplementari, l'angolo BCD è eguale all'angolo ASC. Così che gli angoli del parallelogramma sono eguali a quelli formati da BC con la simmediana AS.

PROBLEMA.

Piegare (o disegnare) la simmediana.

Piegato un triangolo qualunque ABC, se ne prolunghino i lati passanti per A. Si pieghi il foglio lungo la bisettrice dell'angolo esterno in A, punteggiata nella fig. 127 e, piegata in fuori la parte di foglio oltre BC, si costruisca mediante BC una retta GK.

Spiegato il foglio, bisechiamo il segmento GK

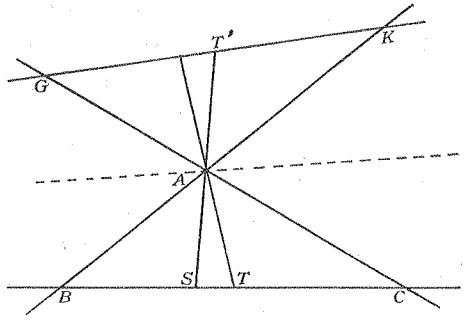


Fig. 127.

in T', sovrapponendo K a G. Con una piega congiungiamo il punto T' di bisezione, con A: se S è il punto in cui la piega incontra BC, AS è la simmediana.

Per dimostrarlo torniamo a far coincidere GK con BC, e perciò il punto T' col punto medio T di BC. Allora AT' è sovrapposta alla mediana, così che l'angolo KAT', opposto al vertice di SAB, è uguale a TAC; dunque TAS è la coniugata isogonale della mediana, cioè la simmediana.

Per disegnare la simmediana serve la stessa costruzione, quando si determinino i punti G e K per modo che AG sia eguale ad AB e AK ad AC.

TEOREMA.

Se sopra due lati di un triangolo si costruiscono dei rombi con un angolo eguale all'angolo al vertice del triangolo dato, la somma delle loro aree è uguale a quella del parallelogramma contenuto dalla base del triangolo e dalla sua base coniugata, con angoli eguali a quelli formati dalla base colla simmediana.

Quando il triangolo è rettangolo, questo consegue dal teorema di Pitagora, e può essere dimostrato in modo analogo. La fig. 128 corrisponde esattamente alla fig. 117, essendosi tenute nei due casi le medesime lettere. La parte sopra la linea BC consta del triangolo ABC, di due rombi sui suoi lati AB e AC, e del parallelogramma $AKLG$, il quale ha un'area doppia di quella del triangolo ABC.

La parte inferiore della figura comprende i due triangoli BME e CND, il triangolo PDE e il parallelogramma $BCDE$. Per ottenere questa parte della figura bisogna piegare AB e la sua bisettrice perpendicolare, così da avere il parallelogramma $AKLG$ a faccia in su nella parte inferiore del foglio: servendosi poi di esso come modello, si piega la figura inferiore: piegando contro KL, si ottiene ME, e poi contro AL, BE. Allora, per costruzione, il triangolo

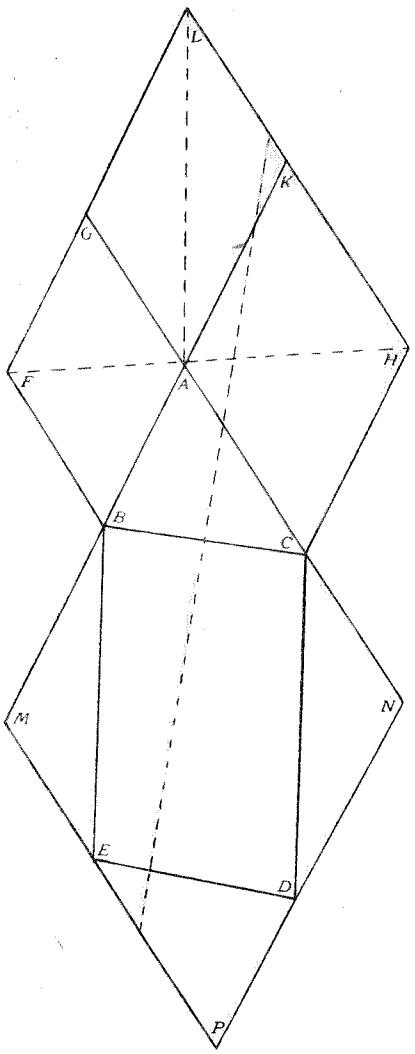


Fig. 128.

BME è congruente ad AKL. Analogamente si può piegare CND congruente ad AGL servendosi di una piegatura lungo AC e lungo la sua bisettrice perpendicolare.

I triangoli PDE e ABC sono allora congruenti, e si possono sovrapporre piegando lungo le diagonali BD e CE del parallelogramma $BCDE$.

Se ora tutta la figura viene ripiegata secondo BC e la sua bisettrice perpendicolare, la parte al disopra della base BC si può, in due pezzi, sovrapporre alla parte che sta sotto, come è indicato nella figura dalle due tinte.

E poichè, per l'avvenuta sovrapposizione, si sa che le due parti di figura poste al di sopra e al disotto di BC hanno aree uguali, e così pure che hanno aree uguali le porzioni triangolari, ne segue che le parti rimanenti sono eguali, e cioè che la somma delle aree dei due rombi equivale a quella del parallelogramma.

ESERCIZIO.

Teorema di Pappo. — Fate vedere mediante la piegatura, come nell'ultimo teorema, che, se si costruiscono sui lati AB, AC di un triangolo ABC due parallelogrammi quali si vogliono $BFGA$, $ACHK$, e i lati opposti FG, HK si prolungano ad incontrarsi in L, ed X, Y sono due punti di queste ultime rette tali che $BCXY$ sia un parallelogramma, si ha che l'area di questo parallelogramma, di base BC, equivale alla somma delle aree dei due parallelogrammi $BFGA$ ed $ACHK$ costruiti sui lati rimanenti del triangolo.

APPLICAZIONI.

1. — Esprimete con parole vostre ciò che intendete coi termini — superficie, superficie piana, linea, linea retta, punto. — Illustrate le vostre risposte riferendovi a un mattone, a una palla, a una stanza (§§ 1, 2).

2. — Dati tre punti in un piano, trovate quante rette si ottengono congiungendo i punti a due a due. Fate lo stesso per quattro e per cinque punti (§ 3).

3. — Fabbricate mediante un foglio di carta una figura rappresentante due rette non sul medesimo piano e un punto fuori di ciascuna di esse: fate vedere che esiste una e una sola retta che passa per il dato punto e incontra le due rette, e trovate quale sarà la sua posizione nella vostra figura (§ 3).

(Piegate il foglio lungo una retta qualunque, AC, e rappresenti una delle parti il piano che passa per la prima retta e per il punto, e l'altra il piano che passa per la seconda retta e per il punto. Questo sia rappresentato da un punto P della AC diverso da A e da C e le due rette siano AB e CD: la AC, intersezione dei due piani, è la retta unica che, passando per P, incontra AB e CD).

4. — Fate vedere che tre rette non giacenti sopra uno stesso piano e tali che s'incontrino a due a due passano tutte per uno stesso punto (§ 3).

5. — Fate vedere che tre rette non passanti per uno stesso punto e segantisi a due a due giacciono in un piano (§ 3).

6. — È dato un punto d'una circonferenza, ed è data pure una retta contenente il suo centro. Fate vedere come è possibile determinare un secondo punto della circonferenza, e dimostrate l'esattezza della costruzione indicata (§ 8).

7. — Costruire una circonferenza passante per un punto dato e avente il diametro eguale a un dato segmento. Trovare qual è il luogo dei centri di tali circonferenze e costruirlo (§ 8).

8. — Segnate tre punti A, B, C, ordinatamente da sinistra a destra, sopra una retta, e bisecate AB in M. Fate vedere che MC è metà della somma di AC con BC, ed MB è metà della differenza fra AC e BC (§ 9).

9. — Dati tre raggi OA, OB, OC seguentisi nel verso opposto al moto delle lancette dell'orologio a partire da OA, bisecate l'angolo AOB con un raggio OM: MOB è metà della differenza fra gli angoli AOC e BOC, ed MOC è metà della somma degli stessi angoli (§ 11).

10. — Descrivere una circonferenza di dato raggio per due punti dati (§ 13).

11. — Condotti quattro raggi o semirette OA, OB, OC, OD in ordine partendo da OA nel verso già detto, tali che l'angolo AOB equivalga all'angolo COD, e l'angolo BOC all'angolo DOA; a quante rette questi raggi dànno origine? (§ 13).

12. — Costruire un circolo di raggio un centimetro, il cui centro sia equidistante da tre punti dati A, B e C (§ 13).

13. — AB è un diametro d'un circolo e CD una sua corda qualunque. Condotti AM e BN perpendicolari a CD, dimostrare che CN e DM sono eguali (§ 13).

14. — In quante parti viene diviso il piano da quattro rette ottenute prolungando in ambo i sensi i lati di un rombo?

Disegnate una retta che attraversi tre delle parti, una che ne attraversi quattro e una che ne attraversi cinque. È possibile disegnare una retta che passi per meno di tre o più di cinque di tali parti? (§ 14).

15. — Fate vedere che due diagonali quali si vogliano di un parallelepipedo rettangolo s'incontrano e sono eguali in lunghezza.

Dimostrate pure che tutte le diagonali si tagliano nello stesso punto (§ 16).

16. — Presa una figura di parallelepipedo rettangolo, mostrate come si possa condurre un piano contenente tre diagonali di facce oppure contenente due diagonali di facce e una diagonale del parallelepipedo (§ 16).

17. — In quante porzioni viene diviso lo spazio dai piani ottenuti estendendo le faccie di un cubo? (§ 16).

18. — Piegate su un foglio di carta due rette che s'incontrino, e costruite una figura che mostri la retta perpendicolare a entrambe nel loro punto d'intersezione.

(Siano OA, OB le due rette: piegate OC perpendicolare a OA, dalla banda di questa opposta al raggio OB, e piegate OD perpendicolare ad OB dalla banda di essa opposta ad OA. Portate insieme OC e OD ad essere verticali, mentre OA ed OB sono orizzontali: i due raggi OC e OD uniti formano la perpendicolare voluta). (§ 18).

19. — Mostrate, servendovi della figura precedente, che, se OK è una retta qualunque per O, OK non è perpendicolare ad OC (la perpendicolare costruita) se non giace nel piano OAB.

Con questo dimostrate che tutte le rette perpendicolari a una retta data passanti per un dato punto di essa giacciono in un medesimo piano (§ 18).

20. — Fate vedere che esiste un solo piano perpendicolare a una retta per un suo punto e costruite una figura di carta che lo mostri (cfr. n. 18).

21. — Siano A e B due punti dati, e P un punto equidistante da ognuno di essi. Fate vedere che, se per P si conduce una perpendicolare al piano ABP, ogni punto di questa è equidistante da A e da B.

Fate vedere pure che un punto non appartenente

a una tale perpendicolare non dista egualmente da A e da B (§ 18 e n. 18).

22. — L ed M sono i punti medî dei lati eguali AB, AC d'un triangolo isoscele ABC, e BM, CL si tagliano in O. Far vedere che AO è perpendicolare a BC (§ 19, si pieghi).

23. — In quante parti viene diviso un piano da tre rette ottenute prolungando i lati di un triangolo?

(Una parte si distingue qui, come già precedentemente, per il fatto che due punti nella stessa parte si possono congiungere con un segmento che non incontra alcuna delle tre rette, mentre non si può far ciò per due punti in parti diverse). Quali di queste parti sono porzioni infinite di piano? (§ 19).

24. — Costruire una retta passante per quattro di tali parti. È possibile far passare una retta per più di quattro parti? (§ 19).

25. — Disegnato un triangolo ABC in cui il lato AB sia eguale al lato AC, costruire sul lato BC, dalla banda opposta di A, un quadrato $BDEC$. Congiunto A con D e con E, far vedere che il triangolo ADE è isoscele (mediante la piegatura. §§ 15 e 19).

26. — ABC è un triangolo isoscele, avente uguali i lati AB e AC: D è il punto in cui la bisettrice dell'angolo ABC incontra il lato opposto AC, ed E il punto in cui la bisettrice dell'angolo ACB incontra AB. Disegnare questa figura, e far vedere che $BD = CE$ (§ 19).

27. — Nella stessa figura disegnare le bisettrici BK e CL degli angoli esterni formati dalla base BC coi prolungamenti dei lati, ACK e ABL, e far vedere che $BK = CL$ (§ 19).

28. — Trovare, sopra un lato di un triangolo, un punto equidistante dagli estremi di uno degli altri lati (§ 19).

29. — AX e BY sono segmenti di perpendicolare condotti da due punti A e B sopra una retta XY, e la somma delle loro lunghezze vale la lunghezza di XY: trovare su XY un punto O tale che l'angolo AOB sia retto (§ 19).

30. — È nota la base di un triangolo e si conosce la lunghezza del segmento congiungente il suo punto medio col vertice opposto: è poi dato che la lunghezza di uno dei lati è metà di quella della base. Costruire il triangolo (§ 19).

31. — Costruire un triangolo equilatero di data altezza (§ 20).

32. — Far partire da un punto sei segmenti di egual lunghezza formanti fra di loro angoli eguali (§ 21).

33. — Se per l'ortocentro di un triangolo equilatero ABC è condotta una retta perpendicolare al piano del triangolo, ogni punto equidistante dai tre vertici del triangolo giace su questa retta (§§ 18 e 20).

34. — ABC è un triangolo equilatero, e le perpendicolari AL, BM, condotte da A e B sui lati opposti,

si incontrano in O. Far vedere che $AO = BO$, che $OL = OM$ e che $AO = 2OL$.

Valendosi di questo, far vedere che le tre perpendicolari condotte da A, B e C sui lati opposti concorrono in uno stesso punto.

(Il punto O è l'*ortocentro* del triangolo equilatero) (§ 20).

35. — Far vedere che le diagonali delle facce di un parallelepipedo rettangolo giacciono a tre a tre in piani nessuno dei quali contiene una diagonale del parallelepipedo. — Far vedere pure che per una diagonale qualunque di una faccia passano due di questi piani, i quali tagliano dal solido dei tetraedri non regolari (§ 23).

36. — In quante porzioni viene diviso lo spazio dai piani ottenuti prolungando le facce di un tetraedro?

Indicare come scegliere due delle parti così che i segmenti congiungenti un punto dell'una con un punto dell'altra incontrino uno solo dei piani.

Indicare come scegliere le due parti così che i segmenti debbano incontrare due dei piani (§ 23).

37. — Quali degli spigoli del battello di punta sono perpendicolari alla faccia 2? (§ 23).

È qualcuno degli spigoli del tetraedro di punta perpendicolare a una delle sue facce? (§ 23).

38. — V è il vertice in alto di un tetraedro regolare $VABC$, e la perpendicolare da V sul piano ABC incontra questo in O: far vedere che O è l'ortocentro del triangolo ABC.

(La lunghezza OV è detta l'altezza del tetraedro) (§ 23 e n. 33).

39. — Costruire un segmento eguale all'altezza di un dato tetraedro regolare (§ 23).

40. — Costruire un tetraedro regolare di data altezza (§ 23).

41. — Far vedere che la perpendicolare condotta dal vertice A sulla faccia VBC del tetraedro regolare $VABC$ incontra la perpendicolare condotta da V sul piano ABC. (Entrambe giacciono nel piano che passa per AV e biseca BC) (§ 23).

42. — Le perpendicolari condotte da ciascun vertice di un tetraedro regolare sulla faccia opposta s'incontrano in un punto G (§ 23). (Servirsi del numero precedente).

G è detto *centro di gravità* del tetraedro: se questo viene sospeso per un vertice, si dispone in modo che la linea di sospensione passi per il centro di gravità.

43. — Far vedere che il centro di gravità di un tetraedro è equidistante dai quattro vertici: costruire un segmento eguale a questa distanza per un tetraedro dato (§ 23).

44. — Costruite un triangolo di cui due angoli valgano rispettivamente due terzi e metà di un angolo retto, e la lunghezza della perpendicolare condotta dal vertice del terzo angolo sul lato opposto valga la larghezza massima del vostro dito pollice quando è appoggiato sul foglio (§ 24).

45. — Dimostrare che, se ABC è un triangolo acutangolo, la somma delle perpendicolari condotte dai vertici sui lati opposti è maggiore della metà della somma dei lati del triangolo (§ 24).

46. — La differenza fra le lunghezze di due lati d'un triangolo è minore della lunghezza del terzo lato (§ 24).

47. — ABC è un triangolo rettangolo isoscele, ed M è il punto medio dell'ipotenusa BC. Sopra AM, dalla stessa banda di C, è disegnato un triangolo equilatero DAM. Far vedere che CD è minore della metà di BC (§ 24).

48. — ABC è un triangolo equilatero. D è un punto su AB, E su BC ed F su DCA, tali che AD, BE e CF siano eguali. Il triangolo DEF è equilatero (§ 25).

49. — Far vedere che sopra un triangolo qualunque ABC preso come base si può costruire un tetraedro $ABCD$ tale che gli angoli ADB, BDC e CDA siano tutti retti (§ 23).

(Serve la figura di un cubo. Sia stato il triangolo ABC disegnato abbastanza piccolo perchè nessuno dei suoi lati superi la diagonale di una faccia del cubo. Lo si taglia via e, fatto passare il resto del foglio per un vertice del cubo, si adattano per bene i segmenti sulla superficie di questo e se ne disegnano le traccie. Il tetraedro richiesto è allora (analogamente al tetraedro di punta quando il triangolo ha tutti i lati eguali alla diagonale di una faccia del cubo) determinato su una punta della figura.

50. — Se $ABCD$ è un tetraedro tale che gli angoli ADB, BDC e CDA siano retti, la perpendicolare condotta dal vertice D sul piano ABC incontra ognuna delle perpendicolari congiungenti i vertici del triangolo ABC coi lati opposti.

(Serve anche qui la figura di un cubo. La perpendicolare richiesta giace nel piano condotto per D perpendicolarmente ad AB: questo piano si vede agevolmente nella figura, poichè esso contiene DC: taglia il piano ABC secondo la perpendicolare che parte da C e va sopra AB.

51. — Far vedere che le tre perpendicolari condotte dai vertici di un triangolo sui lati opposti s'incontrano in un punto (n. 50).

(Tale punto è detto *ortocentro del triangolo*).

52. — ABC è un triangolo qualunque. Sopra BC e AC, esternamente al triangolo, sono descritti due triangoli equilateri.

I triangoli ACD e BCD sono congruenti.

Descritto anche su AB un triangolo equilatero ABF, esterno ad ABC, AD, BE e CF sono eguali (§ 25).

53. — Costruire un triangolo date le lunghezze della sua base e della mediana e dell'altezza ad essa relative. È possibile ottenere altri di tali triangoli non direttamente congruenti al primo? (§ 25).

54. — Nella figura del n. 18 scegliete un punto

arbitrario L di OC e disegnate una parallela LM ad OA. Fate vedere che:

a) OB ed LM sono rette sghembe, e OC le taglia entrambe ad angolo retto;

b) OC è la sola retta che incontri perpendicolarmente le due rette sghembe;

c) Se P e Q sono punti presi rispettivamente su OB ed LM, diversi da O e K, PQ è maggiore di OK (§ 24).

(OK è detta la *minima distanza* fra le due rette sghembe);

d) La lunghezza della minima distanza fra due rette sghembe è uguale a quella del segmento di perpendicolare condotto da un punto di una delle due rette, per es. LM, sul piano parallelo ad essa e passante per l'altra (§ 26).

55. — Sopra la figura di un cubo (o di un parallelepipedo rettangolo) trovate due spigoli sghembi l'uno all'altro e trovate pure la loro minima distanza. (§ 26).

56. — Sulla figura del tetraedro regolare segnate due spigoli sghembi l'uno all'altro. Trovate il piano passante per una di queste rette e perpendicolare all'altra, e segnatene l'intersezione colla superficie del tetraedro.

Fate vedere che la minima distanza fra i due spigoli sghembi deve giacere in tale piano e trovate quindi i punti in cui essa incontra i due spigoli.

57. — Sopra una faccia qualunque di un cubo disegnate una retta e trovate la minima distanza fra questa e uno degli spigoli del cubo perpendicolare alla faccia.

58. — Si taglia una circonferenza con due rette parallele. Fate vedere piegando che la circonferenza è divisa in quattro archi di cui due almeno sono eguali (§ 26).

59. — Se due degli archi sono diseguali, fate vedere che le rette congiungenti i loro estremi s'incontrano a due a due sul diametro della circonferenza perpendicolare alle due rette parallele (colla piegatura) (§ 26).

60. — Costruire il luogo di un punto equidistante da due rette parallele (§ 26).

61. — Costruire un triangolo date la lunghezza della base e quelle dell'altezza e della mediana relative a uno dei lati. (Far uso dell'esercizio precedente) (§ 26).

62. — Da un punto dato condurre una retta tale che la porzione di essa intercetta fra due parallele giacenti nel piano del punto abbia una data lunghezza, maggiore della distanza perpendicolare fra le parallele (§ 26).

63. — Se due piani sono paralleli, ad ogni retta dell'uno corrisponde una parallela nell'altro (§ 27).

64. — Se due piani sono paralleli, ogni retta parallela all'uno o è parallela all'altro o giace in esso (§ 27).

65. — Due piani sono paralleli a due altri che s'incontrano lungo una retta AB: fate vedere che i due primi piani s'incontrano pure, e che la loro intersezione è parallela ad AB (§ 27).

66. — Se una retta incontra un piano, incontra pure ogni piano parallelo a quello (§ 27).

67. — Disegnate una retta su una qualunque delle faccie di un cubo: trovate e disegnate, sulla faccia opposta, la parallela la cui distanza dalla prima è uguale a una lunghezza data, minore della diagonale di una faccia del cubo e maggiore dello spigolo del cubo stesso (§ 27).

68. — Se una retta è perpendicolare a un piano, è perpendicolare a ogni piano parallelo al dato (§ 27).

69. — Disegnato un quadrato $ABCD$, bisecate AD in E, e congiungete questo punto col centro O del quadrato. Conducete EF perpendicolare ad EB, che incontri in F il prolungamento di CA. Fate vedere che:

a) i triangoli EAF ed EOB sono congruenti;

b) CF è diviso in tre parti eguali nei punti O ed A (mediante la piegatura) (§ 29).

70. — ABC è un triangolo equilatero, e le perpendicolari tirate da A e da B sui lati opposti s'incontrano in O. Costruire il triangolo equilatero di base OC dalla banda di OC opposta a B, e far vedere che l'area del triangolo ABC è tripla di quella del secondo triangolo (§ 29).

71. — Sopra un segmento dato come base costruire un triangolo isoscele di cui ognuno degli angoli alla base valga un decimo dell'angolo al vertice (§ 29).

72. — ABC è un triangolo equilatero, BD è perpendicolare alla base BC e incontra il prolungamento di CA in D: E è il punto medio di BD. Disegnata questa figura, far vedere che AE e CB sono parallele.

Far vedere pure che, se ABC non è isoscele, AE e CB non sono parallele (§ 29).

73. — AB, BC sono segmenti eguali posti di seguito su una medesima retta e, su BC come base, si descrive un triangolo MBC equilatero. Far vedere che, se N è il vertice di un triangolo equilatero descritto con base AM, dalla banda opposta a B, l'angolo MAB è retto (§ 29).

74. — A quanti retti equivale la somma degli angoli di un esagono? (§ 29).

75. Dati due punti A e B e una retta m, disegnare una retta parallela ad m ed equidistante da A e da B (§ 29).

76. — Due angoli coi lati paralleli sono o eguali o supplementari (§ 29).

77. — Dato un triangolo isoscele, trovare di quanto la somma degli angoli esterni formati dalla base coi prolungamenti dei lati supera l'angolo al vertice (§ 29).

78. — ABC è un triangolo isoscele i cui lati eguali sono AB, AC: da B è condotta una perpendicolare sul lato opposto AC, e incontra questo in D. Dise-

gnare la figura, e far vedere che l'angolo DBC è metà dell'angolo al vertice (§ 29).

79. — L'angolo compreso fra la bisettrice dell'angolo al vertice di un triangolo e la perpendicolare condotta da quel vertice sulla base equivale alla metà della differenza fra gli altri angoli del triangolo (§ 29).

80. — Sopra un segmento dato come base costruire un triangolo isoscele il cui angolo al vertice sia quadruplo dell'angolo alla base. Quanti gradi misurerà l'angolo al vertice? (§ 29).

81. — Un lato BC di un triangolo ABC è prolungato in D: bisecare gli angoli BAC, CAD, e far vedere che le bisettrici non possono essere parallele (§ 29).

82. — Fate vedere mediante la vostra figura rappresentante la sfera che un piano condotto per un punto qualunque della superficie sferica taglia questa in una circonferenza il cui centro è sul diametro perpendicolare al piano e il cui raggio è minore di quello di un cerchio massimo della sfera se il piano non passa per il suo centro. (Si dice allora che si ha nella sfera un *circolo minore*) (§ 8, 18, 30).

83. — Costruire una figura di carta rappresentante una sfera con due meridiani, l'equatore, e due circoli minori i cui piani siano perpendicolari all'asse polare.

(Le circonferenze dei circoli minori si chiamano linee di latitudine, e quelle dei meridiani linee di longitudine).

Si può costruire colla carta una figura con quante si vogliono linee di longitudine e di latitudine (§ 8 e numero precedente).

84. — In un triangolo rettangolo la differenza fra i due angoli acuti è uguale all'angolo compreso fra la perpendicolare all'ipotenusa dal vertice opposto e la mediana uscente dallo stesso vertice (§ 30).

85. — Un segmento di data lunghezza si muove mantenendo i suoi estremi su due rette che s'incontrano ad angolo retto. Colla vostra riga determinate tre posizioni del punto medio P del segmento: trovate qual è il luogo del punto P per le varie posizioni del segmento, e costruitelo (§ 30).

86. — Costruire un triangolo rettangolo con uno degli angoli acuti doppio dell'altro, e far vedere che l'ipotenusa è doppia di uno dei cateti (§ 30).

87. — Costruire un triangolo in cui il punto medio di un lato sia equidistante dai tre vertici. Che cosa sappiamo riguardo agli angoli di un tale triangolo? (§ 30).

88. — Costruire un triangolo rettangolo date le lunghezze dell'ipotenusa e di un cateto (§ 30).

89. — ABC e DEF sono due triangoli rettangoli aventi eguali i cateti AB, DE e il cateto AC maggiore del cateto DF. Far vedere che l'ipotenusa BC è maggiore dell'ipotenusa EF (§ 30).

90. — Secondo le misure agrarie romane l'area di un triangolo equilatero di un centimetro di lato sa-

rebbe ritenuta eguale a mezzo centimetro quadrato. È giusto? Se no, l'area supposta è troppo grande o troppo piccola? E perchè? Costruire sopra una base lunga un centimetro un triangolo isoscele di area un mezzo centimetro quadrato (§ 31 con o senza il § 32).

91. — Dimostrare che il quadrato della diagonale di un cubo è tripla del quadrato del suo spigolo (§ 32).

92. — Il quadrato della diagonale di un parallelepipedo rettangolo equivale alla somma dei quadrati di tre spigoli concorrenti in un vertice (§ 32).

93. — Costruire una figura rappresentante un cubo, date la lunghezza della sua diagonale e la lunghezza della diagonale di una delle sue faccie (§ 32).

94. — Costruire un triangolo ABC in cui BC sia lungo sei centimetri, AB cinque centimetri, e la perpendicolare da A su BC quattro centimetri: dimostrare che il triangolo ottenuto è isoscele. (§ 32).

95. — I lati di un triangolo valgono rispettivamente 3 cm.; 4 cm.; e 5 cm. Far vedere che esso è rettangolo (§ 32).

96. — ABC è un triangolo isoscele e D un punto della base BC. Condotte da D due parallele ai lati eguali AB, AC, dimostrare che la somma delle porzioni di esse comprese nel triangolo equivale a uno dei due lati eguali (§ 33).

97. — ABC è un triangolo equilatero, e D un suo punto interno. Condotte per D le parallele ai lati del triangolo, far vedere che la somma delle porzioni di esse comprese nel triangolo stesso equivale al doppio del lato (§ 33).

98. — Essendo $ABCD$ un parallelogramma, se ne costruisca un altro ad esso circoscritto $PQRS$, in modo che ogni vertice di $ABCD$ stia sopra un lato di $PQRS$.

Far vedere che i segmenti in cui ciascun lato di $PQRS$ viene diviso dal vertice di $ABCD$ che sta su di esso hanno la stessa lunghezza qualunque sia il lato (§ 33).

99. — Servendosi dell'esercizio precedente, iscrivere un parallelogramma in un altro così che ogni vertice di questo stia su ciascun lato dell'altro (§ 33).

100. — Trovare il punto O d'intersezione delle diagonali di un parallelogramma $ABCD$, e far vedere che ogni segmento passante per O e avente i termini sui lati opposti del parallelogramma è dimezzato in O. (Il punto O dicesi *centro* del parallelogramma) (§ 33).

101. — Dati due parallelogrammi $ABCD$, $PQRS$, tali che ciascun vertice del secondo stia su ciascun lato del primo, far vedere che i due parallelogrammi hanno lo stesso centro (§ 33).

102. — Costruire un triangolo equilatero tale che la sua area sia eguale a quella di:

1) Un dato quadrato;
2) Un dato rombo;
3) Un dato rettangolo;
4) Un dato parallelogramma;
5) Un dato esagono regolare (§ 33).

103. — Costruire un triangolo equilatero la cui area sia eguale alla somma delle aree delle faccie di:

1) Un dato tetraedro regolare;
2) Un dato cubo;
3) Un dato cuneo (mezzo cubo);
4) Un dato parallelepido rettangolo (mezzo cubo);
5) Un dato doppio tetraedro regolare;
6) Un dato tetraedro di punta;
7) Un dato ottaedro regolare (§ 33).

104. Preso un triangolo ABC, bisecare i lati BC in L, CA in M, AB in N. Sia O il punto d'incontro delle mediane AL, BM. Far vedere che il triangolo OAB è doppio del triangolo OLB, che $OA = 2OL$, $OB = 2OM$.

Far vedere in conseguenza che le tre mediane s'incontrano in un medesimo punto, O.

O si chiama il *centro di gravità* del triangolo (§ 33).

105. — Bisecare i lati AB e AC di un triangolo ABC in D ed E rispettivamente, e far vedere che l'area del triangolo DBC è doppia di quella del triangolo DEC (§ 33).

106. — Se due triangoli ABC e DEF hanno la stessa area e le basi eguali, BC, EF, su una stessa retta, far vedere che la retta AD è parallela a BC (§ 33).

107. — Dati due triangoli KBC, LBC di egual area, costruiti da una stessa banda della base BC dimostrare che KL è parallela a BC (§ 33).

108. — Bisecare i lati AB, AC di un triangolo ABC in K ed L, e far vedere che KL è parallela a BC (§ 33).

109. — Se BC e DF sono segmenti eguali posti su una stessa retta, e A e B sono due punti dalla stessa banda di quella retta tali che i triangoli ABC e DEF abbiano la stessa area, far vedere che AD è parallela a BC (§ 33).

110. — Trovato il centro E di un parallelogramma $ABCD$, segnare su AB un punto qualunque P, congiungerlo con E, e prolungare il segmento ad incontrare CD in Q: far vedere che $AP = CQ$ (§ 33).

111. — Essendo E il centro di un parallelogramma $ABCD$, i triangoli AEB, CED hanno area eguale (§ 33).

112. — Preso un punto E sulla diagonale AC d'un parallelogramma $ABCD$, far vedere che i triangoli EAB, EAD hanno area eguale (§ 33).

113. — Dati due triangoli ABC, LMN, siano AD, LP le perpendicolari condotte da A su BC e da L su MN.

Far vedere che, se $AB = MN$, e $LP = BC$, i triangoli hanno area eguale. (Ognuno è equivalente a un certo triangolo rettangolo) (§ 33).

114. — Far vedere come si possa dividere l'area del triangolo in 2, 4, 8, 16,... parti eguali (§ 33).

115. — Le bisettrici degli angoli di un parallelogramma dànno luogo incontrandosi a un rettangolo (§ 33).

116. — ABC è un triangolo, M il punto medio dell'ipotenusa, ed AE la bisettrice dell'angolo retto. AE biseca l'angolo formato dalla AM e dalla perpendicolare AB sull'ipotenusa (§ 33).

117. — Dal vertice D d'un parallelogramma $ABCD$ è condotta una retta a incontrare BC in E e il prolungamento di AB in F. I triangoli ABE, FEC hanno area eguale (§ 33).

118. — Iscrivere in un dato rombo un rettangolo di area metà di quella del rombo (§ 33).

119. — Dimostrare che un quadrilatero i cui lati opposti sono eguali è un parallelogramma (§ 33).

120. — Dimostrare che la somma delle lunghezze delle diagonali di un parallelogramma è minore della somma dei lati e maggiore della loro semisomma (§ 33).

121. — Il segmento DE, congiungente i punti medi, D, E, dei lati BC, CA di un triangolo vale la metà del lato AB. Dedurne che il segmento DE è bisecato dalla retta CF congiungente C col punto medio F di AB (§ 33).

122. — Due parallelogrammi qualsiensi, $ABDE$, $ACFG$, sono disegnati esternamente sui lati AB, AC di un triangolo ABC, e DE, FG s'incontrano in H. Far vedere che, se si descrive su BC il parallelogramma $BKLC$, coi lati BK, CL eguali e paralleli ad AH, l'area di questo parallelogramma vale la somma delle aree dei parallelogrammi AD e AF (§ 35).

INDICE ANALITICO

Acqua tranquilla, 16.
Adiacenti angoli, 81.
Altezza, 191.
Angolare diametro, 64.
Angoli diseguali, 71.
» supplementari, 80.
» adiacenti, 81, 116.
» opposti al vertice, 81.
» alterni, interni ed esterni, 172.
» al vertice, 120.
» fra due parallele e una loro segante, 171.
» di un rombo, 89.
» di un triangolo, 120, 121, 123, 143, 175.
» interni opposti, 146, 173.
» di un parallelogramma, 187.
Angolo sotteso, 63.
» acuto, ottuso, 80, 142.
» retto, 64, 75, 77, 116, 144, 174.
» piatto, 75.
» concavo, 74.
Arco di circonferenza, 66 seg
Area del circolo, 44, 55.
» del rombo, 89.
» del quadrato, 99.
» del triangolo, 122, 149, 178, 189.
» dell'esagono, 128.
» del rettangolo, 179.
» del parallelogramma, 187, 189 seg.
Asse, 51.
Assioma, 8, 36, 37, 40, 59, 159.
Associate linee, 195.

Banda di una retta, 31.
Base, 120, 191, 194.
Battello di punta, 134, 166 seg.
Bisettrice, 69.
Bisezione, 57, 68.

Carena, 134, 166.
Carta, foglio di, 21.
» riga di, 4, 40, 58.
Cavo, 18, 21.
Centimetro, 38.
» quadrato, 180.
Centro del circolo, 42.
» della sfera, 50.
» del cubo, 112.

Cilindro, 27 seg.
Circolo, 11, 41, 177.
» massimo, 52.
» minore, 53.
Circonferenza, 6, 55.
Circoscritto, 98.
Coincidere, 39.
Complementari archi, 67.
Concavo, 18.
» angolo, 74.
Concentrici circoli, 56.
Congiungere, 8.
Congruenti, 54, 100, 139, 149 seg.
Coniugati triangoli, 193 seg.
Cono, 28 seg.
Contatto, 86.
Contenuto, 117.
Convesso, 19.
Corda, 67.
Cordicella, 12.
Corrispondenza, 16 nota.
Cubo, 102 seg.
Cuneo, 109.
Curva linea, 6, 32.

Destra, 18, 188.
Diagonale, 23, 88, 90, 97, 108, 187.
Diametro, 43.
» angolare, 64.
Dimostrazione, 59.
Diretta congruenza, 152.
Divisione del piano, 31.
» dello spazio, 3.
Doppio tetraedro, 135, 140.

Eguali rette (segmenti), 35.
» angoli, 61.
Emisfero, 19, 52.
Equatore, 50.
Equilatero, 121, 123.
Esagono, 127.
Esterno, 3.
» di un angolo, 34.
» di un circolo, 44.
» di una sfera, 53.
» di un rombo, 89.

Faccia, 21, 105, 164, 170.
Filo a piombo, 13.
Forma, 2.

Grado angolare, 63.

Infinito, 2, 9, 27, 40.
Iniziale linea, 73.
Inscritto quadrato, 98.
Interno, 3.
» di un angolo. 34.
» di un circolo, 44.
» di una sfera, 53.
» di un rombo, 89.
Intersezione, 11, 25, 85, 162.
Involucro sferico, 18.
Ipotenusa, 176, 182.
Isogonali linee, 195.
Isoscele, 120.

Lama temperare a, 6.
Larghezza, 11.
Lati dell'angolo, 33.
Lato di un triangolo, 147.

Lato d' un parallelogramma, 186.
Limitare, 33, 127, 187.
Limite, circuito, 44, 89, 100.
Linea retta, 4 seg.
» curva, 6.
» spezzata 6.
Linee isogonali, 195.
Logica, 59.
Losanga, 141.
Luce, 9.
Luna, 9, 64.
Lunghezza, 11, 40.
Luogo, 42, 52.

Maggiore, 35 seg.
» angolo, 71 seg., 147.
» area, 99.
Mediana, 196 seg.
Meridiano, 51.
Metà, 58.
Metro, 38.
Minore, segmento, 35 seg.
» angolo, 71 seg.
» area, 99.
Misure d'area, 101,
Modello di linea retta, 5.
» d'una superficie cilindrica, 27.
» d'una superficie conica, 29.
» d'un angolo, 34.
» d'un angolo retto, 78.
» d'una sfera, 48, 50.
» d'un cubo, 103.

Modello di due cunei, 109.
» di parallelepipedi, 114, 115.
» del tetraedro di punta, 130.
» del cubo mancante di una punta, 133.
» del battello di punta, 135.
» del doppio tetraedro, 136.
» del tetraedro regolare, 140.
» del tetraedro regolare senza una punta, 165.
» del tetraedro regolare senza due punte, 168.
» dell'ottaedro regolare, 169.
Multipli d'angoli, 62.

Nord, 51.
Numero, 16 nota.

Oggetto, 1.
Opposto, 31, 81, 89.
» al vertice, 81.
Orizzontale, 17, 120.
Orologio, 73.
Ottaedro, 167.
Ottante, 52.
Ottuso, 80, 142.

Pappo teorema di, 201.
Parallele rette, 155 seg., 169.
Paralleli retta e piano, 162.
» piani, 164.
Parallelepipedo rettangolo, 21, 113.
Parallelogramma, 186.
Perpendicolare, 75 seg., 118.
Piano, 13.
Piega 5, 60, 83.
Pisa torre pendente di, 13.
Pitagora, teorema di, 182.
Polo, 51.
Porzione di retta, 8.
» di piano, 14.
Posizione, 2.
Principio di sovrapposizione, 35.
Prolungare, 8.
Punta, vertice 21, 129, 171.
» battello di, 134, 165 seg.
Punti, 7.
Punto giacente fra (due punti), 12.

Quadrante, 52.
Quadrato, 95, 117.
Quadrilatero, 116.

Raggio, 10, 40, 71.
» di una circonferenza, 43.
» di una sfera, 52.
Regolare, 127, 138, 167, 171.
Retta, 4 seg., 28.
Rettangolo, 95, 116, 187.
Riflessione, 45.
Rombo, 88 seg., 117, 192 seg., 200.
Rotare, 42, 47, 71.

Sapone, 21.
» bolla di, 53.
Segmento, 8.
Semicirconferenza, 45.
Semiretta, 10, 40.
Senso, 9.
Sezione, 139.
Sfera, 19, 47.
Sferica superficie, 52.
Sferico involucro, 18.
Sghembo, 163.
Simmediana, 196 seg.
Simmetria, 45, 89, 97, 112.
Sinistra, 18, 188.
Soldo, 11, 63.
Sole, 1, 63.
Solido, 1, 21.
Sottendere, 35, 63.
Sovrapposizione, 35, 58, 59, 66, 83, 184, 201.
Spazio, 1.
Spezzata linea, 6.
Spigolo, 13, 22, 105, 171.
Spillo, 41.
Stella 1, 10, 22.
Sud, 51.
Superficie, 1, 20, 53.
» piana, 13.
» sferica, 52.

Supplementari angoli, 79.
Sviluppo, 102.

Tetraedro di punta, 129.
» doppio, 135.
» regolare, 138, 171.
» regolare raddoppiato, 140.
Terra, 51.
Tratto, 8 seg.
Triangolo, 142 seg.
» rettangolo, 176.
» rettangolo isoscele, 128.
Triangolo coniugato, 193.
» isoscele, 120.
» equilatero, 121, 123, seg.
Tutto, 40.

Unità lineari, 38.

Verticale retta, 12, 119.
» piano, 15.
Vertice, 21, 29, 33, 105, 120, 127, 129.
Volume, 1.