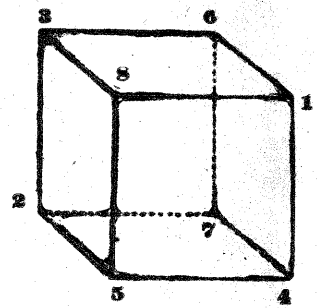
Serie — SCIENZE. N. 12.

ALESSANDRO PADOA

ARITMETICA INTUITIVA

CON APPLICAZIONI GEOMETRICHE

Volume II. — *I numeri razionali*



CUBO MAGICO — In ciascuna delle 6 faccie, la somma dei numeri situati nei 4 vertici è sempre la stessa.

MATHESIS
SOCIETÀ ITALIANA DI SCIENZE
E MATEMATICHE

1924

REMO SANDRON — EDITORE

xam
1923
PADO
2

ARITMETICA INTUITIVA

MATHESIS
SOCIETÀ ITALIANA DI SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

UNIVERSITÀ DI TORINO
ISTITUTO DI MATEMATICHE COMPLEMENTARI

ALESSANDRO PADOA

ARITMETICA INTUITIVA

CON APPLICAZIONI GEOMETRICHE

Volume II

I NUMERI RAZIONALI

In conformità dei Programmi Ufficiali del 14 ottobre 1923

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Quadrato magico del pittore A. Dürer

Lin. MC 87 D1

UNIVERSITÀ DI TORINO
ISTITUTO DI MATEMATICHE COMPLEMENTARI

1924
REMO SANDRON — EDITORE
LIBRAIO DELLA REAL CASA
PALERMO-MILANO-NAPOLI-BOLOGNA-GENOVA-TORINO-FIRENZE

Proprietà artistico-letteraria dell'Editore
REMO SANDRON

Offic. Tipogr. Sandron 1165 — II — 110724

CAPITOLO I

I NUMERI RAZIONALI

§ 1. — Le frazioni ordinarie ed i numeri misti

1. — Una mamma vuol spartire, tra i suoi 4 figlioli, 8 pere e 3 mele.

Poichè 8 è divisibile per 4, la partizione delle pere non presenta alcuna difficoltà.

Ad ogni bimbo, la mamma ne dà

$$8 : 4 = 2.$$

2. — Per spartire le 3 mele fra i 4 bimbi, a ciascuno la mamma dovrebbe darne

$$3 : 4.$$

Ma 3 non è divisibile per 4.

3. — Perciò, la mamma taglia una mela in 4 ***parti eguali*** e ne dà ***una*** a ciascun bimbo.

Poi, taglia una seconda mela in 4 parti e ne dà ***una*** a ciascun bimbo.

Infine, taglia la terza mela in 4 parti e ne dà *una* a ciascun bimbo.

Ciascuna di quelle parti è ***un quarto*** di mela.

Ogni bimbo ha avuto ***tre quarti*** di mela.

4. — Come, pensando alle pere, abbiamo detto che

8 diviso 4 fa *due*,

così, pensando alle mele, dobbiamo dire che

3 diviso 4 fa *tre quarti*.

5. — Ma Pierino alza la mano.

Vi rammentate di Pierino?

È un fanciullo giudizioso e attento. Gli piace capir bene e, quando gli sorge qualche dubbio, lo dice franamente; aspettando però che il discorso sia finito, per non importunare.

E le spiegazioni date a lui riescono utili a tutti: anche a coloro che, pur comprendendo meno di Pierino, non chiedono mai nulla, per tema di sfigurare.

Ascoltiamo dunque Pierino.

6. — A me pare — egli dice — che, se si ha ragione ora, dicendo che

3 *diviso* 4 fa tre quarti,

allora si aveva torto prima, dicendo che

3 *non è divisibile* per 4.

7. — Apparentemente, Pierino ha ragione.

Ma, dicendo che

3 *non è divisibile* per 4,

noi intendevamo dire semplicemente che *nessun numero naturale*, moltiplicato per 4, dà per prodotto 3.

Ciò era vero, è ancora vero e sarà sempre vero.

E non impedisce di dire che

3 *diviso* 4 fa tre quarti,

perchè *tre quarti* non è un *numero naturale*.

8. — E che cos'è *tre quarti*?

È una ***frazione***.

La si indica con una delle *scritture*

$$\frac{3}{4} \quad \text{ovvero} \quad 3/4.$$

Voi userete la prima, che è più *chiara*; mentr'io userò anche la seconda, che riesce più *comoda* allo stampatore.

9. — Rammentiamo che, nello spartire 3 mele fra 4 bimbi, ciascuno di questi ha avuto *tre quarti* di mela.

La parola *tre* serve a *numerare* i pezzi di mela e la parola *quarti* serve a *nominarli*.

Quindi, parlando della frazione 3/4, si dice che 3 è il suo ***numeratore*** e che 4 è il suo ***denominatore***.

10. — Ove non occorra distinguerli fra loro, il ***numeratore*** ed il *denominatore* si chiamano i ***termini*** della ***frazione***.

11. — Possiamo dunque scrivere:

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

e leggere:

tre diviso *quattro* fa *tre quarti*.

12. — Nuovamente, Pierino alza la mano.

— Se «3 : 4» *è lo stesso che* 3/4, allora — egli chiede — perchè adoperare la nuova scrittura 3/4?

13. — Questa volta, Pierino ha proprio ragione: dovunque si trova scritto 3/4, si potrebbe mettere invece « 3 : 4 », e viceversa.

Ma riesce *comodo* disporre di due scritture, per adoperare or l'una or l'altra, con intenzione diversa.

Invero, ad es., chi legge

$$8 : 4 = 2$$

pensa ad una *divisione*, di cui 8 è il *dividendo*, 4 è il *divisore* e 2 è il *quoto*.

Istessamente, chi legge

$$3 : 4 = \frac{3}{4}$$

pensa ad una *divisione*, di cui 3 è il *dividendo*, 4 è il *divisore* e 3/4 è il *quoto*.

14. — Sicchè, mentre la scrittura « 3 : 4 » indica una *divisione da eseguire*, invece la scrittura 3/4 ne indica il *risultato*.

Infatti, non appena venne proposta la questione di spartire 3 mele fra 4 bimbi, abbiamo indicato l'operazione, da eseguire, con la scrittura « 3 : 4 ».

Ma abbiamo atteso che la mamma eseguisse la partizione, per concludere che ogni bimbo aveva avuto 3/4 di mela.

15. — E alla diversa scrittura corrisponde una diversa lettura: perchè, mentre il *dividendo*, il *divisore* ed anche il *numeratore* si leggono come numeri *cardinali*, invece il *denominatore* (quand'è maggiore di 2) si legge come numero *ordinale*.

Ad es.,

$$7 : 9 = \frac{7}{9}$$

si legge: *sette* diviso *nove* fa *sette noni*.

16. — Se quella mamma non avesse riflettuto che

8 è divisibile per 4,

avrebbe spartito le pere nel modo in cui poi ha spartito le mele: dando *un quarto* di ogni pera a ciascun bimbo.

Ogni bimbo avrebbe avuto *otto quarti* di pera e si sarebbe concluso che

$$8 : 4 = \frac{8}{4}.$$

17. — Riassumendo:
il *quoto* di due numeri *naturali* (il secondo dei quali diverso da zero) è la *frazione* che ha per *numeratore* il *dividendo* e per *denominatore* il *divisore*.

E ciò senza più preoccuparsi se il dividendo *sia* o *non sia* divisibile per il divisore.

18. — Le *frazioni*, il cui *numeratore* è 1 ed il cui *denominatore* è *diverso* da 1, sono chiamate ***unità frazionarie*** od anche ***parti aliquote***.

Tali sono, ad es., 1/3, 1/10, ecc.

19. — Se di un filo lungo 5 m. si fanno 8 pezzi aventi una medesima *lunghezza*, quant'è lungo ogni pezzo?

È lungo 5/8 di m.

20. — Se di un filo lungo 8 m. si fanno 5 pezzi *eguali*, quant'è lungo ogni pezzo?

È lungo 8/5 di m.

21. — Vi sono dunque frazioni (come 5/8), ***il cui numeratore*** (diverso da zero) ***è minore del denominatore***. Esse si chiamano: ***frazioni proprie***.

E vi sono frazioni (come 8/5), ***il cui numeratore non è minore del denominatore***. Esse si chiamano: ***frazioni improprie***.

22. — Se il *numeratore* è *divisibile* per il *denominatore*, allora la *frazione* (impropria) si dice *apparente*, perchè essa è *riducibile* ad un numero *naturale*.

Ad es., 8/4 è una *frazione apparente*, perchè

$$\frac{8}{4} = 2.$$

23. — In particolare: ogni *frazione*, i cui *termini* sono fra loro *eguali*, vale 1.

Ad es.,

$$\frac{100}{100} = 1$$

e quindi *cento centesimi* di lira equivalgono ad *una* lira.

Altro es., $\frac{2}{2} = 1$

in cui il denominatore 2, anzichè « secondi », si legge: *mezzi* o *metà*.

24. Inoltre: ogni *frazione*, avente per *denominatore* 1, è eguale al suo *numeratore*.

Ad es., $\frac{5}{1} = 5$

in cui il denominatore 1, anzichè « primi », si legge: *unità*.

25. — Come ogni *divisore*, così ogni *denominatore* dev'essere *diverso da zero*.

Ma lo 0, come può essere *dividendo*, così può essere *numeratore*. In tal caso, la *frazione* è *apparente* e vale *zero*, qualunque sia il denominatore.

Ad es., $\frac{0}{5} = 0.$

26. — Inversamente, ogni numero *naturale* si può trasformare in *frazione apparente*, con un *denominatore* qualunque (ma diverso da zero).

A tale scopo, basta assumere quale *numeratore* il *prodotto* del numero *naturale* per il *denominatore*.

Ad es., volendo trasformare 4 in frazione apparente col denominatore 5, si scrive:

$$4 = \frac{4 \times 5}{5} = \frac{20}{5}.$$

27. — Quattro facchini hanno eseguito un trasporto di masserizie per L. 300, spendendo L. 85 per un carro a due cavalli e per il conducente.

Quanto è toccato ad ogni facchino?

28. — Per fare 4 parti *eguali* delle lire

$$300 - 85 = 215$$

essi hanno diviso 215 per 4, trovando che, dopo aver preso L. 53 ciascuno, restavano ancora da spartire L. 3, cioè cent. 300.

$$\begin{array}{r|l} 215 & 4 \\ \cline{2-2} 15 & 53 \\ 3 & \end{array}$$

Poichè $300 : 4 = 75$

la parte di ciascuno è stata, in tutto, 53 lire e 75 cent.

29. — Avremmo potuto rispondere *sùbito* che ad ogni facchino spettavano lire 215/4.

Ma, dopo avere diviso 215 per 4 ed avere assegnato *intanto* L. 53 a ciascuno, avremmo potuto soggiungere che *inoltre* gli spettavano 3/4 di lira (come, spartendo 3 mele fra 4 bimbi, ciascuno ebbe 3/4 di mela).

Sicchè, ad ogni facchino spettavano lire 53 e 3/4 (sottintendendo: di lira).

Risulta che:

215/4 è lo stesso che 53 e 3/4.

30. — Pur dicendo 53 e 3/4, scrivete:

$$53 + \frac{3}{4}.$$

Questa scrittura si chiama ***numero misto.***

Si dice che 53 è la sua ***parte intera*** e che 3/4 è la sua ***parte frazionaria.***

31. — Sicchè: $\frac{215}{4} = 53 + \frac{3}{4}.$

32. — Ogni *frazione impropria* (che non sia apparente) è trasformabile in *numero misto.*

A tale scopo, si *divide* il *numeratore* per il *denominatore.*

Dopo ciò, si adopera il *quoziente* come *parte intera* ed il *resto* quale *numeratore* della *parte frazionaria,* cui si conserva il *denominatore* della frazione data.

33. — Ad es., volendo trasformare in numero misto la frazione impropria 100/7, si fa:

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \hline 30 & 14 \\ 2 & \end{array}$$

e si conclude che:

$$\frac{100}{7} = 14 + \frac{2}{7}.$$

34. — Così facendo, il *numero misto* ha come *parte intera* un *numero naturale* (il quoziente) e come *parte frazionaria* una *frazione propria* (perchè il resto è sempre *minore* del divisore).

35. — Inversamente, basta rammentare la *prova* della *divisione con resto* (diverso da zero), per concludere: che ogni *numero misto* si può trasformare in una *frazione impropria,* col *denominatore* stesso della *parte frazionaria*;

e che, per calcolarne il *numeratore*, basta *moltiplicare* la *parte intera* per il *denominatore* ed *aggiungere* al *prodotto* il *numeratore* della *parte frazionaria.*

Ad es.,

$$14 + \frac{2}{7} = \frac{(14 \times 7) + 2}{7} = \frac{98 + 2}{7} = \frac{100}{7}.$$

36. — Si chiama ***frazione ordinaria***, ogni *frazione* avente per *termini* due numeri *naturali.*

37. — Si chiama ***numero razionale***, ogni *frazione ordinaria* ed ogni altra scrittura, che sia *trasformabile* in frazione ordinaria.

38. — Quindi, all'insieme dei *numeri razionali* appartiene:

ogni *frazione ordinaria,*

ogni *numero naturale* (perchè trasformabile in frazione apparente)

ed ogni *numero misto* (perchè trasformabile in frazione impropria).

DOMANDE

1. — *Qual parte di m. è un dm.? un cm.? un mm.?*

2. — *Qual parte di m. sono 3 dm.? 23 cm.? 123 mm.?*

3. — *Che cos'è un decimo di km.? un centesimo di km.? un millesimo di km.? un milionesimo di km?*

4. — *Qual parte di yard è un piede? e qual parte di piede è un pollice?*

(Si rammenti che un *yard* è 3 piedi e che un *piede* è 12 pollici).

5. — *Qual parte di yard sono 2 piedi? e qual parte di piede sono 5 pollici?*

6. — *Qual parte di m.² è un dm.²? un cm.²? un mm.²?*

7. — *Qual parte di m.² sono 43 dm.²? 6543 cm.²? 876·543 mm.²?*

8. — *Qual parte di km². è un hm.² o ha.* (ettaro)*? un dam.² o a.* (ara)*? un m.² o ca.* (centiara)*?*

9. — *Qual parte di m.³ è un dm.³? un cm.³? un mm.³?*

10. — *Qual parte di m.³ sono 789 dm.³? 456·789 cm.³? 123·456·789 mm.³?*

11. — *Quale capacità ha un recipiente la cui cavità è un millesimo di m.³? un decimo di m.³?*

12. — *Qual parte di g. è un dg.? un cg.? un mg.?*

13. — *Qual parte di g. sono 9 dg.? 89 cg.? 789 mg.?*

14. — *Che cos'è un decimo di t.? un centesimo di q.? un decimo di kg.?*

15. — *Qual parte di lira è un soldo? 7 soldi?*

16. — *Qual parte di lira sterlina è uno scellino? e qual parte di scellino è un denaro?*

(Si sa che una *sterlina* è 20 scellini ed uno *scellino* è 12 denari).

17. — *Qual parte di sterlina sono 3 scellini? e qual parte di scellino sono 5 denari?*

18. — *Qual parte di giorno è un'ora? qual parte di ora è un minuto? qual parte di minuto è un secondo?*

19. — *Qual parte di giorno sono 5 ore? qual parte di ora sono 13 minuti? qual parte di minuto sono 17 secondi?*

20. — *Quantunque ogni anno sia composto di 12 mesi, nessun mese è un dodicesimo d'anno. Perchè?*

(Ma nel commercio, per facilitare i calcoli, si fa come se ogni *mese* fosse di 30 giorni; e così l'*anno commerciale* si considera di 360 giorni).

Esercizi

1. — Di ciascuna delle frazioni:

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{3}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{0}{5},\ \frac{35}{6},\ \frac{91}{7},\ \frac{25}{8},\ \frac{5}{9}$$

si dica se è *apparente* o no.

Se è apparente, la si riduca a numero *naturale*.

Se non è apparente, si dica se è *propria* od *impropria*.

Se è impropria, la si trasformi in *numero misto*.

2. — In quali frazioni *apparenti* si trasforma il numero naturale 7, dandogli per *denominatore* uno qualunque dei numeri naturali da 2 a 10?

3. — Trasformare in frazione *impropria* ciascuno dei *numeri misti*:

1 + 3/7	6 + 2/3	4 + 2/7	4 + 4/9
7 + 1/7	5 + 5/11	23 + 1/3	6 + 2/13
12 + 6/7	11 + 1/9	14 + 2/7	33 + 1/3

§ 2. — Semplificazione delle frazioni

1. — Ogni lira è 20 soldi.
Perciò, ogni soldo è 1/20 di lira.
Quindi, 3 soldi sono 3/20 di lira.

2. — Ogni soldo è 5 cent. (centesimi di lira).
Perciò, 3 soldi sono 15 cent., cioè 15/100 di lira.

3. — Si può dunque dire, indifferentemente, che 3 soldi sono 3/20 di lira ovvero 15/100 di lira.

Sicchè: $$\frac{3}{20} = \frac{15}{100}.$$

4. — Or dunque:

se si moltiplicano ambo i termini di una frazione come 3/20) *per uno stesso numero naturale* (diverso da 1, come 5), *la frazione cambia soltanto di forma* (diventa 15/100).

Ad es., $$\frac{4}{7} = \frac{4 \times 3}{7 \times 3} = \frac{12}{21}.$$

5. — Ed anche, inversamente:

se si dividono ambo i termini di una frazione (come 15/100) *per un loro divisore comune* (diverso da 1, come 5), *la frazione cambia soltanto di forma* (diventa 3/20).

Ad es., $$\frac{26}{65} = \frac{26:13}{65:13} = \frac{2}{5}.$$

6. — Ho fatto *tre parti eguali* del primo *rettangolo*, mediante due parallele ai suoi lati verticali.

La parte *bianca* della figura è 1/3 di tutto il rettangolo e la parte *tratteggiata* è 2/3 di esso.

Ho fatto *cinque parti eguali* del secondo *rettangolo*, mediante quattro parallele ai suoi lati orizzontali.

Poichè i due rettangoli erano *eguali*, li ho *sovrapposti*: ottenendo un *rettangolo*, le cui *parti eguali* sono

$$3 \times 5 = 15.$$

Quanti di questi *quindicesimi* compongono ora la parte *tratteggiata* della figura?

$$2 \times 5 = 10.$$

Si conclude che:

$$2/3 = 10/15.$$

E risulta confermato che: « se si moltiplicano ambo

i termini di una frazione per uno stesso numero, la frazione cambia soltanto di forma ». [1]

7. — Ogni *frazione* si dice ***riducibile*** allorchè i suoi due termini hanno qualche *divisore comune*, diverso da 1.

Altrimenti, cioè quando i suoi due termini sono *primi fra loro*, la *frazione* si dice ***irriducibile***.

8. — ***Semplificare*** una *frazione riducibile*, significa: *dividerne ambo i termini per un loro divisore comune* (diverso da 1).

Si ottiene così una *frazione*, che è *eguale* alla frazione data, ma i cui termini sono rispettivamente *minori*.

Ad es., *semplificando* per 10 (cioè: dividendo ambo i termini per 10), si ha:

$$\frac{360}{780} = \frac{360:10}{780:10} = \frac{36}{78}$$

Semplificando per 2,

$$\frac{36}{78} = \frac{36:2}{78:2} = \frac{18}{39}$$

Semplificando per 3,

$$\frac{18}{39} = \frac{18:3}{39:3} = \frac{6}{13}$$

Riassumendo:

$$\frac{360}{780} = \frac{36}{78} = \frac{18}{39} = \frac{6}{13}.$$

---

[1] Nel ricorrere ad un *duplice sistema di parallele* ai *lati* di un *rettangolo*, ho accolto il consiglio dato da C. A. LAISANT nel § 22 della sua *Iniziazione alle Matematiche* (traduzione di G. LAZZERI, Firenze, Barbera, 1923).

9. — Così facendo, abbiamo eseguito tre ***semplificazioni successive.***

Col *semplificare successivamente* la frazione 360/780, l'abbiamo sempre *trasformata* in modo da darle per termini due numeri *minori* di quelli che aveva.

10. — Giunti alla frazione 6/13, la frazione 360/780 risulta ***ridotta ai minimi termini***, cioè non la si può *trasformare* in altra che abbia per termini due numeri minori di 6 e di 13. Infatti, i due termini della frazione 6/13 sono *primi fra loro*, e perciò essa *non è semplificabile*: è *irriducibile.*

11. — Invece di dividere successivamente ambo i termini della frazione 360/780 per 10 e poi per 2 ed infine per 3, si può dividerli addirittura per il prodotto

$$10 \times 2 \times 3 = 60$$

ottenendo:

$$\frac{360}{780} = \frac{360 : 60}{780 : 60} = \frac{6}{13}.$$

12. — Il 60, per il quale abbiamo diviso separatamente 360 e 780, non è soltanto *un* loro *divisore comune*, ma è *il massimo* loro *divisore comune.*

Infatti:

	2	6
780	360	60
60	0	

E perciò, col dividere separatamente 360 e 780 per 60, si ottengono sùbito due *quoti*, 6 e 13, che sono *primi fra loro.*

13. — Quindi:

per ridurre una frazione ai minimi termini, si dividono separatamente i suoi due termini per il loro massimo divisore comune.

Se questo è 1, la frazione proposta è *irriducibile.*

14. — Si voglia ridurre ai minimi termini la frazione 15197/17199 (che si può leggere: « 15197 ***su*** 17199 »).

Si opera così:

	1	7	1	1	2	4
17199	15197	2002	1183	819	364	91
2002	1183	819	364	91	0	

15197	91
609	167
637	
0	

17199	91
809	189
819	
0	

E si conclude che:

$$\frac{15197}{17199} = \frac{167}{189}.$$

15. — Si voglia ridurre ai minimi termini la frazione 531/871.

Si opera così:

	1	1	1	1	3	1	1	1	1	3
871	531	340	191	149	42	23	19	4	3	1
340	191	149	42	23	19	4	3	1	0	

Poichè $\qquad D\,(531,871) = 1$

(cioè: *il massimo divisore comune* di 531 e di 871 è 1) si conclude che 531/871 è una frazione *irriducibile.* [1]

16. — Or dunque, la ricerca del *massimo divisore* dei due termini di una *frazione* giova:

a *ridurla ai minimi termini* ovvero ad *accorgersi* che essa è *irriducibile.*

17. — Inoltre, se la frazione proposta è *impropria*, la ricerca del *massimo divisore* de' suoi termini, giova:

se è *apparente*, ad *accorgersene* ed a *ridurla* a numero *naturale*;

o altrimenti, a *trasformarla* in *numero misto* con la *parte frazionaria irriducibile.*

18. — Ad es., la frazione proposta sia 12992/203.

Appena iniziate le divisioni successive, si trova:

	64
12992	203
812	
0	

Si conclude che la frazione proposta è *apparente* e che:

$$\frac{12992}{203} = 64.$$

---

[1] Allorchè, in una delle divisioni successive, si è adoperato come *divisore* un *numero primo*, ottenendo un *resto diverso da zero*, si può concludere senz'altro che *il massimo divisore* cercato è 1.

Ad es., l'ultima ricerca si poteva interrompere sùbito dopo aver adoperato il divisore 191, od altrimenti (non essendosi accorti che 191 è primo) dopo il 149, od almeno dopo il 23.

19. — Data la frazione 17014/1457, si opera così:

	11	1	2	10
17014	1457	987	470	47
2444	470	47	0	
987				

La frazione proposta è dunque *semplificabile* per 47.

Ma essa è *impropria* e la prima divisione eseguita ci consente di trasformarla in *numero misto*, avente come *parte intera* 11 e come *parte frazionaria* 987/1457.

Poi si *semplifica* questa per 47.

987	47		1457	47	
47	21		47	31	
0			0		

Si conclude che:

$$\frac{17014}{1457} = 11 + \frac{21}{31}$$

e così si è *trasformata* la *frazione impropria* in *numero misto*, con la *parte frazionaria irriducibile.*

20. — Notevoli *abbreviazioni* di calcolo si possono fare, allorchè *uno* dei due termini della frazione proposta sia facilmente *decomponibile in fattori primi.*

Ad es., in 12/385, mentre $12 = 2^2\ 3$, invece 385 non è divisibile nè per 2, nè per 3.

Quindi, 12/385 è *irriducibile.*

Ad es., in 91/1703 osserviamo che $91 = 7 \times 13$.

Esaminiamo se 1703 sia o no divisibile per 7, per 13.

1703	7		1703	13	
30	243		40	131	
23			13		
2			0		

Si conclude che la frazione proposta si può *semplificare* per 13, ottenendo:

$$\frac{91}{1703} = \frac{7}{131}.$$

DOMANDE

1. — *Qual parte di* m. *sono* dm. *2? 4? 5? 6? 8?*
2. — *Qual parte di* scellino *sono* denari *2? 3? 4? 6? 8? 9? 10?*
3. — *Qual parte di* lira *sono* soldi *2? 4? 5? 6? 8? 10?*
4. — *Qual parte di* sterlina *sono* scellini *12? 14? 15? 16? 18?*
5. — *Qual parte di* giorno *sono* ore *2? 3? 4? 6? 8? 9? 10? 12? 14? 15? 16? 18? 20? 21? 22?*
6. — *Qual parte di* ora *sono* minuti *2? 3? 4? 5? 6? 8? 10?*
7. — *Qual parte di* minuto *sono* secondi *12? 15? 20? 24? 30? 36? 40? 45? 48?*
8. — *Qual parte di* lira *è una moneta da* centesimi *5? 10? 20? 50?*
9. — *Qual parte di* ettolitro *sono* litri *2? 4? 8? 15? 25?*
10. — *Qual parte di* quintale *sono* kg. *30? 40? 60?*
11. — *Qual parte di* m^2. *sono* dm^2. *34? 35? 36?*
12. — *Qual parte di* m^3. *sono* dm^3. *125? 250? 375?*

Esercizi

Ridurre ai *minimi termini* ciascuna delle frazioni seguenti od accertare che è *irriducibile*.

Qualora sia *impropria*, esaminare se è *apparente* e ridurla a numero *naturale*; od altrimenti, trasformarla in *numero misto* con la *parte frazionaria irriducibile*.

È questo un lavoro nel quale è necessario addestrarsi, per eseguirlo *spontaneamente* (cioè: anche senza che sia richiesto), allorchè il *risultato* di un' operazione (o di una successione di operazioni) è una *frazione*.

Mentalmente:

1.	21/133	2.	16/83	3.	247/19
4.	130/16	5.	35/77	6.	246/12
7.	10/210	8.	36/15	9.	125/75

Per iscritto:

1.	501/1169	2.	432/240	3.	1155/1309
4.	1107/861	5.	327/1417	6.	1253/716

I compagni di viaggio

Alla stazione di Bologna, cinque viaggiatori prendono posto in un compartimento di una vettura per Lecce.

Eccovi i nomi delle stazioni, in cui scendono quattro di essi, e le loro distanze da Bologna:

S. Arcangelo di Romagna (tra Faenza e Rimini) . . km. 102
Mondolfo (tra Rimini e Falconara) . . . . . » 170
Loreto (tra Ancona e Porto Civitanova) . . . . . » 238
S. Benedetto del Tronto . . . . . » 289

Il quinto viaggiatore va sino a Lecce e percorre esattamente tanti km. quant' è la somma dei km. percorsi dagli altri quattro.

Rimasto solo nel suo compartimento, a S. Benedetto del Tronto salgono due viaggiatori, i quali scendono:

uno a Càndida (tra Foggia e Barletta) . . . . . km. 571
e l' altro a Cisternino (tra Bari e Brindisi) . . . . » 712

anche queste due distanze essendo misurate da Bologna.

Per quale frazione *irriducibile* della strada da Bologna a Lecce ha egli avuto la compagnia di ciascuno degli altri sei viaggiatori?

(Egli ha avuto la compagnia del viaggiatore che è sceso a S. Arcangelo per una *frazione* della sua strada che ha per *numeratore* la distanza da Bologna a S. Arcangelo e per *denominatore* la distanza da Bologna a Lecce.

Si trovi questa *distanza* e poi si cerchi *il massimo divisore* dei due termini della *frazione*, il quale servirà anche per gli altri viaggiatori saliti a Bologna; mentre, per quelli saliti poi, *il massimo divisore* è un altro.

Come *verifica*, si addizionino le prime quattro frazioni).

Problemi

1. — Che parte del secondo trimestre (civile) è una settimana?

2. — Un ciclista, che ha percorso 24 km., ne deve percorrere altri 18.

Qual parte del cammino ha già percorsa e quale deve percorrerre ancora?

3. — Un muratore doveva costruire un muro in 45 giornate.

Se ha lavorato in modo uniforme, qual parte di muro gli rimane da costruire dopo 27 giornate?

Assi, sesterzi e denari

1. — «Aes rude» era un pezzo di rame (o di bronzo) non coniato, che i Romani usavano come *unità di peso*.

Era l'«as libralis», composto di «duodecim unciae». (1)

2. — I Romani usavano *le frazioni ordinarie* (ad es., dicevano «tres quintae» e sottintendevano: «partes») e nei casi più facili sapevano ridurle ai *minimi termini*. Ad es., chiamavano:

«sextans»	le 2 oncie, cioè	2/12 = 1/6 di «as»,
«quadrans»	» 3	3/12 = 1/4 . . ,
«triens»	» 4	4/12 = 1/3 . . ,
«semis»	» 6	6/12 = 1/2 . . ,

E *sottintendevano il denominatore* quando superava di 1 il numeratore. Ad es., «duae partes» significava 2/3, «tres partes» significava 3/4, ecc.

3. — «Aes signatum» era un pezzo di *rame coniato*, che i Romani usavano come *unità* di *valore*.

Il *peso* di un *asse* variò molto, sinchè venne fissato in 1/3 di *oncia*.

4. — Tra le *monete d'argente* usate dai Romani, erano:

il «denarius» («nummus») equivalente a 10 *assi*,

e il «sestertius» («nummus») equivalente ad 1/4 di *denaro*.

5. — Con una *libbra* di rame, quanti *assi* si coniavano?

A quanti *assi* equivaleva un *sesterzio*?

---

(1) La *libbra* di *dodici oncie* è rimasta nell'uso popolare.

Asso, per «unità», è usato nel giuoco delle carte e nella frase «lasciare in asso» (cioè: lasciar solo). *Asse*, per «patrimonio», è usato nelle frasi: «asse ereditario» ed «asse ecclesiastico».

Da «aes» derivò «aerarium», luogo (dapprima il tempio di Saturno) in cui lo Stato di Roma conservava il metallo da coniare e le monete. E noi diciamo *erario* per «denaro pubblico».

§ 3. — Riduzione di frazioni al minimo denominatore comune

1. — Quali sono le frazioni *eguali* a 15/18?

Anzitutto, riduco 15/18 ai *minimi termini*.

Semplificando per 3, ottengo:

$$\frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

Dopo ciò, moltiplico ambo i termini di 5/6 per ciascuno dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, ...

ed ottengo:

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12} = \frac{15}{18} = \frac{20}{24} = \frac{25}{30} = \ldots$$

2. — Sicchè:

la successione delle frazioni eguali ad una frazione data (nell'ordine crescente dei loro due termini) *si ricava dalla frazione irriducibile eguale alla frazione data, moltiplicandone ambo i termini per i numeri naturali, a cominciare da 1.*

3. — Tra le frazioni *eguali* a 23/42, ve n'è una col *denominatore* 242?

Anzitutto, 23/42 è *irriducibile*.

Quindi, la successione (infinita) delle frazioni *eguali* a 23/42 incomincia così:

$$\frac{23}{42} = \frac{46}{84} = \frac{69}{126} = \frac{92}{168} = \frac{115}{210} = \frac{138}{252} = \ldots$$

Poichè, nella successione dei *denominatori*, abbiamo

già *superato* il 242 senza incontrarlo, è inutile proseguire la ricerca.

Ormai siamo certi che, tra le frazioni *eguali* a 23/42, *nessuna* ha per *denominatore* 242.

4. — Tra le frazioni *eguali* a 35/45, ve n'è una col *denominatore* 72?

Anzitutto, $$\frac{35}{45} = \frac{7}{9}.$$

Quindi, la successione delle frazioni *eguali* a 35/45 incomincia così:

$$\frac{7}{9} = \frac{14}{18} = \frac{21}{27} = \frac{28}{36} = \frac{35}{45} = \frac{42}{54} = \frac{49}{63} = \frac{56}{72} = \ldots$$

La frazione cercata *c'è* ed è 56/72.

5. — Perchè abbiamo potuto *trasformare* 35/45 in una frazione col *denominatore* 72? e perchè, invece, non abbiamo potuto *trasformare* 23/42 in una frazione col *denominatore* 242?

Perchè 72 è *divisibile* per il *denominatore* della frazione *irriducibile* 7/9 (eguale a 35/45); e perchè, invece, 242 *non è divisibile* per il *denominatore* della frazione *irriducibile* 23/42.

6. — Quindi: *una frazione può assumere un nuovo denominatore prestabilito, allorchè questo è divisibile per il denominatore della frazione irriducibile eguale alla frazione data.*

7. — Nel caso favorevole e supposto che la frazione da trasformare sia già ridotta ai *minimi termini*:

per calcolare il nuovo numeratore, si divide il nuovo

denominatore per quello dato e poi si moltiplica il numeratore dato per il quoto ottenuto.

8. — Ad es., senza scrivere le frazioni *intermedie* fra 7/9 e 56/72, si pensa:

$$72 : 9 = 8 \quad \text{e} \quad 7 \times 8 = 56$$

e si conclude che:

$$\frac{7}{9} = \frac{56}{72}.$$

Si osservi che la frazione 56/72 è *eguale* a 7/9 perchè ricavata da questa, *moltiplicandone ambo i termini per uno stesso numero*, che in questo caso è 8.

9. — Sai *trasformare* 35/91 in una frazione col denominatore 130? — chiedo a Sventatelli.

— *Non si può* — risponde troppo prontamente.

— E perchè? — gli domando.

— Perchè 130 *non è divisibile* per 91.

10. — Sei della stessa opinione? — domando a Pierino.

— Bisogna sapere se 35/91 è *irriducibile.*

— Si fa presto a saperlo. Quali sono i fattori primi di 35?

— Sono 5 e 7.

— Il 91 è divisibile per qualcuno di essi?

— Per 7.

— Semplifica 35/91 per 7.

— Ottengo 5/13, che è irriducibile.

— Si può trasformare questa frazione, in modo che abbia per denominatore 130?

— Si, signore. Basta moltiplicarne ambo i termini per « 130 : 13 », cioè per 10.

— E che cosa ottieni?

— Ottengo 50/130.

11. — Ecco tre frazioni irriducibili, con denominatori tutti diversi: 5/12 7/18 13/60.

Vorrei *trasformarle* in modo che avessero *uno stesso denominatore*.

12. — Come dovrà essere questo *denominatore comune*?

Per la prima frazione, occorre che sia *un multiplo* di 12; per la seconda, occorre che sia un *multiplo* di 18; e per la terza, occorre che sia *un multiplo* di 60.

Perciò, dovrà essere *un multiplo comune* di 12, 18, 60.

Ci converrà che sia *il minimo multiplo* di 12, 18, 60.

Poichè

$$12 = 2^2\ 3 \qquad 18 = 2 \times 3^2 \qquad 60 = 2^2\ 3 \times 5$$

risulta

$$\mathrm{m}\ (12, 18, 60) = 2^2\ 3 \times 5 = 180.$$

Si conclude che 180 è ***il minimo denominatore comune*** delle tre frazioni date.

13. — Sicchè:

il minimo denominatore comune, di quante e quali si vogliano frazioni irriducibili, è il minimo multiplo comune dei loro denominatori.

14. — Trovato *il minimo denominatore comune*, sappiamo già come si calcoli *il nuovo numeratore di ciascuna frazione.*

Nel caso nostro, i nuovi numeratori sono:

$$\begin{aligned}(180 : 12)\ 5 &= 15 \times 5 = 75,\\ (180 : 18)\ 7 &= 10 \times 7 = 70,\\ (180 : 60)\ 13 &= 3 \times 13 = 39.\end{aligned}$$

E quindi le frazioni cercate sono:

75/180 70/180 39/180.

15. — In particolare:

se i denominatori di due frazioni irriducibili sono primi fra loro, il loro minimo denominatore comune è il loro prodotto.

Ad es., date le frazioni

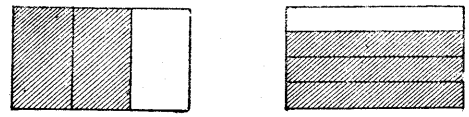
2/3 e 3/4,

col moltiplicare *ambo i termini* di ciascuna per *il denominatore* dell'altra, si ottiene:

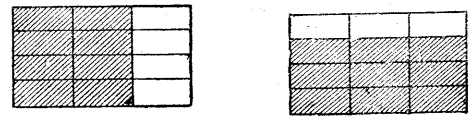
8/12 e 9/12.

16. — Osservate questi *due rettangoli eguali.*

Ho *tratteggiato* 2/3 del rettangolo a *sinistra* e 3/4 del rettangolo a *destra.*



Poi, in *ciascuno* dei due rettangoli ho segnato *i segmenti separatori* che avevo segnato nell'*altro.*



Così facendo, *il numero delle parti*, di ciascuno dei due rettangoli, è diventato:

$$3 \times 4 = 12$$

e *le parti di entrambi sono tutte eguali.*

I dodicesimi tratteggiati risultano:

$2 \times 4 = 8$ a *sinistra* e $3 \times 3 = 9$ a *destra.*

E così risulta confermato che:

$$2/3 = 8/12 \qquad \text{e} \qquad 3/4 = 9/12.$$

17. — Prima di *ridurre al minimo denominatore comune* le frazioni date, non si trascuri di esaminare se sono *irriducibili*, ed occorrendo *le si riducano ai minimi termini.*

Ad es., le frazioni date siano:

$$51/170 \qquad 455/546 \qquad 77/330.$$

Chi non tenesse conto di questa avvertenza, decomporrebbe in fattori primi i denominatori dati:

$$170 = 2 \times 5 \times 17 \qquad 546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$$
$$330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$$

e concluderebbe *erroneamente* che *il minimo denominatore comune* è nientemeno che:

$$\mathbf{m}\ (170,\ 546,\ 330) = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17$$

cioè: 510·510.

Invece, *ridotte ai minimi termini*, le frazioni date diventano:

$$3/10 \qquad 5/6 \qquad 7/30$$

e quindi, *ridotte al minimo denominatore comune*, diventano:

$$9/30 \qquad 25/30 \qquad 7/30.$$

DOMANDE

1. — Come incomincia la successione delle frazioni eguali a 10/15?

2. — Tra le frazioni eguali a 7/8, ve n'è una col denominatore 40?

3. — Tra le frazioni eguali ad 8/15, ve n'è una col denominatore 25?

4. — Tra le frazioni eguali a 15/27, ve n'è una col denominatore 36?

Esercizi

Ridurre al minimo denominatore comune:

1.	3/20	4/15	5/24
2.	1/6	2/21	3/14
3.	4/15	5/21	6/35
4.	105/120	105/126	105/140

(Si incominci l'Esercizio 4 col ridurre ai minimi termini ciascuna delle frazioni proposte).

§ 4. — Confronto di numeri razionali

1. — *Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, allora una di esse è*

minore o eguale o maggiore

dell'altra, secondochè il numeratore della prima è

minore o eguale o maggiore

del numeratore della seconda.

2. — Ad es., 3/7 è *minore* di 5/7

perchè 3 è *minore* di 5.

3. — Ad es., per *confrontare* 7/9 con 1, basta confrontare 7/9 con 9/9, cioè 7 con 9.

Si conclude che:

7/9 è *minore* di 1

ed alla stessa conclusione si giungerebbe se, anzichè di 7/9, si parlasse di qualunque altra *frazione propria.*

4. — Ad es., per *confrontare* 13/5 con 1, basta confrontare 13/5 con 5/5, cioè 13 con 5.
Si conclude che:

13/5 è *maggiore* di 1

ed alla stessa conclusione si giungerebbe se, anzichè di 13/5, si parlasse di qualunque altra *frazione impropria,* diversa da 1.

5. — Riassumendo:
ogni frazione propria è minore di 1,
ogni frazione impropria, diversa da 1, è maggiore di 1.

6. — Segue che:
ogni frazione propria è minore di ogni numero naturale diverso da zero, di ogni frazione impropria e di ogni numero misto.

7. — Quindi, *senza far calcoli,* ad es.,

2/7 è *minore* di 2
3/4 è *minore* di 8/5
9/10 è *minore* di 1 + 2/3.

8. — Consideriamo un *numero misto,* ad es. 2 + 5/6.

Poichè 5/6 è *minore* di 1,
2 + 5/6 è *minore* di 2 + 1
cioè: 2 + 5/6 è *minore* di 3.

9. Sicchè:
ogni numero misto è compreso fra la sua parte intera ed il numero naturale successivo a questa.

10. — Quindi, *senza far calcoli,* ad es.,

4 + 7/8 è *compreso* fra 4 e 5.

11. — Segue che:
ogni numero misto è maggiore d'ogni numero naturale che non sia maggiore della sua parte intera, ed è minore di ogni numero naturale che sia maggiore della sua parte intera.

12. — Quindi, *senza far calcoli,* ad es.,

6 + 3/5 è *maggiore* di 4 e *minore* di 9.

13. Segue che:
per confrontare due numeri misti, le cui parti intere sono fra loro diverse, basta confrontare queste.

14. — Quindi, *senza far calcoli,* ad es.,

4 + 9/10 è *minore* di 6 + 1/5

perchè 4 è *minore* di 6.

15. — Per *confrontare* due *frazioni* aventi *denominatori diversi,* basta *ridurle ad uno stesso denominatore* e poi *confrontare* i due *nuovi numeratori.*
Per far ciò, non importa ricorrere al *minimo multiplo dei denominatori.*
Giova ricorrere, invece, al *prodotto dei denominatori,* ma *senza calcolarlo.*
Si otterrà *il nuovo numeratore* di ciascuna frazione, *moltiplicandone il numeratore dato per il denominatore dell'altra.*

16. — Ad es., le frazioni da confrontare siano

5/7 e 2/3.

Si confronta 5×3 con 2×7, cioè 15 con 14.

Poichè 15 è *maggiore* di 14,

si conclude che:

5/7 è *maggiore* di 2/3.

17. — Per dare un altro es., le frazioni da confrontare siano 21/24 e 35/40.

Si confronta 21×40 con 35×24, cioè 840 con 840, e si conclude che:

$$21/24 = 35/40.$$

Ed infatti, semplificando la prima per 3 e la seconda per 5, entrambe diventano 7/8.

18. — Dunque:

se due frazioni hanno denominatori diversi, allora una di esse è

minore o eguale o maggiore

dell'altra, secondochè il prodotto del primo numeratore per il secondo denominatore è

minore o eguale o maggiore

del prodotto del secondo numeratore per il primo denominatore.

19. — Inoltre, segue che:

per confrontare due numeri misti, che hanno la stessa parte intera, basta confrontare le loro parti frazionarie.

20. — Quindi, ad es., dovendo *confrontare*

$$3 + 7/16 \quad \text{con} \quad 3 + 5/12,$$

basta confrontare

	7/16	con	5/12
cioè	7×12	con	5×16
cioè	84	con	80.

Si conclude che:

$3 + 7/16$ è *maggiore* di $3 + 5/12$.

21. — Allorchè si devono *confrontare* fra loro *due frazioni improprie* ovvero *una frazione impropria* con *un numero naturale o misto*, giova *trasformare* ogni *frazione impropria* in *numero misto*.

22. — Ad es., se dobbiamo *confrontare* 55/7 con un numero *naturale* o *misto*, anzitutto facciamo la *trasformazione*

$$55/7 = 7 + 6/7.$$

E, se dobbiamo *confrontare* 55/7 con 65/8, facciamo anche la *trasformazione*

$$65/8 = 8 + 1/8$$

e concludiamo che:

55/7 è *minore* di 65/8.

23. — Infine, si debbano *confrontare*, ad es.,

128/135 e 128/137.

Per quanto ho detto, si dovrebbero *confrontare*

$$128 \times 137 \text{ e } 128 \times 135.$$

Ma, in questo caso, non occorre *calcolare* i due *prodotti*, per concludere che il *primo* è *maggiore* del *secondo*, e quindi che:

128/135 è *maggiore* di 128/137.

24. — Giova dunque rammentare che:

se due frazioni diverse hanno lo stesso numeratore, allora la maggiore è quella che ha il denominatore minore.

Ad es., dovendo *confrontare* 48/77 con 24/39, si osserva

che $$24/39 = 48/78$$

e si conclude che:

48/77 è *maggiore* di 24/39.

25. — In particolare:

di due unità frazionarie diverse, la maggiore è quella che ha il denominatore minore.

Ad es., domandate a Paolino, che attende dalla mamma una fetta di torta, se preferisce ricevere *un ottavo* della torta ovvero *un dodicesimo.*

26. — Ed ancora: se, di due frazioni, una ha *il numeratore minore* e *il denominatore maggiore*, allora (per doppia ragione) essa è *minore* dall'altra.

Ad es., *senza far calcoli,*

56/79 è *minore* di 57/78.

27. — A volte, per *confrontare* due frazioni date, giova confrontarle con una terza frazione, opportunamente scelta.

Ad es., le frazioni date siano 16/49 e 23/68.

Poichè 16/49 è *minore* di 16/48, cioè di 1/3
e 23/68 è *maggiore* di 23/69, cioè di 1/3

si conclude che:

16/49 è *minore* di 23/68.

Esercizi

I. — *Si confrontino mentalmente:*

1. 3/9 e 4/9
2. 7/9 ed 1
3. 8/7 ed 1
4. 3/4 e 2
5. 5/6 e 9/8
6. 6/7 e 3 + 1/5
7. 5 + 2/3 e 4
8. 6 + 2/5 ed 8
9. 7 + 1/10 e 6 + 9/10
10. 6/10 e 9/15
11. 5/17 e 2/7
12. 8 + 3/4 ed 8 + 5/6
13. 27/5 e 5 + 1/5
14. 34/7 e 5
15. 29/6 e 41/8
16. 1/7 e 2/15.
17. 313/789 e 313/987
18. 1/23 ed 1/32
19. 17/24 e 16/25
20. 50/81 e 51/80.

II. — *Si confrontino mentalmente le frazioni:*

1. 35/72 e 45/88, *confrontando ciascuna con* 1/2
2. 370/739 e 165/331, *confrontando ciascuna con* 1/2
3. 80/241 e 300/899, *confrontando ciascuna con* 1/3
4. 26/75 e 31/48, *confrontando ciascuna con* 2/3.

III. — *Si riscrivano in ordine crescente i numeri razionali:*

1. 3 + 1/5, 1, 19/6, 13/5, 3, 7/8
2. 3, 2 + 1/9, 4/7, 19/20, 7/12, 15/7.

CAPITOLO II

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

§ 1. — Somma

1. — Vi rammentate come furono spartite 3 mele fra 4 bimbi?

Ogni bimbo ne ha avuto 1/4 e poi 1/4 e poi 1/4, e così ne ha avuto 3/4.

Sicchè:
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Inversamente,
$$\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}.$$

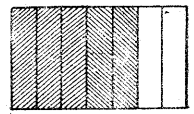
2. — Cioè:

ogni frazione, avente il numeratore maggiore di 1, è la somma di tante unità frazionarie quante ne indica il suo numeratore, e ciascuna con lo stesso denominatore.

3. — Per far capire a Luigino e Giulietta che cosa faccia

la somma di 3/7 e di 2/7,

ho fatto 7 *parti eguali* di questo rettangolo e ne ho *tratteggiate* 3 in un verso e 2 in un altro.



La *parte tratteggiata* del rettangolo è

$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}$$

cioè
$$\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right)$$

od anche
$$\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}.$$

Sicchè:
$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{5}{7}.$$

4. — Si conclude che:
$$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=\frac{3+2}{7}$$

cioè: ***la somma di due frazioni, aventi lo stesso denominatore, è quella frazione, con lo stesso denominatore, che ha per numeratore la somma dei numeratori.***

Ad es.,
$$\frac{7}{24}+\frac{5}{24}=\frac{7+5}{24}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$$

5. — In questo modo, ***si addizionano quante si vogliano frazioni***, purchè abbiano ***lo stesso denominatore.***

Ad es.,
$$\frac{14}{15}+\frac{11}{15}+\frac{8}{15}=\frac{14+11+8}{15}=\frac{33}{15}=2+\frac{3}{15}=2+\frac{1}{5}$$

6. — *Se le frazioni da addizionare hanno denominatori non tutti eguali, anzitutto si riducono al minimo denominatore comune.* E poi si applica la regola precedente.

7. — Pippo ha mangiato *mezza* mela e poi ne ha mangiato ancora *un quarto.*
Quanto ne ha mangiato?
Si pensa:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{4}=\frac{3}{4}$$

e si risponde: — Ne ha mangiato *tre quarti.*

8. — Antonio possedeva L. 8640.
In una settimana, ne ha speso 1/36.
La settimana dopo, ne ha speso 1/45.
Quanto ha speso in tutto?

9. — Il calcolo si può fare coi *numeri naturali,* così:

$$(8640 : 36)+(8640 : 45)=240+192=432.$$

Sicchè: Antonio ha speso L. 432.

10. — Ricorrendo invece alle *frazioni,* si può fare anzitutto così:

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{45}=\frac{5}{180}+\frac{4}{180}=\frac{9}{180}=\frac{1}{20}$$

e poi concludere che Antonio ha speso L.

$$8640 : 20=432.$$

11. — Risulta provato che:

$$\left(\frac{1}{36}\text{ di }8640\right)+\left(\frac{1}{45}\text{ di }8640\right)=\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{45}\right)\text{ di }8640.$$

E similmente con altri numeri.

In questo modo, l'*addizione* delle *frazioni* riesce utile anche per eseguire operazioni con numeri *naturali.*

12. — Ora, ad es., si debba calcolare:

$$\frac{17}{51}+\frac{2}{9}+\frac{25}{60}.$$

Anzitutto, riduciamo ai *minimi termini* la prima e la terza *frazione*: *semplificando* la prima per 17 e la terza per 5.
Otteniamo:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{5}{12}.$$

Il minimo denominatore comune è

$$\mathrm{m}\ (3,\ 9,\ 12)=36.$$

I nuovi numeratori sono:

$$\begin{aligned}(36 :\ 3)\ 1 &= 12\times 1=12\\ (36 :\ 9)\ 2 &= 4\times 2=8\\ (36 : 12)\ 5 &= 3\times 5=15.\end{aligned}$$

L'addizione proposta risulta *trasformata* così:

$$\frac{12}{36}+\frac{8}{36}+\frac{15}{36}.$$

E sùbito la si *eseguisce*:

$$\frac{12+8+15}{36}=\frac{35}{36}.$$

Sicchè, la *somma* cercata è 35/36.

13. — Allorchè si devono *addizionare* numeri *razionali* di forme diverse (frazioni ordinarie, numeri naturali o

misti), giova *trasformare* in *numero misto* ogni *frazione impropria*, calcolare *separatamente* la somma dei numeri *naturali* e la somma delle *frazioni*, e infine *addizionare* le due somme.

14. — Ad es., si debba calcolare:

$$\left(3+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}+\frac{7}{4}+2+\left(4+\frac{5}{6}\right).$$

Trasformata la frazione impropria

$$7/4 = 1 + 3/4,$$

addiziono i numeri naturali

$$3+1+2+4=10,$$

addiziono le frazioni

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{6+8+9+10}{12}=$$

$$=\frac{33}{12}=2+\frac{9}{12}=2+\frac{3}{4}$$

e addiziono le due somme

$$10+\left(2+\frac{3}{4}\right),$$

ottenendo: $12 + 3/4$.

15. — Quanto precede consente di estendere a tutti i numeri *razionali* le proprietà seguenti, che prima d'ora avevamo attribuito soltanto ai numeri *naturali*:

l'addizione è sempre eseguibile (cioè: la somma di due numeri razionali è un numero razionale),

l'addizione è commutativa (cioè: la somma non cambia, cambiando l'ordine degli addendi),

l'addizione è associativa (cioè: la somma di almeno tre addendi non cambia, cambiando il modo di associarli).

Esercizi

Si rammenti che ogni *risultato* deve avere la forma di *frazione propria irriducibile* o di *numero naturale* o di *numero misto, con la parte frazionaria propria ed irriducibile.*

I. — Si addizionino mentalmente le frazioni:

1. 5/9 e 2/9	**2.** 4/9 e 2/9	**3.** 5/9 e 4/9
4. 8/9 e 7/9	**5.** 1/2 ed 1/4	**6.** 1/4 ed 1/6.

II. — Si addizionino alla lavagna:

1. 1/6 e 3/10	**2.** 5/6 e 3/8	**3.** 1/10 e 1/15
4. 11/18 e 5/12	**5.** 1/14 e 2/21	**6.** 1/15 ed 1/35.

III. — Si addizionino alla lavagna:

1. 1/2, 2/3, 3/4	**2.** 3/4, 4/5, 5/6
3. 5/6, 6/7, 7/8	**4.** 7/8, 8/9, 9/10.

IV. — Si addizionino per iscritto, anche come lavoro domestico, *riducendo ai minimi termini ogni frazione* e *trasformando in numero misto* ogni frazione impropria:

1. 6/28 e 39/63	**2.** 39/182 e 45/54
3. 21/45 e 56/96	**4.** 763/21 e 955/15
5. 52/8 e 50/15 e 42/36	**6.** 91/52 e 91/78 e 91/84.

V. — Si calcoli:
(1/5 di 41160) + (1/15 di 41160) + (1/24 di 41160) + (1/40 di 41160)
in due modi: mediante quattro divisioni ed un'addizione di *numeri naturali*, ovvero mediante un'addizione di *frazioni* ed una sola divisione di numeri naturali.

La vendita delle mezze uova

1. — Una contadina portò al mercato alcune uova.
Ad uno ne vendette *la metà*, più *mezzo uovo.*
Ad un altro vendette *la metà* delle uova rimaste, più *mezzo uovo.*
Ad un terzo vendette *la metà* delle uova rimaste, più *mezzo uovo.*

Ad un quarto vendette *la metà* delle uova rimaste, più *mezzo uovo*.
E così vendè *tutte* le uova.
Con quante uova era andata al mercato?

2. — Quella contadina era andata al mercato con 15 uova.
Al *primo* avventore ne ha vendute 15/2 ed 1/2, cioè 16/2, cioè 8, e gliene sono rimaste 7.
Al *secondo* ne ha vendute 7/2 ed 1/2, cioè 8/2, cioè 4, e gliene sono rimaste 3.
Al *terzo* ne ha venduto 3/2 ed 1/2, cioè 4/2, cioè 2, e glien'è rimasto 1.
Al *quarto* ne ha venduto 1/2 ed 1/2, cioè 2/2, cioè 1.
E così ha venduto *tutte* le uova, *senza dimezzarne alcuna.*

Un indovinello greco

1. — Dalla bocca di tre Amorini zampilla l'acqua in una vasca da bagno.
Separatamente, i tre zampilli la riempiono in minuti 6, 9, 18.
Insieme, quanti minuti impiegano a riempirla?

Risoluzione. — In *un minuto*, separatamente, i tre zampilli ne versano 1/6, 1/9, 1/18. Quindi, insieme ne versano:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{3+2+1}{18}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}.$$

Perciò, insieme, impiegano 3 minuti a versare l'acqua occorrente. (1)

Esercizio. — Il lettore risolva l'indovinello, supponendo invece che i minuti occorrenti ad ogni zampillo fossero 10, 12, 15.

---

(1) Nell'*Antologia greca* i tre zampilli impiegavano, separatamente: un *sesto*, un *terzo* e una *metà* del *giorno*.
Le tre frazioni, aventi per somma 1, mi sembrano scelte col proposito di fuorviare il risolutore: distogliendolo dal pensare che, in *un giorno*, ciascuno dei tre zampilli avrebbe riempito la vasca 6 volte, 3 volte e 2 volte; cioè, insieme, 11 volte.
Quindi, il tempo che essi impiegavano, insieme, era 1/11 di *giorno*: non riducibile a numero intero di *ore*, nè di *minuti* e neppure di *secondi*.
Ho scelto perciò altri numeri, meno insidiosi e più opportuni.

§ 2. — Differenza

1. — Come accade per i numeri *naturali*:
la *differenza* di due numeri *razionali* (il primo dei quali non sia minore del secondo) è quel numero *razionale* che, *aggiunto* al secondo, dà per *somma* il primo
Segue, ad es., che

$$\frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$$

perchè:

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}.$$

2. — Si conclude che:
la differenza di due frazioni, aventi lo stesso denominatore, è quella frazione, con lo stesso denominatore, che ha per numeratore la differenza dei numeratori.

3. — Menicuccio ha ricevuto *tre ottavi* di una torta e ne ha già mangiato *un ottavo*.
Quanto ne ha mangiato?
Si pensa:

$$\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3-1}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

e si risponde: — Ne ha mangiato *un quarto*.

4. — *Se le frazioni da sottrarre hanno denominatori diversi, anzitutto si riducono al minimo denominatore comune.* E poi si applica la regola precedente.

Ad es.,

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{5}{30} - \frac{3}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}.$$

5. — Carlo e Francesco hanno messo in un' azienda industriale, l'uno 1/21 e l'altro 1/70 del capitale sociale.

L'anno scorso, l'utile netto dell'azienda, da ripartire fra i soci capitalisti, è stato L. 97650.

Quanto di più ha ricevuto Carlo, in confronto di Francesco?

6. — Il calcolo si può fare coi *numeri naturali*, così:

97650	21	97650	70	
136	4650	276	1395	4650
105		665		— 1395
0		350		3255
		0		

Carlo ha ricevuto L. 3255 più di Francesco.

7. — Ricorrendo invece alle *frazioni*, si può fare anzitutto così:

$$\frac{1}{21} - \frac{1}{70} = \frac{10-3}{210} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

e poi concludere che le lire avute in più da Carlo sono state:

$$97650 : 30 = 9765 : 3 = 3255.$$

8. — Risulta provato che:

$$\left(\frac{1}{21} \text{ di } 97650\right) - \left(\frac{1}{70} \text{ di } 97650\right) = \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{70}\right) \text{ di } 97650.$$

E similmente con altri numeri.

In questo modo, la *sottrazione* delle *frazioni* riesce utile anche per eseguire operazioni con numeri *naturali*.

9. — Quanto precede, consente di estendere a tutti i numeri *razionali* le proprietà seguenti, che prima d'ora avevamo attribuito soltanto ai numeri *naturali*:

la sottrazione è inversa dell'addizione (cioè: se dalla somma di due numeri si sottrae il secondo, si ritrova il primo),

l'addizione è inversa della sottrazione (cioè: se alla differenza di due numeri si aggiunge il secondo, si ritrova il primo).

10. — Inoltre:

una differenza non cambia, aggiungendo o togliendo uno stesso numero al sottraendo e al sottrattore.

11. — Quindi:

la differenza di due numeri misti, aventi la stessa parte intera, è eguale alla differenza delle loro parti frazionarie.

Ad es.,

$$\left(2 + \frac{5}{6}\right) - \left(2 + \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{10-9}{12} = \frac{1}{12}.$$

E la differenza di due numeri misti, aventi la stessa parte frazionaria, è eguale alla differenza delle loro parti intere.

Ad es.,

$$\left(8 + \frac{4}{7}\right) - \left(5 + \frac{4}{7}\right) = 8 - 5 = 3.$$

12. — Inoltre:

allorchè su un numero si devono eseguire successivamente un' addizione ed una sottrazione, è lecito di invertire l' ordine delle due operazioni (purchè il terzo numero non sia maggiore del primo).

13. — Quindi:

per sottrarre un numero naturale da un numero misto, o si sottrae dalla parte intera di questo.

Ad es.,

$$\left(9 + \frac{5}{8}\right) - 7 = (9 - 7) + \frac{5}{8} = 2 + \frac{5}{8}.$$

14. — La signora Irene esce di casa con la persona di servizio, per alcune compere.

Ha in tasca 37 *lire* (tre biglietti da 10 lire, due monete da 2 lire e tre monete da 1 lira) e 9 *soldi.*

Prima di tutto, compera 2 lire di pane.

Consegna al panettiere una delle monete da 2 lire, senza por mano ai soldi.

Poichè i *soldi* sono *ventesimi di lira,* si può *indicare* tutto il conto in *lire.*

La signora Irene esce dal panettiere con L.

$$\left(37 + \frac{9}{20}\right) - 2 = (37 - 2) + \frac{9}{20} = 35 + \frac{9}{20}$$

cioè con 35 *lire* e 9 *soldi.*

15. — Dal macellaio, la signora Irene spende 10 lire e 5 soldi.

Lo paga con un biglietto da 10 lire e con 5 soldi.

Possiamo indicare le L. che le rimangono, così:

$$\left(35 + \frac{9}{20}\right) - \left(10 + \frac{5}{20}\right) = (35 - 10) + \left(\frac{9}{20} - \frac{5}{20}\right).$$

16. — Cioè:

per calcolare la differenza di due numeri misti, nei quali la parte frazionaria del primo è *maggiore* della parte frazionaria del secondo, *basta sottrarre la parte intera dalla parte intera e la parte frazionaria dalla parte frazionaria*; e addizionare le due differenze.

17. — E così, intanto, abbiamo applicato *inversamente* la proprietà che:

una somma di differenze è eguale alla differenza tra la somma dei sottraendi e la somma dei sottrattori;

la quale proprietà, già nota per i soli numeri *naturali,* va estesa a tutti i numeri *razionali.*

18. La signora Irene è uscita dal macellaio con L.

$$(35 - 10) + \left(\frac{9}{20} - \frac{5}{20}\right) = 25 + \frac{4}{20}.$$

Pierino vorrebbe ridurre ai minimi termini i 4/20 di lira, ma la signora Irene ha già speso i 4 soldi per comperare un giornale ed è rimasta con 25 *lire* precise (due biglietti da 10 lire, una moneta da 2 lire e tre monete da 1 lira).

19. Giorgio sta mangiando una mela.

Ne ha mangiato 1/4.

Quanto ne ha ancora?

3/4.

Diremo che 3/4 è ***il complemento*** di 1/4.

20. Ogni *frazione propria* ha il suo *complemento,* che si ottiene *togliendola* da 1.

A questo scopo, giova trasformare 1 in *frazione apparente,* col denominatore della frazione data.

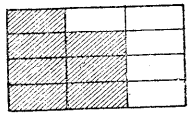
Ad. es., *il complemento* di 3/5 è

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5-3}{5} = \frac{2}{5}.$$

21. Si conclude che:

il complemento di una frazione propria è la frazione (propria) *con lo stesso denominatore, che ha per numeratore la differenza tra il denominatore ed il numeratore della frazione data.*

Ad es., di questo *rettangolo* ho fatto 12 *parti eguali* e ne ho *tratteggiato* 7.



La parte tratteggiata del rettangolo è 7/12 e *la parte non tratteggiata* (il complemento) è

$$\frac{12-7}{12} = \frac{5}{12}.$$

22. Per via, la signora Irene si imbatte in una venditrice di arance e ne compera per 17 soldi.

Per pagare, dà 1 lira e riceve 3 soldi di resto.

Si può fare questo conto *in lire*, così:

$$25 - \frac{17}{20} = 24 + \left(1 - \frac{17}{20}\right) = 24 + \frac{20-17}{20} = 24 + \frac{3}{20}$$

in cui 3/20 è *il complemento* di 17/20.

23. — Si conclude che:

per togliere una frazione propria da un numero naturale, basta diminuire questo di 1 e poi aggiungere il complemento della frazione.

24. — La signora Irene ha dato i 3 soldi ad un povero ed è rimasta con L.

$$\left(24 + \frac{3}{20}\right) - \frac{3}{20} = 24$$

risultando confermato che *la sottrazione è inversa dell' addizione.*

25. — Dal droghiere, la signora Irene spende 10 lire e 7 soldi.

Paga le *lire* con un biglietto da 10 lire e, per pagare i *soldi*, dà una moneta da 1 lira; riceve 13 soldi di resto.

Ed esce dal negozio con 13 *lire* e 13 *soldi.*

Pur avendo fatto il conto *mentalmente*, giova rifarlo *per iscritto*, per ben capire ogni *trasformazione.*

Anzitutto:

$$24 - \left(10 + \frac{7}{20}\right) = (24 - 10) - \frac{7}{20}.$$

26. — Cioè, intanto:

se da un numero si deve togliere una somma, invece si possono togliere successivamente i singoli addendi;

la quale proprietà, già nota per i soli numeri *naturali*, va estesa a tutti i numeri *razionali.*

27. — In particolare:

allorchè da un numero naturale si deve sottrarre un numero misto (la cui parte intera sia minore di quello), *si sottraggono successivamente la parte intera e la parte frazionaria.*

28. — Eseguendo la prima sottrazione, si ottiene:

$$14 - \frac{7}{20}$$

e si ritorna al caso di dover togliere una *frazione propria* da un numero *naturale.*

Quindi:

$$14 - \frac{7}{20} = (14 - 1) + \frac{20-7}{20} = 13 + \frac{13}{20}.$$

Come sapevamo, la signora Irene è uscita dal droghiere con 13 *lire* (un biglietto da 10 lire, una moneta da 2 lire ed una moneta da 1 lira) e con 13 *soldi*.

29. — Prima di rincasare, la signora Irene fa alcune compere dall'erbivendola, spendendo 2 lire e 15 soldi.

Credendo di poter pagare *lire* con *lire* e *soldi* con *soldi*, dà la moneta da 2 lire e conta i soldi.

Accortasi ch'essi non bastano, dà anche la moneta da 1 lira e riceve 5 soldi di resto.

Che cosa le è rimasto? un biglietto da 10 lire, i 13 soldi avuti di resto dal droghiere e i 5 soldi avuti di resto dall'erbivendola.

In tutto, 10 *lire* e 18 *soldi*.

30. — Si conclude che:

per calcolare la differenza di due numeri misti, nei quali la frazione del primo è *minore* della frazione del secondo, *anzitutto si toglie 1 dalla parte intera del primo e lo si aggiunge alla sua parte frazionaria, ma trasformato in frazione apparente con lo stesso denominatore.* Dopo di che, basta sottrarre *la parte intera dalla parte intera* e *la frazione dalla frazione.*

31. — Nel caso nostro, prima si fa la trasformazione:

$$13 + \frac{13}{20} = (13 - 1) + \left(\frac{20}{20} + \frac{13}{20}\right) = 12 + \frac{33}{20}$$

e poi si eseguisce la sottrazione:

$$\left(12 + \frac{33}{20}\right) - \left(2 + \frac{15}{20}\right) = (12 - 2) + \left(\frac{33}{20} - \frac{15}{20}\right) =$$
$$= 10 + \frac{18}{20}$$

E, come sapevamo, la signora Irene è rincasata con 10 *lire* e 18 *soldi*.

32. — Per un utile raffronto, dovendo calcolare la *differenza* di *due frazioni improprie con denominatori diversi*, facciamolo dapprima nel modo già indicato per *due frazioni qualunque.*

$$\frac{1463}{6} - \frac{1437}{10} = \frac{1463 \times 5}{30} - \frac{1437 \times 3}{30} =$$
$$= \frac{7315 - 4311}{30} = \frac{3004}{30} = 100 + \frac{4}{30} = 100 + \frac{2}{15}.$$

È preferibile trasformare anzitutto ciascuna *frazione impropria* in *numero misto*, così:

$$\frac{1463}{6} - \frac{1437}{10} = \left(243 + \frac{5}{6}\right) - \left(143 + \frac{7}{10}\right) =$$
$$= 100 + \frac{25 - 21}{30} = 100 + \frac{4}{30} = 100 + \frac{2}{15}.$$

33. — Ma sarebbe *preferibile* il *primo metodo*, se le *due frazioni improprie* avessero uno *stesso denominatore.*

Ad es.,

$$\frac{9893}{48} - \frac{9641}{48} = \frac{252}{48} = 5 + \frac{12}{48} = 5 + \frac{1}{4}.$$

Per convincersene, si rifaccia il calcolo, trasformando le frazioni date in numeri misti.

Esercizi

I. — Si calcoli *mentalmente* la differenza tra:

1.	9/13 e 4/13		**2.**	13/18 e 7/18		**3.**	11/12 e 5/12	
4.	1/2 ed 1/4		**5.**	1/2 ed 1/6		**6.**	1/4 ed 1/6	
7.	1/10 ed 1/15		**8.**	5/12 e 4/15		**9.**	11/12 e 9/10.	

II. — Si calcolino *per iscritto* le seguenti differenze:

1. $\frac{3}{4} - \frac{11}{36}$ **2.** $\frac{11}{12} - \frac{8}{9}$ **3.** $\left(3 + \frac{7}{12}\right) - \left(2 + \frac{2}{15}\right)$

4. $\left(7 + \frac{5}{18}\right) - \left(5 + \frac{7}{24}\right)$ **5.** $\frac{1205}{12} - \frac{803}{8}$ **6.** $\frac{316}{15} - \frac{121}{12}$.

III. — *Dire* il complemento di ciascuna delle frazioni:

2/3 1/4 3/5 17/25 41/48 39/50.

IV. — Si calcolino *mentalmente* le differenze:

1. $\left(7+\frac{3}{5}\right)-\left(2+\frac{3}{5}\right)$ 2. $\left(3+\frac{7}{12}\right)-\left(3+\frac{5}{12}\right)$

3. $\left(1+\frac{3}{4}\right)-\left(1+\frac{2}{3}\right)$ 4. $\left(6+\frac{1}{8}\right)-5$

5. $\left(9+\frac{13}{24}\right)-\left(5+\frac{5}{24}\right)$ 6. $\left(10+\frac{3}{4}\right)-\left(3+\frac{1}{2}\right)$

7. $1-\frac{5}{8}$ 8. $1-\frac{3}{8}$ 9. $7-\frac{3}{8}$

10. $17-\left(10+\frac{3}{8}\right)$ 11. $15-\left(6+\frac{8}{9}\right)$

12. $\left(21+\frac{2}{7}\right)-\left(10+\frac{4}{7}\right)$

13. $\frac{870}{7}-\frac{814}{7}$ 14. $\frac{583}{40}-\frac{579}{40}$ 15. $\frac{350}{12}-\frac{335}{12}$

V. — Si eseguiscano *per iscritto* le operazioni indicate:

1. $1-\frac{5}{12}-\frac{8}{15}$ 2. $1-\frac{13}{24}-\frac{9}{20}$ 3. $\frac{17}{20}+\frac{2}{5}-\frac{1}{4}$

4. $\frac{11}{13}+\frac{5}{39}-\frac{25}{26}$ 5. $\frac{16}{21}-\frac{8}{35}+\frac{7}{15}$ 6. $\frac{16}{19}-\frac{1}{38}+\frac{1}{57}$

TALENTI, MINE, SICLI, DRACME ED OBOLI

Storia. — 1. Il ***talento*** era una misura di *peso*.

La ***mina*** era 1/60 di *talento*.

Il ***siclo*** era 1/60 di *mina*.

Nelle rovine della Caldea e dell'Assiria vennero scoperti numerosi corpi, di bronzo e di terra cotta, che servivano per *pesare*. Se ne conservano molti esemplari nel museo del Louvre a Parigi e nel museo britannico a Londra.

Dagli studi fatti risulta che vi erano *due sistemi di pesi*, che le scritte *cuneiformi* distinguevano in «*peso del paese*» e «*peso del re*», e che gli archeologi moderni distinguono in «***debole***» e «***forte***».

I pesi *forti* erano ***doppi*** dei pesi *deboli*.

Il ***talento debole*** corrispondeva a g. 30276.

2. Il commercio, marittimo dei Fenici e carovaniero della Lidia, introdusse in Grecia ***il duplice sistema*** (debole e forte).

Il *talento* restò suddiviso in 60 ***mine***. Ma la ***mina*** (anzichè in 60 sicli) venne suddivisa in 100 ***dracme*** e la ***dracma*** in 6 ***oboli***.

Variò poi alquanto il peso della ***dracma*** nelle varie provincie della Grecia ed in ciascuna di esse col volgere del tempo: ed il ***talento*** ne seguì le sorti, continuando a corrispondere a 6000 ***dracme***.

Furono rinvenuti corpi di piombo che i Greci usavano per pesare. Ma, quantunque meno antichi di quelli adoperati dai Caldei e dagli Assiri, furono più corrosi dalle intemperie: e perciò la loro valutazione in grammi rimane più incerta.

3. Erroneamente, alcuni commentatori di Omero hanno creduto ch'egli accennasse al ***talento***, debole o forte, di cui vi ho parlato.

Il ***talento omèrico*** era misura di ***peso***, ma soltanto per l'***oro***. E ch'esso fosse notevolmente ***minore*** del ***talento debole*** (che sappiamo maggiore di 30 kg. e quindi era adoperato per pesare metalli meno preziosi), risulta dal fatto che Achille offrì ***due talenti d'oro*** come ***quarto*** premio d'una corsa, dopo aver offerto un ***cavallo*** come ***secondo*** premio; ed inoltre, altrove, Omero valuta un ***bue*** più di ***mezzo talento d'oro***.

Per questi ed altri riferimenti, gli studiosi moderni ritengono che il ***talento omerico*** equivalesse, press'a poco, al ***siclo debole***.

Etimologie. — **1.** Un'antica misura di peso ebraica era chiamata «***mna***». Questa parola fu trascritta in greco, e diventò «mina» in latino ed in italiano.

2. Dall'indo-europeo «***tal***», il greco «tàlanton», da cui il latino «*talèntum*», da cui l'italiano *talento*. Ma dall'essere anticamente usato a pesare l'oro, venne a significare ogni più preziosa qualità spirituale: ingegno (ad es., «un uomo di talento»), inclinazione (ad es., «ha talento per la musica»), volontà, libertà (ad es., «agisci a tuo talento»).

3. Da «*tal*» derivò in latino «*tòl-lere*» (sollevare, portare), da cui le voci italiane: *togliere* (rimuovere, sottrarre, privare, usurpare), *togli* (impedisci), *to'* (prendi), *toh!* (esclamazione di sorpresa), *distogliere* (rimuovere da un proponimento), *tollerare* (sop-portare), *estollere* (elevare).

4. E da «*tal*» o da «*tòllere*» derivarono il loro nome alcune monete, come il *tàllero* (germanico, non più in uso) ed il *dòllar* (nord-americano), e persino il giuoco dell'*altalena*.

5. Nè basta ancora.

Con metàtesi (trasposizione di lettere), « *tal* » divenne « *tla* », da cui in greco prima « ta-tla-s » (sopportatore) e poi « *Atlas* », da cui *Atlante*, nome del gigante mitologico che portava sulle spalle il peso del mondo. Così raffigurato nelle vecchie raccolte di carte geografiche, trasmise ad esse il suo nome.

6. E da « *tla* » venne in latino prima « tla-tum » e poi « *la-tum* » (portato), da cui in italiano, oltre a *lato* (in geometria, forse usato dapprima col significato ristretto che ora diamo alla parola *base*), le voci: *tras-lato* (trasporto di significato, dal proprio al figurato), *re-latore* e *de-latore* (che riporta notizie, palesemente o segretamente), *di-lazione* (che trasporta nel tempo e quindi ritarda), *di-latazione* (che trasporta, allontanandole fra loro, le particelle d'un corpo materiale, per effetto del calore), *il-lazione* (che trasporta col pensiero, ragionamento), *ob-latore* (che porta qualche cosa in dono), *ab-lativo*, *super-lativo*, ecc.

Tre indovinelli greci

1. — Per fare una statuetta d'oro, rappresentante Minerva, alcuni generosi regalarono allo scultore una *metà*, un *ottavo*, un *decimo* ed un *ventesimo* del metallo occorrente.

Per completarlo, un altro diede 9 *talenti* (omèrici) d'oro.

Quanti talenti pesava quella statua?

Spiegazione. — Anzitutto:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{20+5+4+2}{40}=\frac{31}{40}.$$

Ora, il complemento di 31/40 è 9/40.

Quindi, i 9 talenti dati dall'ultimo donatore erano i 9/40 del peso di tutta la statua: il quale perciò era di 40 talenti.

2. — Policrate, tiranno di Samo, chiese un giorno al sommo Pitagora quanti discepoli egli avesse.

E Pitagora gli rispose:

— Una *metà* dei miei discepoli studia geometria, un *quarto* le leggi naturali, un *settimo* filosofia e 3 studiano musica.

Spiegazione. — Anzitutto:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=\frac{14+7+4}{28}=\frac{25}{28}.$$

Ora, il complemento di 25/28 è 3/28.

Quindi, i 3 che studiavano musica erano i 3/28 di tutti i discepoli di Pitagora: i quali perciò erano 28.

3. — Sulla tomba del matematico Diofanto era detto che un *sesto* della sua vita trascorse nell'infanzia, un *dodicesimo* nel l'adolescenza ed un altro *settimo* prima di ammogliarsi. *Cinque* anni dopo ebbe un figlio, che visse la *metà* del padre. Questi gli sopravvisse *quattro* anni.

A quanti anni morì Diofanto?

Spiegazione. — Cambiando opportunamente l'ordine degli addendi, risulta che: oltre alla somma di 1/6, 1/12, 1/7, 1/2 della sua vita, questa durò altri 5 + 4 anni.

Risposta. — Diofanto morì ad 84 anni.

Tre testamenti

1. — Un vecchio signore, senza parenti, lasciò 4/15 del suo patrimonio ad un Asilo infantile, 5/12 ad un Ospedale, 3/10 alla Congregazione di carità ed il rimanente, che risultò di L. 7613, al notaio presso il quale era depositato il suo patrimonio e che doveva eseguire le sue volontà.

Quanto spettò a ciascuno dei tre istituti beneficati?

2. — Un signore lasciò 4/5 del suo patrimonio alla moglie ed ai figli, 5/48 ad una sua sorella, 1/16 ad un suo nipote ed il rimanente all'ospedale.

Alla sua morte, il suo patrimonio fu valutato L. 936000.

Quanto toccò all'ospedale? (L. 31200)

3. — Un commerciante lasciò:

alla moglie, gioielli valutati	L. 18760
al figlio	» 4690
ed alla figlia	» 7035

Inoltre, comprendendo il valore di quei gioielli nel suo patrimonio, di questo lasciò:

2/9 alla moglie, 11/36 al figlio e 7/24 alla figlia.

Poichè, in tal modo, il patrimonio fu spartito esattamente, si vuol sapere quanto abbia avuto, in tutto, ciascun erede.

(Il complemento della somma delle tre frazioni fa conoscere qual parte del patrimonio fosse la somma dei valori attribuiti ai gioielli. Senza calcolare il valore di tutto il patrimonio, riuscirà facile calcolarne 1/72. Quanti settantaduesimi del patrimonio ebbe ciascun erede, oltre ai gioielli? in tutto?)

Un muratore e un apprendista

1. — Ogni giorno, un muratore mette insieme 1/36 di uno dei due muri, di eguale altezza, ch' egli deve costruire lungo i due lati di una strada.

Dopo 9 giorni di lavoro, egli si fa aiutare da un apprendista ed insieme con lui ne fa 1/20 al giorno.

Finito un muro, il muratore si ammala.

L' apprendista incomincia la costruzione del secondo muro ed ha già lavorato da solo 9 giorni, allorchè il muratore si rimette a lavorare con lui; ed insieme finiscono anche il secondo muro.

Quale mercede spettava all' apprendista, a 12 lire il giorno (di lavoro, feste escluse)?

2. — Per risolvere il problema enunciato, si risponda ordinatamente alle seguenti domande:

Quale frazione irriducibile del primo muro aveva costruito il muratore, prima ch' egli si facesse aiutare dall' apprendista?

Quale frazione del primo muro rimaneva da costruire?

Questa frazione è trasformabile in ventesimi?

Quanti giorni ha lavorato l' apprendista, per la costruzione del primo muro? (15 giorni)

Quale frazione irriducibile del primo muro ha egli costruito ogni giorno? (da 1/20 si tolga 1/36)

Quale frazione irriducibile del secondo muro ha egli costruito, mentre il muratore era ammalato?

Quale frazione del secondo muro rimaneva da costruire?

Questa frazione è riducibile in ventesimi?

Quanti giorni ha lavorato l' apprendista, insieme col muratore, per la costruzione del secondo muro? (16 giorni)

E quanti giorni vi aveva lavorato da solo?

E quanti giorni aveva già lavorato, insieme col muratore, per la costruzione del primo muro?

In conclusione, quanti giorni ha lavorato l' apprendista alla costruzione dei due muri?

E perciò quale mercede gli spettava? (L. 480)

OSSERVAZIONE

1. — Come sapete, una *frazione* cambia soltanto di forma, allorchè ambo i termini si *moltiplicano* per uno *stesso numero* ovvero si *dividono* per uno *stesso numero* (che sia un loro divisore comune).

Ho avuto occasione di rilevare che molti scolari credono *erroneamente* che il valore di una *frazione* non cambi, neppure se si *aggiunge* o si *toglie* ad ambo i termini uno *stesso numero*.

2. — Ciò accade veramente, allorchè i due termini della frazione proposta *sono* fra loro *eguali*: perchè *saranno* fra loro *eguali* anche dopo aver *aggiunto* o *tolto* ad entrambi uno *stesso numero*.

Sicchè, in questo caso, la frazione rimane eguale ad 1.

3. — Esaminiamo che cosa accada, invece, *aggiungendo* uno *stesso numero*, ad es. 2, ad ambo i termini di una *frazione propria*, ad es. 3/7.

La nuova frazione è 5/9.

Ora, mentre	*il complemento* di 3/7 è 4/7,
invece	*il complemento* di 5/9 è 4/9.
Poichè	4/9 è *minore* di 4/7,
segue che:	5/9 è *maggiore* di 3/7.

4. — Alla stessa conclusione si giungerebbe con altri numeri, purchè la frazione sia *propria*.

Infatti, *aggiungendo* uno *stesso numero* ad ambo i termini, non cambia *la differenza* tra il denominatore ed il numeratore.

Quindi, *il complemento* della frazione, avendo *numeratore costante* ed assumendo *denominatore maggiore*, diventa *minore*.

E perciò *la frazione* diventa *maggiore*.

5. — Dunque:

aggiungendo uno stesso numero ad ambo i termini di una frazione propria, la si accresce.

Potete rileggere, imaginando che, al posto di « aggiungendo » ed « accresce », sia scritto: « togliendo » e « diminuisce ».

6. — Per completare questa ricerca, esaminiamo che cosa accada, invece, *aggiungendo* uno *stesso numero*, ad es. 2, ad ambo i termini di una *frazione impropria*, ad es. 7/3.

La nuova frazione è 9/5.

Ora, $\frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3}$ e $\frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5}$.

Poichè 4/5 è *minore* di 4/3
segue che: 9/5 è *minore* di 7/3.

7. — Alla stessa conclusione si giungerebbe con altri numeri, purchè la frazione sia *impropria*.

Infatti, dopo aver *aggiunto* uno *stesso numero* ad ambo i termini, si *tolga 1* tanto alla frazione data, quanto alla nuova frazione.

La *frazione residua* avrà per *numeratore costante* la *differenza* tra il numeratore ed il denominatore della frazione, data o nuova.

Ma il *denominatore* della *frazione residua* diventa *maggiore*.

Perciò la *frazione residua* diventa *minore* e quindi anche *tutta la frazione* diventa *minore*.

8. — Dunque:

aggiungendo uno stesso numero ad ambo i termini di una frazione impropria, la si diminuisce.

Potete rileggere, imaginando che, al posto di « aggiungendo » e « diminuisce », sia scritto: « togliendo » ed « accresce ».

9. — I due casi si possono riassumere in un solo enunciato, così:

aggiungendo uno stesso numero ad ambo i termini di una frazione diversa da 1, essa si avvicina ad 1, rimanendo propria od impropria.

CAPITOLO III

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

§ 1. — Prodotto e quoto di un numero razionale per un numero naturale

1. — Si rammenti che:

1) *il prodotto* di un numero *naturale* per un numero *naturale* non minore di 2, è eguale alla *somma* di tanti addendi eguali al *moltiplicando*, quanti ne indica il *moltiplicatore*;

2) se il *moltiplicatore* è 1, allora il *prodotto* è eguale al *moltiplicando*;

3) se il *moltiplicatore* è 0, allora il *prodotto* è eguale a 0.

2. — Tutto ciò continua ad esser vero, anche se il *moltiplicando* (soltanto) è un qualunque numero *razionale*.

3. — Quindi, ad es.,

$$\frac{5}{17} \times 3 = \frac{5}{17} + \frac{5}{17} + \frac{5}{17} = \frac{5+5+5}{17} = \frac{5 \times 3}{17},$$

$$\frac{5}{17} \times 1 = \frac{5}{17} = \frac{5 \times 1}{17},$$

$$\frac{5}{17} \times 0 = 0 = \frac{5 \times 0}{17}.$$

4. — Sicchè, in ogni caso:

per moltiplicare una frazione per un numero naturale, basta moltiplicare per esso il numeratore (lasciando invariato il denominatore).

5. — D' ora in poi, immediatamente:

$$\frac{5}{17} \times 3 = \frac{5 \times 3}{17} = \frac{15}{17}.$$

6. — Giova osservare se il *denominatore* ed il *moltiplicatore* abbiano qualche *divisore comune*: nel qual caso, conviene *eliminarlo* prima di *eseguire* la moltiplicazione.

Ad es., si debba moltiplicare 23/707 per 28.

Chi si accorge di poter *semplificare* per 7, fa:

$$\frac{23}{707} \times 28 = \frac{23 \times 28}{707} = \frac{23 \times 4}{101} = \frac{92}{101}.$$

Chi non se ne accorge, fa invece:

$$\frac{23}{707} \times 28 = \frac{23 \times 28}{707} = \frac{644}{707}$$

e poi, o non riduce il risultato ai minimi termini, ovvero deve imprendere nuovo apposito lavoro per scoprire che

$$\mathbf{D}\ (644{,}707) = 7.$$

7. — Ed ancora:

se il *prodotto* è una frazione *impropria*, non si trascuri di *trasformarla* in *numero misto*.

Ad es., semplificando anzitutto per 13,

$$\frac{9}{91} \times 65 = \frac{9 \times 5}{7} = \frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7}.$$

8. — Se il *moltiplicatore* è *divisibile* per il *denominatore*, il *prodotto* è un numero *naturale*.

Ad es.,

$$\frac{13}{14} \times 56 = \frac{13 \times 56}{14} = 13 \times 4 = 52.$$

9. — In particolare:

il *prodotto* di una *frazione* per il suo *denominatore* è eguale al suo *numeratore*.

Ad es.,

$$\frac{5}{9} \times 9 = 5.$$

10. — Se il *moltiplicando* è un *numero misto*, si può trasformarlo in *frazione impropria*.

$$\left(5 + \frac{2}{5}\right) 4 = \frac{27}{5} \times 4 = \frac{27 \times 4}{5} = \frac{108}{5} = 21 + \frac{3}{5}.$$

Altrimenti, si può ricorrere alla proprietà *distributiva* della *moltiplicazione* rispetto all'*addizione*, così:

$$\left(5 + \frac{2}{5}\right) 4 = 20 + \frac{8}{5} = 20 + \left(1 + \frac{3}{5}\right) = 21 + \frac{3}{5}.$$

11. — Come per i numeri *naturali,* così per i numeri *razionali* :

il quoto di due numeri (il secondo dei quali *diverso da zero*) è il numero che, *moltiplicato* per il *secondo,* dà per *prodotto* il *primo.*

12. — Segue ad es., che

$$\frac{5}{7} : 3 = \frac{5}{7 \times 3},$$

perchè

$$\frac{5}{7 \times 3} \times 3 = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{5}{7}.$$

13. — Sicchè :

per dividere una frazione per un numero naturale, basta moltiplicare per esso il denominatore (lasciando invariato il numeratore).

14. — Giova osservare se il *numeratore* ed il *divisore* abbiano qualche *fattore comune* : nel qual caso, conviene *eliminarlo* prima di *eseguire* la moltiplicazione.

Ad es.,

$$\frac{24}{25} : 16 = \frac{24}{25 \times 16} = \frac{3}{25 \times 2} = \frac{3}{50}.$$

Ed ancora, ad es.,

$$\frac{36}{37} : 9 = \frac{36}{37 \times 9} = \frac{4}{37}$$

cioè, in questo caso,

$$\frac{36}{37} : 9 = \frac{36 : 9}{37}.$$

15. — Sicchè :

per dividere una frazione per un numero naturale, basta (quando si può) *dividere per esso il numeratore* (lasciando invariato il denominatore).

16. — Qualche scolaro, ad es., anzichè

semplifico per 9 la frazione 45/54,

dice erroneamente :

divido per 9 la frazione 45/54.

Se *facesse* quel che *dice,* anzichè 5/6, otterrebbe 5/54.

17. — Se il *dividendo* è un *numero misto,* giova trasformarlo in frazione *impropria.*

Ad es.,

$$\left(7 + \frac{1}{7}\right) : 10 = \frac{50}{7} : 10 = \frac{5}{7}.$$

A meno che la *parte intera* non sia *divisibile* per il *divisore,* nel quale caso giova ricorrere alla proprietà *distributiva* della *divisione* rispetto all' *addizione.*

Ad es.,

$$\left(60 + \frac{3}{8}\right) : 15 = 4 + \frac{3}{8 \times 15} =$$

$$= 4 + \frac{1}{8 \times 5} = 4 + \frac{1}{40}.$$

Esercizi

I. — Si calcoli *mentalmente*:

1. $\frac{3}{10} \times 3$	2. $\frac{4}{5} \times 1$	3. $\frac{6}{7} \times 0$
4. $\frac{4}{35} \times 5$	5. $\frac{4}{35} \times 7$	6. $\frac{7}{12} \times 3$
7. $\frac{7}{12} \times 4$	8. $\frac{2}{7} \times 35$	9. $\frac{5}{6} \times 6$
10. $\frac{5}{8} : 3$	11. $\frac{6}{7} : 2$	12. $\frac{6}{7} : 4$.

II. — Si calcoli *per iscritto*:

1. $\frac{7}{12} \times 15$	2. $\frac{7}{20} \times 35$	3. $\frac{59}{60} \times 48$
4. $\frac{72}{73} : 15$	5. $\frac{36}{37} : 27$	6. $\left(4 + \frac{7}{15}\right) 18$
7. $\left(98 + \frac{1}{5}\right) 10$	8. $\left(9 + \frac{1}{9}\right) : 41$	9. $\left(56 + \frac{2}{3}\right) : 7$
10. $\left(13 + \frac{1}{3}\right) : 10$	11. $\left(72 + \frac{3}{5}\right) : 9$	12. $\left(13 + \frac{4}{7}\right) : 19$.

§ 2. — Prodotto di numeri razionali

1. — Allorchè si opera con numeri *naturali*, sappiamo che (quando lo si possa):

per *dividere* un *prodotto* per un numero, basta *dividere* per esso *uno dei fattori.*

Ad es., $(15 \times 18) : 3$

si può trasformare indifferentemente in

$$(15 : 3)\ 18 \quad \text{ovvero} \quad 15\ (18 : 3).$$

Quindi, inversamente:

$$(15 : 3)\ 18 = (15 \times 18) : 3$$

ed anche $\quad 15\ (18 : 3) = (15 \times 18) : 3.$

2. — Si può scrivere in altro modo, *indicando* ciascuna *divisione* con un *segno di frazione* (il che fa risparmiare le *parentesi*, ma obbliga a *scrivere* i segni *sottintesi* di *moltiplicazione*):

$$\frac{15}{3} \times 18 = \frac{15 \times 18}{3}$$

ed anche

$$15 \times \frac{18}{3} = \frac{15 \times 18}{3}.$$

3. — Nel § precedente, senza preoccuparci se si trattasse di frazioni *apparenti* o no, abbiamo eseguito *trasformazioni* come quella indicata dalla *prima* di codeste due eguaglianze.

Altrettanto liberamente, d'ora in poi, eseguiremo *trasformazioni* come quella indicata dalla *seconda.*

4. — Sicchè, d'ora in poi,

« *moltiplicare un numero naturale per una frazione* » significherà: *moltiplicarlo per il numeratore e dividere il prodotto per il denominatore.*

Ad es.,

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7}.$$

5. — Giova confrontare con

$$\frac{2}{7} \times 3 = \frac{2 \times 3}{7},$$

rammentare che $3 \times 2 = 2 \times 3$.

e concludere che:

$$3 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \times 3.$$

6. — Sicchè:
anche *la moltiplicazione di una frazione e di un numero naturale è commutativa.*

7. — Allorchè si opera con numeri *naturali*, sappiamo che: il *prodotto* di due *quoti* è eguale al *quoto* del *prodotto* dei *dividendi* e del *prodotto* dei *divisori*.
Ad es.,

$$(20 : 5)\,(18 : 6) = (20 \times 18) : (5 \times 6)$$

il che si può anche scrivere:

$$\frac{20}{5} \times \frac{18}{6} = \frac{20 \times 18}{5 \times 6}.$$

In questa eguaglianza, ogni frazione è *apparente*.
Ma, d'ora in poi, eseguiremo *trasformazioni* come quella indicata da questa eguaglianza, senza preoccuparci se si tratti di frazioni *apparenti* o no.

8. — Dunque:
il prodotto di due frazioni è eguale a quella frazione, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

9. — Ad es.,

$$\frac{23}{41} \times \frac{18}{19} = \frac{23 \times 18}{41 \times 19} \quad \text{e} \quad \frac{18}{19} \times \frac{23}{41} = \frac{18 \times 23}{19 \times 41}.$$

Ma, per la proprietà *commutativa* della *moltiplicazione* dei numeri *naturali*,

$$23 \times 18 = 18 \times 23 \quad \text{e} \quad 41 \times 19 = 19 \times 41.$$

Quindi:

$$\frac{23}{41} \times \frac{18}{19} = \frac{18}{19} \times \frac{23}{41}.$$

10. — Si conclude che:
la moltiplicazione di due frazioni è commutativa.
E quindi:
la moltiplicazione di due numeri razionali è commutativa.

11. — Ancorchè *le frazioni* che si moltiplicano siano *irriducibili* (altrimenti, si riducano ai minimi termini), giova osservare se il *numeratore di ciascuna* abbia qualche *divisore comune* col *denominatore dell'altra*: nel qual caso, conviene *eliminarlo* prima di *eseguire* la moltiplicazione.
Ad es.,

$$\frac{14}{15} \times \frac{20}{21} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} = \frac{8}{9}$$

avendo diviso 14 e 21 per 7, nonchè 20 e 15 per 5.

12. — Sottintendendo il segno $\times$ *dopo* ciascuna parentesi,

$$\left(\frac{4}{7} \times \frac{8}{9}\right) \frac{2}{5} = \frac{4 \times 8}{7 \times 9} \times \frac{2}{5} = \frac{(4 \times 8)\,2}{(7 \times 9)\,5}.$$

Inoltre, sottintendendo il segno $\times$ *davanti* a ciascuna parentesi,

$$\frac{4}{7}\left(\frac{8}{9} \times \frac{2}{5}\right) = \frac{4}{7} \times \frac{8 \times 2}{9 \times 5} = \frac{4\,(8 \times 2)}{7\,(9 \times 5)}.$$

Ma, per la proprietà *associativa* della *moltiplicazione* dei numeri *naturali*,

$$(4 \times 8)\,2 = 4\,(8 \times 2) \quad \text{e} \quad (7 \times 9)\,5 = 7\,(9 \times 5).$$

Quindi, $\left(\frac{4}{7} \times \frac{8}{9}\right) \frac{2}{5} = \frac{4}{7} \left(\frac{8}{9} \times \frac{2}{5}\right).$

13.—Sicchè: *dovendo moltiplicare parecchie frazioni, queste si possono associare come si vuole* (e ciò senza variarne l'ordine).

Brevemente:

la moltiplicazione dei numeri razionali è associativa.

14. — Ciò premesso, *il prodotto* di quanti si vogliano numeri *razionali* si *indica* abitualmente senza alcuna *parentesi* (se non per racchiudere numeri *misti*), sottintendendo che il prodotto dei primi due va moltiplicato per il terzo, il prodotto ottenuto per il quarto e così via, fino ad aver adoperato l'ultimo fattore.

Quindi, ad es., invece di

$$\left(\frac{4}{7} \times \frac{8}{9}\right) \frac{2}{5} \qquad \text{si scrive} \qquad \frac{4}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{2}{5}.$$

Le *parentesi* si usano sol quando si vuole che i *fattori* vengano *associati* in *altro modo.*

15. — Dunque:

$$\frac{4}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{4 \times 8 \times 2}{7 \times 9 \times 5}.$$

Sicchè:

il prodotto di quante si vogliano frazioni è eguale a quella frazione, che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

16. — Se si *cambia l' ordine* delle frazioni da moltiplicare, *cambia l'ordine* dei fattori tanto nel numeratore quanto nel denominatore della frazione prodotto.

Ma, così facendo, in essa *non cambia* nè il numeratore nè il denominatore.

E perciò, ad es.,

$$\frac{4}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{7} \times \frac{8}{9}.$$

Si conclude che:

anche la moltiplicazione di parecchi numeri razionali è commutativa.

17. — Si osservi, ad es., che

$$\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{5}\right) \frac{2}{3} = \left(\frac{30}{35} + \frac{14}{35}\right) \frac{2}{3} = \frac{44}{35} \times \frac{2}{3} = \frac{88}{105},$$

$$\left(\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{21} + \frac{4}{15} = \frac{60}{105} + \frac{28}{105} = \frac{88}{105}$$

e quindi:

$$\left(\frac{6}{7} + \frac{2}{5}\right) \frac{2}{3} = \left(\frac{6}{7} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{5} \times \frac{2}{3}\right).$$

Sicchè: *per moltiplicare una somma di frazioni per una frazione, si può invece moltiplicare per essa ciascun addendo e poi addizionare i prodotti ottenuti.*

Nel § precedente ho chiarito un caso particolare di questa proprietà, a proposito della *moltiplicazione* di un *numero misto* per un numero *naturale.*

18. — Si osservi inoltre, che

$$\left(\frac{6}{7}-\frac{2}{5}\right)\frac{2}{3}=\left(\frac{30}{35}-\frac{14}{35}\right)\frac{2}{3}=\frac{16}{35}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{105},$$

$$\left(\frac{6}{7}\times\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{12}{21}-\frac{4}{15}=\frac{60}{105}-\frac{28}{105}=\frac{32}{105}$$

e quindi:

$$\left(\frac{6}{7}-\frac{2}{5}\right)\frac{2}{3}=\left(\frac{6}{7}\times\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{5}\times\frac{2}{3}\right).$$

Sicchè: *per moltiplicare una differenza di frazioni per una frazione, si può invece moltiplicare per essa il sottraendo e il sottrattore, e poi sottrarre i due prodotti ottenuti.*

19. — Brevemente:

anche per i numeri *razionali*, la *moltiplicazione* è *distributiva* rispetto all' *addizione* e rispetto alla *sottrazione.*

20. — Se tra i fattori di un prodotto di numeri razionali vi sono *numeri misti*, giova trasformarli in *frazioni improprie.*

Ad es.,

$$\frac{1}{20}\left(8+\frac{1}{8}\right)\left(2+\frac{6}{13}\right)=\frac{1}{20}\times\frac{65}{8}\times\frac{32}{13}=$$

$$=\frac{65\times 32}{20\times 8\times 13}=\frac{65\times 4}{20\times 13}=\frac{65}{5\times 13}=1.$$

21. — Ma, se vi è *un solo numero misto*, può convenire invece di *moltiplicarlo* per *il prodotto di tutti gli altri fattori*, ricorrendo alla proprietà *distributiva* della *moltiplicazione* rispetto all'*addizione.*

Ad es., dovendo calcolare

$$\left(75+\frac{3}{4}\right)\frac{16}{35}\times\frac{16}{45}\times\frac{63}{64}$$

si può calcolare anzitutto

$$\frac{16\times 16\times 63}{35\times 45\times 64}=\frac{16\times 63}{35\times 45\times 4}=\frac{4\times 63}{35\times 45}=\frac{4}{5\times 5}=\frac{4}{25}$$

e poi

$$\left(75\times\frac{3}{4}\right)\frac{4}{25}=\frac{75\times 4}{25}+\frac{3\times 4}{4\times 25}=$$

$$=(3\times 4)+\frac{3}{25}=12+\frac{3}{25}.$$

22. — *Senza eseguire la moltiplicazione*, vorrei sapere se *il prodotto* di 167/197 per 157/67 risulterà *maggiore* o *minore* del *moltiplicando.*

Osservo che *il moltiplicatore* è *maggiore* di 1 e che perciò posso scinderlo nella *somma* di 1 e della frazione 90/67, il cui numeratore ricavo da 157/67 togliendo 67 da 157.

Dopo ciò, applicando la proprietà *distributiva* della *moltiplicazione* rispetto all'*addizione,* ottengo:

$$\frac{167}{197}\times\frac{157}{67}=\frac{167}{197}\left(1+\frac{90}{67}\right)=\frac{167}{197}+\left(\frac{167}{197}\times\frac{90}{67}\right)$$

e concludo che *il prodotto* considerato è *maggiore* di 167/197, cioè del *moltiplicando.*

Alla stessa conclusione si giungerebbe, e nello stesso modo, considerando altri numeri: purchè *il moltiplicando* sia *diverso da zero* ed *il moltiplicatore* sia *maggiore di 1.*

— Nulla di diverso. Ad es., facendo a quel modo, da 8/3 e 7/2 si ricava 15/5, cioè 3.

Ora, 8/3 3 7/2

sono in ordine *crescente*, come risulta manifesto trasformando le frazioni improprie in numeri misti, così:

$$2+\frac{2}{3} \qquad 3 \qquad 3+\frac{1}{2}.$$

5. — Ma, intanto, abbiamo imparato un modo per calcolare una *frazione* che sia *compresa* tra *due frazioni* qualunque.

E siamo venuti a scoprire che: mentre *vi sono numeri naturali consecutivi* (come, ad es., 7 ed 8, fra i quali *non è compreso* alcun numero *naturale*), invece *non vi sono numeri razionali consecutivi*.

§ 3. — Applicazioni

1. — Pietro ha percorso 10 volte una strada lunga 3/5 di km. (5 volte in un verso e 5 nell'altro).

Paolo ha percorso 3/5 di una strada lunga 10 km.

Quanto ha camminato ciascuno?

2. — In km., il cammino percorso da Pietro è

10 volte 3/5

cioè: « la somma di 10 addendi eguali a 3/5 »,

cioè: $$\frac{3}{5}\times 10=\frac{3\times 10}{5}=3\times 2=6.$$

3. — In km., il cammino percorso da Paolo è

3/5 di 10

cioè 3 volte « 1/5 di 10 », cioè 3 volte « 10 : 5 », cioè 3 volte 2, che fa 6.

Si conclude che ciascuno dei due ha percorso 6 km.

4. — Risulta che

« 3/5 di 10 » è lo stesso che « $10\times\frac{3}{5}$ »

perchè anche:

$$10\times\frac{3}{5}=\frac{10\times 3}{5}=2\times 3=6.$$

5. — Nel suo giorno natalizio e mentre stava giocando con 4 cuginetti, Francesco si vide portare una bella torta, regalo di uno zio.

Ne offrì 1/12 a ciascuno ed una fetta eguale prese per sè.

Sopraggiunsero 5 amici di Francesco.

A ciascuno egli offrì 1/8 di quanto gli era rimasto.

Qual parte di torta mangiarono insieme quei 5 amici di Francesco?

6. — Francesco ed i 4 cuginetti avevano mangiato 5/12 della torta, lasciandone *il complemento*, cioè 7/12.

Quindi, gli amici di Francesco, insieme, ne hanno mangiato

5/8 di 7/12.

Ma la parte di torta mangiata da ciascuno di essi era

$$\frac{7}{12}:8 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{7}{12\times 8}$$

e perciò la parte di torta mangiata da tutti 5 era

$$\frac{7}{12\times 8}\times 5 \qquad \text{cioè} \qquad \frac{7\times 5}{12\times 8}$$

cioè 35/96.

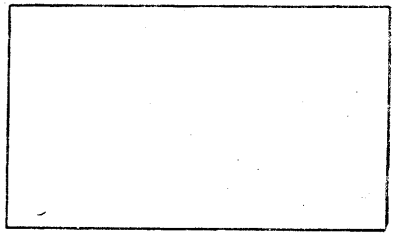
7. — Risulta che

$$\text{« 5/8 di 7/12 » è lo stesso che } \frac{7}{12} \times \frac{5}{8}$$

perchè anche

$$\frac{7}{12} \times \frac{5}{8} = \frac{7 \times 5}{12 \times 8}.$$

8.—Di questo rettangolo, ho *tratteggiato* 3/5 con linee discendenti da sinistra a destra e 4/7 con linee discendenti da destra a sinistra, sicchè la parte *doppiamente tratteggiata* è



« 4/7 di 3/5 » dell'intero rettangolo.

In altro modo, la parte *doppiamente tratteggiata* è composta di 4×3 parti, delle 7×5 parti che compongono l'intero rettangolo; e quindi essa è

$$\frac{4 \times 3}{7 \times 5} \text{ dell'intero rettangolo.}$$

Risulta confermato che

$$\text{« 4/7 di 3/5 » è lo stesso che « } \frac{4}{7} \times \frac{3}{5} \text{ ». (1)}$$

9. — Da quanto precede risulta che abitualmente, nella lingua italiana, *i due fattori razionali* di un *prodotto si dicono* nell'*ordine inverso* in cui si devono *scrivere* (cioè con *scambio apparente* del *moltiplicando* e del *moltiplicatore*) e pronunciando fra essi la parola « *volte* » o la parola « *di* », secondochè essa è *preceduta* da un *numero naturale* o da una *frazione*.

Sicchè, ad es., le frasi

« 5 volte 7 » ed « 8 volte 2/3 »

vanno tradotte così:

$$7 \times 5 \qquad \text{e} \qquad \frac{2}{3} \times 8.$$

Analogamente le frasi

« 4/9 di 13 » e « 4/7 di 5/9 »

vanno tradotte così:

$$13 \times \frac{4}{9} \qquad \text{e} \qquad \frac{5}{9} \times \frac{4}{7}.$$

10. — Ho proposto a Fiacchetti e a Pierino di calcolare quanto valga

1/2 di 2/3 di 3/4 di 4/5 di un soldo.

11. — Fiacchetti, con molta diligenza, ha scritto:
Un soldo vale 5 centesimi (di lira).

Quindi:

1/5 di un soldo è 1	cent.
4/5 di un soldo sono 4	»
1/4 di 4/5 di un soldo è 1	»
3/4 di 4/5 di un soldo sono 3	»
1/3 di 3/4 di 4/5 di un soldo è 1	»
2/3 di 3/4 di 4/5 di un soldo sono 2	»
1/2 di 2/3 di 3/4 di 4/5 di un soldo è 1	»

12. — Pierino, invece, ha scritto:

1/2 di 2/3 di 3/4 di 4/5

(1) Dalla figura si rileva inoltre che

« 4/7 di 3/5 » è lo stesso che « 3/5 di 4/7 »

e quindi che

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$$

risultando così confermata la proprietà *commutativa* della *moltiplicazione* delle *frazioni*.

si indica con

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$

si trasforma in

$$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{5 \times 4 \times 3 \times 2}$$

e si semplifica così:

$$\frac{1}{5}.$$

Ed *un quinto di un soldo*
vale *un centesimo.*

Esercizi

Si calcoli *mentalmente*:

1. 1/3 di 93	**2.** 2/3 di 93	**3.** 1/4 di 60
4. 3/4 di 60	**5.** 3/4 di 100	**6.** 3/4 di 1000
7. 1/2 di 1/5	**8.** 1/2 di 3/5	**9.** 3/8 di 8/15.

DOMANDA BIZZARRA

1. — Quanto fanno insieme un *terzo* e un *mezzo terzo* di 100?
Un *mezzo terzo* è

$$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

e quindi «un *terzo* e un *mezzo terzo*» fanno

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Sicchè, in forma volutamente complicata, si chiedeva soltanto quanto sia la *metà* di 100.
La risposta è immediata: 50.

2. — Luigino confessa di non aver capito.
Di una mela, faccio *tre parti eguali* e ne dò *una* a lui ed *una* a sua sorella Giulietta.
Del pezzo che mi è rimasto, faccio *due parti eguali* e ne dò *una* a lui ed *una* a sua sorella.
Così ho spartito *tutta* la mela. Luigino ne ha avuto un *terzo* e *mezzo terzo*; e Giulietta ne ha avuto *altrettanto*.
Sicchè, in tutto, ciascuno ha avuto *mezza* mela.
Luigino l'ha mangiata, ma intanto si è persuaso che:
un *terzo* e un *mezzo terzo* fanno un *mezzo*.

La spartizione dei 17 cammelli

1. — Un arabo scrisse nel suo testamento che, dei cammelli che avrebbe lasciato, 1/2 spettava al suo primogenito, 1/3 al secondo figlio ed 1/9 al minore.
Morì lasciando 17 cammelli.
Poichè 17 non è divisibile per 2, nè per 3, nè per 9, i tre fratelli non sapevano come spartirsi i cammelli secondo la volontà paterna, senza ucciderne alcuno.
Perciò, decisero di rimettersi al giudizio del *cadì* (giudice) della loro città.

2. — Il *cadì*, ch'era stato buon amico del padre loro, accondiscese alla richiesta dei tre fratelli ed andò a visitarli, su un suo cammello.
Conosciuta la difficoltà, ch'essi non riuscivano a superare, fece portare in sua presenza i 17 cammelli da spartire e disse:
— Vi presto il mio cammello e così i cammelli sono 18. A te — chiese al maggiore — quanti ne spettano?
— Per volontà di nostro padre, me ne spetta 1/2.
— Poichè 1/2 di 18 è 9, prendi 9 cammelli, lasciando stare il mio. E a te — chiese al secondo — quanti ne assegnò vostro padre?
— Me ne assegnò 1/3.
— Poichè 1/3 di 18 è 6, prendi 6 dei 9 cammelli rimasti, lasciando stare il mio. E tu — chiese al minore — quanti ne devi avere?
— Ne devo avere 1/9.
— Poichè 1/9 di 18 è 2, prendi 2 dei 3 cammelli rimasti, ma lascia stare il mio.
Così fu fatta la spartizione dei cammelli, senza uccidere alcun cammello e senza adoperare quello che il *cadì* aveva cortesemente

prestato: e sul quale egli risalì, ricevendo i meritati ringraziamenti dei tre fratelli.

3. — Come mai essi non erano riusciti a spartirsi i cammelli senza l'aiuto del *cadì*?

Perchè il padre aveva sbagliato il testamento, assegnando ai figli tre frazioni dell'eredità, la cui somma non è 1.

Infatti:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{9 + 6 + 2}{18} = \frac{17}{18}.$$

Quindi, anche se si fossero rassegnati ad uccidere un cammello, non avrebbero potuto fare le parti secondo la volontà paterna.

4. — E se ne ha la conferma, supponendo che i cammelli lasciati dal padre fossero stati per l'appunto 18.

Nel qual caso, ciascuno dei tre figli ne avrebbe avuti quanti gliene assegnò il *cadì*, cioè 9, 6, 2.

Ed il fatto, che un cammello sarebbe rimasto non assegnato ad alcuno, avrebbe rivelato l'errore.

5. — Di questo errore s'accorse il saggio *cadì*: il quale, anzichè accrescere le loro preoccupazioni, preferì dissiparle; lasciando creder loro che la parte assegnata a ciascuno era proprio quella voluta dal padre.

6. — D'altronde, nessuno dei tre fratelli avrebbe potuto lagnarsi, perchè *ciascuno* ebbe *più* di quanto gli spettava.

Infatti, i cammelli avrebbero dovuto essere spartiti così:

$\frac{17}{2} = 8 + \frac{1}{2}$ al primo, che invece ne ebbe 9,

$\frac{17}{3} = 5 + \frac{2}{3}$ al secondo, che invece ne ebbe 6,

$\frac{17}{9} = 1 + \frac{2}{9}$ al terzo, che invece ne ebbe 2.

Un testamento a sorpresa

1. — Alla morte del padre loro, che da qualche anno era rimasto vedovo, Antonio, Biagio e Carlo trovarono questo suo testamento:

« Del mio patrimonio lascio 1/4 ad Antonio, 1/24 di meno a Biagio, 1/24 di più a Carlo. Ma, di quanto poi rimarrà, lascio 1/3 ad Antonio, 1/2 a Biagio e tutto il rimanente a Carlo ».

A quale dei tre figli spettò la parte maggiore ed a quale la minore?

(Qual parte dell'intero patrimonio ebbe dapprima ciascuno dei tre figli? ebbero insieme? fu spartita poi? Antonio ebbe poi? in tutto? Biagio ebbe poi? in tutto? e, perciò, quanto ebbe Carlo in tutto?)

Il prosciugamento di uno stagno

1.— Per prosciugare uno stagno si fanno agire due pompe e si è calcolato che esse lo vuoteranno in 15 ore.

Ma, dopo 5 ore, una pompa si guasta e la riparazione richiede 1 ora.

Frattanto, l'altra pompa aspira 1/16 dell'acqua ch'era *rimasta* nello stagno.

Il lavoro viene ripreso con le due pompe.

Ma, dopo 6 ore dalla ripresa, si guasta l'altra pompa ed il guasto è tale da non poter essere riparato sul posto.

Si decide di ultimare il lavoro con una sola pompa.

Se si lavora ininterrottamente, con turno degli operai addetti alle pompe, e se non accadono altri incidenti, quante ore avrà richiesto il prosciugamento di quello stagno?

2. — Per semplicità, si chiami *capacità* dello stagno la quantità d'acqua ch'esso conteneva in principio.

Si risponda ordinatamente alle seguenti domande:

quale frazione della capacità dello stagno aspiravano insieme le due pompe, *ogni ora*?

quale frazione irriducibile era stata prosciugata, allorchè avvenne il primo guasto?

quale frazione era ancora da prosciugare?

quale frazione irriducibile della capacità dello stagno aspirava l'altra pompa, *ogni ora*?

complessivamente, quale frazione irriducibile della capacità dello stagno era già stata prosciugata, allorchè le due pompe ripresero a lavorare insieme?

da quel momento sino a quando avvenne il secondo guasto, quale frazione irriducibile della capacità dello stagno venne prosciugata?

quale frazione, sino dal principio del lavoro?
quale frazione mancava per compiere il lavoro?
Rammentando due precedenti risposte:
quale frazione irriducibile della capacità dello stagno aspirava, *ogni ora*, la pompa che subì il primo guasto?
in quante ore, dopo il guasto dell'altra, essa potè prosciugare l'acqua rimasta nello stagno?
quante ore durò tutto il lavoro?

3. — Le successive *risposte* sono:

$$\frac{1}{15}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{24}, \frac{3}{8}, \frac{2}{5}, \frac{31}{40}, \frac{9}{40}, \frac{1}{40}, 9, 21.$$

§ 4. — Quoto di numeri razionali

1. — *Due numeri razionali si dicono reciproci allorchè il loro prodotto è 1.*

2. — Ogni numero *razionale*, diverso da zero, ha il suo *reciproco*.

Ad es., il *reciproco* di 3/4 è 4/3, perchè $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$.

Il *reciproco* di $3 + \frac{1}{3}$, cioè di 10/3, è 3/10.

Il *reciproco* di 1/5 è 5, perchè $\frac{1}{5} \times 5 = 1$.

Il *reciproco* di 8 è 1/8, perchè $8 \times \frac{1}{8} = 1$.

3. — Sicchè, in particolare:
ogni *frazione* ha per *reciproco* la *frazione* che se ne ricava, *scambiando fra loro il numeratore ed il denominatore.*

La nuova frazione si può dire *reciproca* (ed alcuni dicono *inversa*) di quella data. (1)

4. — Lo *zero* è *il solo numero razionale* che *non abbia reciproco.*

Ed infatti, moltiplicando *zero* per *un numero qualunque*, si ottiene *zero* e non 1.

5. — Ora, io dico che:

il quoto di due numeri razionali (il secondo dei quali *diverso da zero*) *è eguale al prodotto del primo per il reciproco del secondo.*

Ad es.,

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5}.$$

Per fare la *prova si moltiplica* il *quoto*, cioè (2/3) (7/5), per il *divisore*, cioè 5/7, per vedere se si ritrova il *dividendo*, cioè 2/3.

Ed infatti, per la proprietà associativa:

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}\right) \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{5} \times \frac{5}{7}\right) = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

6. — Or dunque, ad es.,

$$\frac{21}{65} : \frac{49}{50} = \frac{21}{65} \times \frac{50}{49} = \frac{21 \times 50}{65 \times 49} = \frac{3 \times 10}{13 \times 7} = \frac{30}{91},$$

---

(1) Alcuni scolari dicono invece « la frazione *capovolta* ».
Girate il libro, per leggere *capovolta* la frazione 6/9.
Leggerete ancora 6/9.
Invece, il *reciproco* di 6/9 è 9/6.

$$16 : \frac{8}{9} = 16 \times \frac{9}{8} = \frac{16 \times 9}{8} = 2 \times 9 = 18,$$

$$\left(9 + \frac{4}{9}\right) : \left(5 + \frac{2}{3}\right) = \frac{85}{9} : \frac{17}{3} = \frac{85}{9} \times \frac{3}{17} = \frac{5}{3}.$$

7. — *Dividiamo* una *frazione* per un numero *naturale.*
Ad es.,

$$\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{3 \times 5}.$$

In questo caso, si evita la trasformazione intermedia, ricorrendo alla regola del primo § di questo Cap.
Infatti, si può scrivere sùbito:

$$\frac{7}{3} : 5 = \frac{7}{3 \times 5}.$$

8. — Merita particolare attenzione il caso in cui si *dividano* fra loro due frazioni aventi lo *stesso denominatore.*
Ad es.,

$$\frac{4}{9} : \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{4}{5}.$$

Si conclude che:
il quoto di due frazioni, aventi lo stesso denominatore, è eguale al quoto dei loro numeratori.
Quindi, sùbito, ad es.,

$$\frac{35}{61} : \frac{21}{61} = \frac{35}{21} = 1 + \frac{14}{21} = 1 + \frac{2}{3}.$$

9. — Sappiamo, ad es., che

3/4 di 100

è $$100 \times \frac{3}{4} = 25 \times 3 = 75.$$

Inversamente, se si cercasse il numero i cui 3/4 fanno 75, lo si troverebbe così:

$$75 : \frac{3}{4} = 75 \times \frac{4}{3} = 25 \times 4 = 100.$$

Esercizi

I. — Si divida:

1. 3/5 per 2/7
2. 10/13 per 5/26
3. 27 per 9/10
4. 34 per 17/18
5. $6 + \frac{2}{7}$ per $\frac{11}{14}$
6. 18 per $5 + \frac{1}{7}$
7. $2 + \frac{15}{17}$ per $2 + \frac{16}{17}$
8. $7 + \frac{1}{7}$ per $3 + \frac{4}{7}$.

II. — Trovare quel numero:

1. — di cui 1/3 è 21.
2. — i cui 2/3 fanno 18.
3. — i cui 7/8 fanno 35.
4. — i cui 5/13 fanno 35.
5. — i cui 2/3 dei 4/7 fanno 32.
6. — i cui 3/4 fanno 7/8 di 96.

III. — Trovare un numero tale che:

1. — addizionandone 1/12 e 7/32, risulti 100.
2. — addizionandone 7/30 e 2/45, risulti 100.
3. — addizionandone 1/2 ed 1/3, e della somma calcolando 1/3, risulti 100.
4. — addizionandone 1/2 ed 8/9, e della somma calcolando 1/5, risulti 100.
5. — addizionandolo con 1/9 di esso, e della somma calcolando 1/4, risulti 100.
6. — aggiungendogliene 7/18, e della somma calcolando 1/5, risulti 100.
7. — da 1/2 di esso togliendo 2/9 di esso, risulti 100.
8. — diminuendolo di 1/6 di esso, e della differenza calcolando 1/3, risulti 100.

9. — diminuendo il suo doppio di 11/18 di esso, e della differenza calcolando 1/5, risulti 100.

10. — diminuendo il suo triplo di 7/9 di esso, e della differenza calcolando 1/8, risulti 100.

11. — moltiplicandolo per 7, per poi togliere 1/3 di esso, e calcolando 1/3 di 1/8 della differenza, risulti 100.

12. — addizionandone 1/2 ed 1/3 ed 1/4 ed 1/5 ed 1/6, e della somma calcolando 1/9, per poi aggiungerle 7/60 del numero cercato, risulti 100.

Problemi stradali

1. — Vi sono 48 km. di carrozzabile da Bologna (porta Mazzini) a Faenza (porta Imolese), che si trova esattamente a 3/7 della strada da Bologna a Rimini (porta Bologna).
Quanti km. da Bologna a Rimini?

2. — Castenaso si trova a 5/26 della carrozzabile da Bologna (porta S. Vitale) a Lugo (porta Vittorio Emanuele).
Castenaso dista da Lugo km. 42.
Quanto dista Castenaso da Bologna?

3. — Sulla strada fra Trapani e Palermo, due amici si incontrano al bivio per Calatafimi e scendono dalle loro biciclette.
— Dove vai? — chiede uno di essi.
— A Valguarnera — risponde l'altro. — Sai quanto è distante?
— È a metà strada di qui a Palermo (ai quattro Canti).
— Ne so quanto prima — soggiunge l'altro.
— Al ponte sul Freddo, ti troverai ad un sesto della strada di qui a Palermo.
— Ma a me non importa nulla di Palermo — dice l'altro impazientito.
— Hai ragione. Dal ponte sul Freddo a Valguarnera vi sono 22 km.
Così dicendo, inforca la bicicletta e se ne va.
— E quanti km. vi sono di qui al ponte sul Freddo? — urla quell'altro.
Ma l'amico è già troppo lontano per rispondergli.
Rispondetegli voi.

Altri tre indovinelli greci

1. — Perchè sei così turbato? — chiese Venere ad Amore.
— Perchè, di tante mele che avevo colto sull'Elicona, me ne sono rimaste, come vedi, 25 soltanto.
— E chi ti ha preso le altre?
— Ho incontrato le Muse e ciascuna me ne ha preso: Clio un *quinto*, Euterpe un *dodicesimo*, Talia un *ottavo*, Melpomene un *ventesimo*, Tersicore un *quarto*, Erato un *settimo*; Polinnia si è accontentata di 15, ma Urania me ne ha preso 60 e Calliope 150.
Quante mele aveva egli colto?
Spiegazione. — Anzitutto,

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}+\frac{1}{20}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}=$$
$$=\frac{168+70+105+42+210+120}{840}=\frac{715}{840}=\frac{143}{168}.$$

Dunque, le prime sei Muse presero ad Amore 143/168 delle mele ch'egli aveva colto.
Le mele a lui rimaste e quelle che gli presero le altre tre Muse erano

$$25+15+60+150=250$$

ed esse erano il complemento di 143/168, cioè 25/168, delle mele ch'egli aveva colto: le quali erano dunque

$$250:\frac{25}{168}=250\times\frac{168}{25}=10\times 168=1680.\ (^1)$$

---

(1) Secondo l'*Antologia greca*, le ultime tre Muse avrebbero prese 30, 120, 300 mele e 50 ne sarebbero rimaste ad Amore: che perciò ne avrebbe colte 3360.
Essendomi sembrate un po' troppe, ho diviso per 2 ciascuno dei numeri dati, lasciando invariate le frazioni; e così anche il risultato finale è rimasto diviso per 2.
Se avessi diviso per 10, risultava 336. Ma Clio e Melpomene avrebbero protestato. Perchè?

2. — Il possente Alcide chiese ad Augia quanti buoi egli possedesse.

Il re gli rispose:

— Una *metà* è sulle rive dell' Alfeo, un *ottavo* sui colli circostanti, un *dodicesimo* presso il confine dello Stato un *ventesimo* intorno ad Elide ed un *trentesimo* sui prati d'Arcadia. Qui, come vedi, ve ne sono 50.

Quanti buoi possedeva Augia? (1)

Spiegazione: simile alla precedente.

Risposta: 240.

3. — Dagli occhi, da un piede alzato e dalla gola di un leone di bronzo, l' acqua zampilla in una vasca di marmo.

Separatamente, la vasca sarebbe riempita in 2 *giorni* dall'occhio destro, in 3 dal sinistro, in 4 dal piede ed in 9 *ore* dalla gola.

Insieme, quanto tempo impiegano i quattro zampilli a riempire la vasca?

Spiegazione. — Separatamente, i quattro zampilli riempivano la vasca in ore 48, 72, 96, 9.

Quindi, in *un' ora*, ciascuno versava 1/48, 1/72, 1/96, 1/9 della capacità della vasca; ed insieme ne versavano

$$\frac{1}{48} + \frac{1}{72} + \frac{1}{96} + \frac{1}{9} = \frac{6 + 4 + 3 + 32}{288} = \frac{45}{288} = \frac{5}{32}.$$

Quindi, in *un minuto* ne versavano insieme

$$\frac{5}{32} : 60 = \frac{5}{32 \times 60} = \frac{1}{32 \times 12} = \frac{1}{384}.$$

Sicchè, riempivano la vasca in 384 *minuti*, cioè in $6_h\ 24_m$.

---

(1) *Alcide*, soprannome di Ercole.

Augia, re d'*Elide*, regione e città del Pelopponeso. Famoso per « le stalle » che, non pulite da 30 anni, lo furono in un sol giorno da Ercole, il quale vi fece passare le acque dell' *Alfeo*. Poichè Augia non gliene fu abbastanza grato, Ercole lo uccise.

Arcadia, altra regione del Pelopponeso, con valli pittoresche, bagnate dagli affluenti dell'*Alfeo*.

Osservazione. — *I minuti* necessari a riempire tutta la vasca erano 384, che è *il reciproco* di 1/384, cioè della parte di vasca riempita in *un minuto*.

Similmente, si poteva dir sùbito che *le ore* necessarie a riempire tutta la vasca erano tante, quant' è *il reciproco* di 5/32, cioè della parte di vasca riempita in *un' ora*.

Sicchè occorrevano *ore* 32/5, cioè *ore* 6 e 2/5, cioè $6_h\ 24_m$. (1)

Vicende di giuoco

1. — In tre partite successive, un giuocatore ha perso:

1/7 di quanto aveva in tasca,

1/6 di quanto gli era rimasto,

1/6 di quanto ancora gli era rimasto.

A questo punto, avendo in tasca soltanto un biglietto da L. 500, anzichè barattarlo e comprometterlo, preferì abbandonare il giuoco.

Con quante lire vi si era messo?

(Qual parte, di quanto aveva in tasca da principio, ha perso in ciascuna delle tre partite? ha perso in tutto? gli è rimasta?)

Risposta: L. 840.

2. — Un giocatore, dapprima ha perso 2/5 di quanto aveva in tasca, poi ha vinto sino a raddoppiare quanto gli era rimasto ed infine ha perso 1/7 di quanto era giunto a possedere.

Complessivamente, ha vinto L. 42.

Con quante lire si era messo al giuoco?

---

(1) Il conto potrebb'esser fatto anche in *giorni*, riducendo anzitutto le 9 *ore* a 9/24, cioè 3/8, di *giorno*.

Addizionando *i reciproci* di 2, 3, 4, 3/8 si ottiene:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{8}{3} = \frac{6 + 4 + 3 + 32}{12} = \frac{45}{12} = \frac{15}{4}$$

il cui *reciproco* è 4/15.

Ma questa soluzione più rapida mi è sembrata meno intuitiva.

Nell' *Antologia greca*, lo zampillo uscente dalla gola riempiva la vasca in 6 ore, ch' io ho cambiato in 9 per facilitare il calcolo.

Altrimenti, come risultato finale, non si otterrebbe un numero intero di *minuti*, nè di *secondi*, neppure attribuendo al *giorno* 12 *ore*, anzichè 24.

(Qual parte, di quanto aveva in tasca da principio, gli era rimasta dopo la prima perdita?

Quale frazione, impropria, di quanto aveva in tasca da principio, possedeva egli dopo la vincita?

Qual parte, di quanto possedeva dopo la vincita, gli rimase in tasca dopo la seconda perdita? cioè: quale frazione, impropria, di quanto aveva da principio?

Qual parte, di quanto aveva da principio, fu la sua vincita?)

Risposta: L. 1470.

3. — Un giuocatore perde 1/5 di quanto aveva in tasca e poi 1/6 di quanto aveva già perduto.

Dopo ciò, vincendo L. 620, si trova ad aver guadagnato 1/9 di quanto possedeva da principio

Con quante lire s'era messo a giocare?

(Qual parte, di quanto possedeva da principio, ha perso nella prima partita? nella seconda? in tutte e due?

Qual parte, di quanto possedeva da principio, erano le L. 620, se, oltre a compensargli la duplice perdita, gli fecero guadagnare 1/9 di quanto possedeva da principio?)

Risposta: L. 1800.

Vicende commerciali

1. — Un piccolo commerciante, il primo anno guadagnò 1/3 de suo capitale e spese L. 15000, il secondo anno guadagnò 1/4 di quanto possedeva alla fine del primo e spese L. 15000.

In tal modo, alla fine del secondo anno egli possedeva L. 2464 più di quanto aveva al principio del suo commercio.

Con quale capitale aveva incominciato?

(Alla fine del primo anno, egli possedeva una certa frazione impropria del capitale iniziale, meno le lire che aveva speso.

Perciò, applicando la proprietà *distributiva* della divisione rispetto alla sottrazione, il guadagno del secondo anno fu una certa frazione del capitale iniziale, meno alcune lire.

Alla fine del secondo anno, egli possedeva la somma di quelle due frazioni del capitale iniziale meno la somma delle lire spese nei due anni e delle lire che diminuirono il guadagno del secondo anno.

Sicchè, oltre al capitale iniziale, alla fine del secondo anno egli

possedeva la differenza tra una certa frazione del capitale iniziale ed un certo numero di lire.

A tale differenza, che il problema dà in lire, si aggiunga il sottrattore, che si sarà già calcolato.

Così facendo, risulterà espressa in lire l'ultima frazione considerata del capitale iniziale e perciò questo si potrà calcolare.)

Risposta: L. 54321.

2. — Tizio e Caio avevano capitali eguali.

In una speculazione, Tizio guadagna a Caio 3/10 del proprio capitale.

In un'altra speculazione, Tizio perde con Sempronio 3/10 del suo nuovo capitale e Caio guadagna a Sempronio 3/10 del suo nuovo capitale.

Il fatto sta che Sempronio ha guadagnato L. 8100.

Quanto era rimasto a Tizio e quanto a Caio, dopo la seconda speculazione?

(Per formarci un'idea chiara del problema, vediamo che cosa sia successo ad *ogni cento lire* del capitale iniziale di Tizio.

Nella prima speculazione, quelle L. 100 hanno procurato a Tizio un guadagno di 3/10 di esse, cioè di L. 30, e quindi sono diventate L. 130.

Ma nella seconda speculazione, quelle L. 130 hanno procurato a Tizio una perdita di 3/10 di esse, cioè di L. 39, e quindi sono rimaste L. 91.

Esaminate voi che cosa sia successo ad *ogni cento lire* del capitale iniziale di Caio.

Poichè la prima speculazione non ha fatto cambiare *la somma* dei capitali di Tizio e di Caio, la *diminuzione* finale di codesta *somma* costituisce il *guadagno* di Sempronio.

Ma da principio Tizio e Caio avevano capitali eguali.

E perciò: quante lire ha guadagnato complessivamente Sempronio su *ogni cento lire*, che ciascuno degli altri due possedeva da principio?

Noi conosciamo il guadagno totale di Sempronio. Possiamo quindi calcolare *quante volte cento lire* possedesse inizialmente ciascuno degli altri due, e rispondere poi alla domanda del problema.)

Risposta: ciascuno dei due è rimasto con L. 40950.

§ 5. — Frazioni composte

1. — Come sapete, ogni *frazione ordinaria* indica *il quoto* di due *numeri naturali.*

Ma talvolta si dà *forma di frazione* al *quoto* di due numeri, anche se uno di essi od entrambi *non sono numeri naturali.*

Ad es.,

$$\frac{8+\frac{1}{8}}{7+\frac{3}{7}}$$

significa

$$\left(8+\frac{1}{8}\right):\left(7+\frac{3}{7}\right)$$

e quindi vale:

$$\frac{65}{8}:\frac{52}{7}=\frac{65}{8}\times\frac{7}{52}=\frac{5\times 7}{8\times 4}=\frac{35}{32}=1+\frac{3}{32}.$$

2. — Chiameremo ***frazioni composte*** queste nuove frazioni, mentre continueremo a chiamare *frazioni ordinarie* quelle di cui ci siamo occupati sino ad ora.

3. — Rammentate che abbiamo chiamato *numero razionale* ogni *frazione ordinaria* ed ogni *scrittura* che possa *trasformarsi* in *frazione ordinaria.*

Inoltre, sapete che la *somma*, la *differenza*, il *prodotto* ed il *quoto* di due numeri *razionali* è un numero *razionale.*

4. — Segue che:

ogni frazione composta, in cui siano adoperati numeri

razionali e siano indicate quali si vogliano delle quattro operazioni fondamentali, è un numero razionale.

5. — Nel risolvere gli *Esercizi* seguenti, si badi di scrivere *il segno di eguaglianza* sulla *riga* del *segno principale di frazione.*

Altrimenti, possono accadere equivoci pericolosi.

Ad es., mentre

$$\frac{3}{\frac{4}{5}}=3:\frac{4}{5}=3\times\frac{5}{4}=\frac{3\times 5}{4}=\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4},$$

invece

$$\frac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4\times 5}=\frac{3}{20}.$$

Esercizi

Ciascuna delle seguenti frazioni *composte* venga trasformata in frazione *ordinaria* (irriducibile) ovvero in numero *naturale* o *misto*.

1.	$\frac{12}{8/9}$	2.	$\frac{3/2}{18}$	3.	$\frac{26/25}{39/40}$
4.	$\frac{56/51}{35/34}$	5.	$\frac{40}{2+6/7}$	6.	$\frac{2+1/10}{1+13/15}$
7.	$\frac{7/15-5/12}{7/45-1/18}$	8.	$\frac{(6/7)\ (14/15)}{(10/13)\ (26/25)}$		
9.	$\frac{(9/10):(15/16)}{1-1/25}$	10.	$\frac{(1/2+2/3-3/4)\ (1+12/25)}{2/3+3/4-4/5}$.		

CAPITOLO IV

FRAZIONI DECIMALI E NUMERI DECIMALI

§ 1. — Le frazioni decimali

1. — Si chiamano ***frazioni decimali*** le frazioni ordinarie, che hanno per *denominatore* una *potenza* di 10 (cioè, un numero formato dalla cifra 1, seguìta da quanti si vogliano 0).

Tali sono, ad es., 7/10, 21/100, 79/1000, ecc.

2. — Le quattro operazioni fondamentali si eseguiscono *più facilmente*, e quindi più rapidamente, con le *frazioni decimali* piuttosto che con le altre frazioni ordinarie.

3. — Ad es., si debbano *addizionare* o *sottrarre* le *frazioni decimali* con denominatori diversi, 63/100 e 7/1000.

Bisogna ridurle al *minimo denominatore comune.*

Ma questo è sempre *il maggiore* dei due denominatori.

Nel caso nostro è 1000.

Quindi:

$$\frac{63}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{630 + 7}{1000} = \frac{637}{1000},$$

$$\frac{63}{100} - \frac{7}{1000} = \frac{630 - 7}{1000} = \frac{623}{1000}.$$

4. — Si debbano *moltiplicare* o *dividere* le medesime *frazioni decimali* 63/100 e 7/1000.

A tale scopo, non occorre ridurle ad uno stesso denominatore. Tuttavia, il calcolo risulta agevolato dalla facilità con la quale si *moltiplicano* e *dividono* fra loro le *potenze* di 10.

Nel caso nostro, si ha:

$$\frac{63}{100} \times \frac{7}{1000} = \frac{63 \times 7}{100 \times 1000} = \frac{441}{100000},$$

$$\frac{63}{100} : \frac{7}{1000} = \frac{63 \times 1000}{100 \times 7} = 9 \times 10 = 90.$$

5. — Gli è per questo che, quali ***unità pratiche*** (per la misura delle *lunghezze*, delle *aree*, dei *volumi*, delle *capacità*, dei *pesi* e dei *valori*) furono adottate quelle soltanto che si ricavano dal *metro*, dal *metro quadrato*, dal *metro cubo*, dal *litro*, dal *grammo* e dalla *lira*, col *moltiplicare* o *dividere* queste ***unità fondamentali*** per *potenze* di 10.

E perciò l'insieme di queste *unità di misura* (fondamentali e pratiche) si chiama ***sistema metrico decimale.***

Esercizio

Eseguire le quattro operazioni con le frazioni:

51/100 e 17/1000.

§ 2. — I numeri decimali

1. — Le *frazioni decimali*, sconosciute agli antichi, sono ora di uso frequentissimo.

Perciò, si è pensato di accrescerne la comodità, *abbreviandone la scrittura.*

2. — Occupiamoci anzitutto delle *frazioni decimali improprie.*

Ad es., invece di 47819/1000, scrivo:

447,819

e leggo:

« 47 *virgola* 819 ».

Cioè: scrivo soltanto il *numeratore*, ma vi inserisco una *virgola*, in modo che alla sua *destra* stiano tante *cifre* quanti erano gli *zeri* del *denominatore.*

3. — Viceversa, vedendo scritto, ad es.,

8, 23

si *ricostruisce* immediatamente la *frazione*, di cui 8,23 è una scrittura abbreviata;
per averne il *numeratore*, basta *trascurare la virgola* (sicchè, nel caso nostro, esso è 823);
e, per averne il *denominatore*, basta scrivere la cifra 1, seguìta da tanti *zeri*, quante sono le *cifre* alla *destra* della *virgola* (sicchè, nel caso nostro, esso è 100).

Concludendo:

8,23 = 823/100

che si legge:

« 8 *virgola* 23 » è lo stesso che « 823 *centesimi* ».

4. — Si badi, ad es., che

8,7 = 87/10 ed invece 8,07 = 807/1000.

Per non confondere un numero con l'altro, mentre

8,7 si legge « 8 virgola 7 »

invece 8,07 si legge « 8 virgola *zero* 7 ».

5. — Occupiamoci ora delle *frazioni decimali proprie.*

Ad es., invece di 27/100, scrivo:

0,27

e leggo: « *zero* virgola 27 ».

Cioè: davanti al *numeratore* scrivo tanti *zeri* quanti ne occorrono affinchè esso abbia tante *cifre* quante ne ha il *denominatore*, e poi faccio come se si trattasse di una frazione decimale *impropria.*

6. — Viceversa, vedendo scritto, ad es.,

0,009

si ricostruisce immediatamente la *frazione*, di cui 0,009 è una scrittura abbreviata:
per averne il *numeratore*, si *trascura* la *virgola*, lo *zero* che la *precede* e gli *zeri consecutivi* che la *seguono immediatamente* (sicchè, nel caso nostro, esso è 9),
e, per averne il *denominatore*, si fa come nel caso della frazione decimale *impropria*, cioè si scrive la cifra 1, seguìta da tanti *zeri* quante sono le *cifre* (zeri inclusi) alla *destra* della *virgola* (sicchè, nel caso nostro, esso è 1000).

Si conclude che

0,009 = 9/1000

in cui la scrittura 0,009 si legge:

« *zero* virgola *zero zero* nove ».

7. — Queste *scritture abbreviate* delle *frazioni decimali* (proprie od improprie) si chiamano ***numeri decimali.***

8. — Si osservi, ad es., che

$$0 + \frac{5}{8} = \frac{5}{8}.$$

Si può dunque dire che una *frazione propria* è un *numero misto* la cui *parte intera* è *zero*, mentre la *parte frazionaria* è la *frazione stessa.*

Ciò consente di dare ad *ogni frazione*, che non sia apparente, la forma di *numero misto.*

Dopo di che, invece di distinguere le *frazioni* in *proprie* ed *improprie*, si possono distinguere i *numeri misti* la cui *parte intera* è *zero* da quelli la cui *parte intera* è *diversa da zero.*

9. — Si osservi, ad es., che

$$24{,}687 = 24 + \frac{687}{1000} \quad \text{e} \quad 0{,}49 = \frac{49}{100}.$$

Dunque 24,687 rappresenta un numero misto la cui *parte intera* è 24. E 0,49 rappresenta (una frazione propria, cioè) un numero misto, la cui *parte intera* è 0.

Brevemente:

24 è ***la parte intera*** di 24,687

e 0 è ***la parte intera*** di 0,49.

10. — Invece di dire che 687/1000 è *la parte frazionaria* di

$$24 + \frac{687}{1000}$$

diremo che

687 è ***la parte decimale*** di 24,687.

Similmente, diremo che

49 è ***la parte decimale*** di 0,49

e che 003 è ***la parte decimale*** di 0,003.

11. — Riassumendo:

in ogni numero decimale, quanto sta a sinistra della virgola è la sua parte intera, e quanto sta a destra della virgola è la sua parte decimale.

Ad es., 8,35 ed 8,417

hanno *la medesima parte intera,* mentre

34,52 e 0,52

hanno *la medesima parte decimale.*

12. — Brevemente, invece di

cifre che compongono la parte decimale

si dice: ***cifre decimali.***

Risulta che:

due *numeri decimali* hanno lo stesso *denominatore,* allorchè hanno lo stesso *numero di cifre decimali.*

Ad es., 19,24 e 35,78

hanno lo *stesso denominatore* (che è 100).

Ed invece 3,18 e 7,403

hanno *denominatori diversi* (100 il primo e 1000 il secondo).

13. — Come sapete, ad es., basta moltiplicare per 100 ambo i termini della frazione 23/10, per ottenere

$$23/10 = 2300/1000.$$

Ma, scrivendo le stesse frazioni in forma di *numeri decimali*, risulta:

$$2{,}3 = 2{,}300.$$

Sicchè:
un numero decimale non cambia, scrivendo quanti si vogliano zeri a destra della sua parte decimale.
E quindi, inversamente:
se in un numero decimale vi sono zeri finali, è lecito cancellarne quanti si vogliano.

14. — Dopo ciò, ad es., volendo ridurre al *minimo denominatore comune i numeri decimali*

2,3 e 0,049

lo scopo si raggiunge, scrivendo

2,300 invece di 2,3;

cioè ***eguagliando*** il *numero delle cifre decimali* di 2,3 al *numero delle cifre decimali* di 0,049.

15. — Si osservi, ad es., che

$$24{,}397 = \frac{24397}{1000} = 24 + \frac{397}{1000} =$$

$$= 24 + \frac{300}{1000} + \frac{90}{1000} + \frac{7}{1000}$$

da cui, semplificando:

$$24{,}397 = 24 + \frac{3}{10} + \frac{9}{100} + \frac{7}{1000}$$

Perciò si dice che, in ogni numero decimale:
la prima cifra decimale (dalla *virgola* verso *destra*) è quella dei ***decimi***,
la seconda è quella dei ***centesimi***,
la terza è quella dei ***millesimi***, ecc.,
la sesta è quella dei ***milionesimi***, ecc.

16.—Ma noi continueremo a *leggere* i *numeri decimali* nel modo più breve, che è anche il più chiaro per chi deve *scriverli* sotto dettatura; ad es.,

24,397

così: 24 *virgola* 397.

Anzi, quando *le cifre decimali* sono *più di tre*, le leggeremo raggruppate *a due a due*, se sono in numero *pari*; altrimenti (cioè se sono in numero *dispari*), faremo eccezione soltanto per *le prime tre* ovvero per *le ultime tre*, che leggeremo raggruppate.

Ad es., 7,35 23 86

si legge: « sette virgola *trentacinque ventitrè ottantasei* »

e 0,15 08 307

si legge: « zero virgola *quindici zero-otto trecentosette* »
o: « zero virgola *centocinquanta ottantatre zero-sette* ».

Esercizi

I. — Trasformare in *numeri decimali* le frazioni decimali:

1. 2469/1000 **2.** 43/100 **3.** 7/1000

II.—Trasformare prima in ***frazioni decimali*** e poi in ***frazioni ordinarie irriducibili*** ovvero in ***numeri misti*** (con la parte frazionaria irriducibile) i numeri decimali:

1.	0,28	**2.**	0,75	**3.**	0,016
4.	4,25	**5.**	7,96	**6.**	2,625

§ 3. — Le quattro operazioni

1. — Si debbano *addizionare* i numeri
9,121 13,87 715,2 0,008 261,8.

Si trascrivono in altrettante righe, *eguagliando il numero delle cifre decimali* ed in modo che le *virgole* risultino in *colonna*.

Poi si *addiziona*, come se non vi fossero le virgole; ma nella *somma* si inserisce una *virgola*, in *colonna* con le virgole degli addendi.

```
  9,121
 13,870
715,200
  0,008
261,800
-------
999,999
```

Così facendo, gli è come se si fosse eseguita l'addizione delle corrispondenti *frazioni decimali*.

```
  9,121
 13,87
715,2
  0,008
261,8
-------
999,999
```

2. — Si può fare a meno di *scrivere gli zeri*, occorrenti per *eguagliare* il numero delle cifre decimali degli addendi: purchè si abbia cura di lasciar *vuoti* i posti che essi dovrebbero occupare.

3. — Allorchè si devono *addizionare* insieme numeri *decimali* e numeri *naturali*, questi si trascrivono insieme a quelli, come se avessero per cifre decimali altrettanti *zeri sottintesi*.

```
  7,94
 41
376,615
130
-------
555,555
```

4. — Allo stesso modo, e per la stessa ragione, si calcola la *differenza dei numeri decimali*.

```
148,591
 37,48
-------
111,111
```

5. — Se da un numero *decimale* si deve *sottrarre* un numero *naturale*, si scrive questo sotto alla *parte intera* di quello.

In questo caso, la *parte decimale* della *differenza* è quella stessa del *sottraendo*.

```
4320,33
 987
-------
3333,33
```


6. — Se, invece, da un numero *naturale* si deve *sottrarre* un numero *decimale*, si scrive la *parte intera* di questo sotto a quello.

In questo caso, la *parte decimale* della *differenza* si ottiene, togliendo da 10 *l'ultima cifra decimale* del sottrattore e da 9 *ciascun'altra*.

```
129
51,223
------
77,777
```

7. — Si debbano *moltiplicare* i numeri

64,3 ed 1,92.

Si eseguisce la *moltiplicazione*, come se non vi fossero le virgole; ma nel *prodotto* si inserisce una *virgola*, in modo che *le cifre decimali* siano tante, quante sono *insieme* quelle del *moltiplicando* e del *moltiplicatore*.

```
  64.3
  1,92
-------
 1 286
57 87
64 3
-------
123,456
```

Così facendo, gli è come se si fosse eseguita la moltiplicazione delle corrispondenti *frazioni decimali*.

8. — Se un fattore manca di *parte decimale*, allora *le cifre decimali* del *prodotto* sono tante, quante ne ha l'altro fattore.

```
164,609
      6
-------
987,654
```

9. — Le occasioni di *moltiplicare* o *dividere* un numero *naturale* o *decimale* per una *potenza* di 10 sono così frequenti, che giova famigliarizzarsi coi vari casi che si possono presentare.

Li chiarirò con altrettanti esempi.

10. — Anzitutto, rammentiamo che, ad es.,

$$213 \times 1000 = 213000.$$

Cioè: se il *moltiplicando* è un numero *naturale*, basta scrivere alla sua *destra* tanti *zeri* quanti sono quelli del *moltiplicatore*.

Inversamente:

$$213000 : 1000 = 213.$$

11. — Applicando la regola generale, ad es., si avrebbe:

$$1{,}2345 \times 100 = 123{,}4500.$$

Ma, *sopprimendo* nel prodotto gli inutili *zeri finali* della *parte decimale*, risulta:

$$1{,}2345 \times 100 = 123{,}45.$$

Analogamente:

$$1{,}2345 \times 1000 = 1234{,}5.$$

Cioè: se il numero degli *zeri* del *moltiplicatore* è *minore* del numero delle *cifre decimali* del *moltiplicando*, basta trascrivere questo, *spostandovi la virgola* verso *destra* di tante *cifre* quanti sono gli *zeri* del moltiplicatore.

Inversamente:

$$123{,}45 : 100 = 1{,}2345$$
$$1234{,}5 : 1000 = 1{,}2345.$$

Cioè: se il numero degli *zeri* del *divisore* è *minore* del numero delle *cifre* della *parte intera* del *dividendo*, basta trascrivere questo, *spostandovi la virgola* verso *sinistra* di tante *cifre* quanti sono gli *zeri* del divisore.

12. — Applicando la regola generale, ad es., si avrebbe:

$$98{,}765 \times 1000 = 98765{,}000$$

Ma, *sopprimendo* nel prodotto la inutile *parte decimale* ed anche la *virgola*, risulta:

$$98{,}765 \times 1000 = 98765.$$

Cioè: se il numero degli *zeri* del *moltiplicatore* è *eguale*

al numero delle *cifre decimali* del *moltiplicando*, basta *sopprimere la virgola.*

Inversamente:

$$98765 : 1000 = 98{,}765.$$

13. — Se, ad es., 56,789

dev'essere moltiplicato per 100000, si può moltiplicarlo consecutivamente per 1000 e per 100, ottenendo prima

56789

e poi finalmente:

5678900.

Riassumendo:

$$56{,}789 \times 100000 = 5678900.$$

Cioè: se il numero degli *zeri* del *moltiplicatore* è *maggiore* del numero delle *cifre decimali* del *moltiplicando*, basta trascrivere questo *senza virgola* ed inoltre scrivere alla sua *destra* tanti *zeri*, quant'è la *differenza* tra il numero degli *zeri* del moltiplicatore ed il numero delle *cifre decimali* del moltiplicando.

Inversamente:

$$5678900 : 100000 = 56{,}789.$$

14. — Si opera nei modi già detti, anche allorchè la *parte intera* del *moltiplicando* è *zero.*

Ma, se a *sinistra* della *virgola* vengono poi a trovarsi *parecchi zeri*, se ne conserva *uno solo.*

Ad es., $0{,}00345 \times 100 = 0{,}345.$

Inversamente:

$$0{,}345 : 100 = 0{,}00345.$$

E, se a *sinistra* della *virgola* viene poi a trovarsi un numero *diverso da zero*, ma *preceduto* da qualche *zero*, bisogna *sopprimere* quello *zero* o quelli *zeri*.

Ad es., $0{,}00345 \times 1000 = 3{,}45$

$0{,}00345 \times 100000 = 345.$

Inversamente:

$$3{,}45 : 1000 = 0{,}00345$$
$$345 : 100000 = 0{,}00345.$$

15. — Ed ora proseguiamo ad occuparci della *divisione* di un numero *decimale*, per un numero *naturale*, allorchè questo *non è una potenza* di 10.

Ad es., si debba calcolare

$$59{,}28 : 13.$$

Gli è come se si dovesse calcolare

$$(5928 : 100) : 13$$

od anche (invertendo l'ordine di esecuzione delle due divisioni successive)

$$(5928 : 13) : 100.$$

Così facendo, si ottiene

$$456 : 100$$

cioè

$$4{,}56.$$

5938	13
72	456
78	
0	

Si conclude che:

$$59{,}28 : 13 = 4{,}56.$$

16. — Le due divisioni successive si indicano contemporaneamente, segnando la *virgola* tanto nel *dividendo* quanto nel *quoto*.

La *virgola* del *quoto* va segnata quando si è adoperata *tutta la parte intera* del *dividendo*.

59,28	13
7 2	4,56
78	
0	

17. — Dall'eguaglianza

$$59{,}28 : 13 = 4{,}56$$

si ricavano le seguenti, col *dividere* insieme *dividendo* e *quoto* per 10, 100, 1000.

$$5{,}928 : 13 = 0{,}456$$
$$0{,}5928 : 13 = 0{,}0456$$
$$0{,}05928 : 13 = 0{,}00456.$$

Queste divisioni si indicano così:

5,928	13	0,5928	13	0,05928	13
72	0,456	72	0,0456	72	0,00456
78		78		78	
0		0		0	

Ad es., nell'*eseguire la seconda*, si dice o pensa:

13 in 0 sta 0 volte, e nel quoto scrivo « 0 »,
13 in 5 sta 0 volte, e nel quoto scrivo « 0 »,
13 in 59 sta 4 volte, col resto 7,
scrivo « 4 » nel quoto e « 7 » sotto al 9,
a destra del 7 trascrivo dal dividendo la cifra 2,
13 in 72 sta 5 volte, col resto 7,
scrivo « 5 » nel quoto e « 7 » sotto al 2,
a destra del 2 trascrivo dal dividendo la cifra 8,
13 in 78 sta 6 volte esattamente,
scrivo « 6 » nel quoto e « 0 » sotto all'8.

18. — Occupiamoci ora della *divisione* di un numero *naturale* per un numero *decimale.*

Ad es., si debba calcolare

645498 : 9,87.

Per ricondursi al caso della *divisione* di *due numeri naturali*, basta *moltiplicare* il *dividendo* e il *divisore* per la potenza di 10, che ha tanti *zeri* quante sono le *cifre decimali del divisore.*

Praticamente:

alla destra del dividendo si scrivono tanti zeri, quante sono le cifre decimali del divisore, ed in questo si cancella la virgola.

Dunque, gli è come se si dovesse calcolare

64549800 : 987.

E l'operazione non presenta alcuna difficoltà:

```
64549800 | 987
 5329    | 65400
  3948
    0
```

Si conclude che:

645498 : 9,87 = 65400.

19. — Similmente si eseguisce la *divisione* di *due numeri decimali* e cioè, anzitutto, si *moltiplicano* entrambi per la potenza di 10, che ha tanti *zeri* quante sono le *cifre decimali del divisore.*

Così facendo, ci si riconduce *sempre* al caso in cui il *divisore* è un numero *naturale.*

Il *dividendo*, invece, rimane un numero *decimale* o diventa un numero *naturale*, secondochè il numero delle sue *cifre decimali* è *maggiore* ovvero *non è maggiore* del numero delle *cifre decimali* del *divisore.*

Ad es.,

64,5498 : 9,87 = 6454,98 : 987
645,498 : 0,987 = 645498 : 987
64549,8 : 9,87 = 6454980 : 987.

Dopo ciò si ha:

```
6454,98 | 987     645498 | 987     6454980 | 987
5329    | 6,54    5329   | 654     5329    | 6540
 39 48            3948             3948
    0                0                0
```

20. — Vediamo come si faccia *la prova* di una *divisione* con *divisore decimale* e *resto diverso da zero.*

Ad es., la divisione sia questa:

```
59,235 | 48
11 2   | 1,234
 1 63
   195
     3
```

Come il solito, si deve ritrovare il *dividendo*, calcolando il *prodotto* del *divisore* per il *quoziente*, ed *aggiungendogli* il *resto.*

Ma bisogna badare che, in questo caso, il *resto* è un numero *decimale*, con tante *cifre decimali* quanto ne ha il *dividendo.*

Ecco a *sinistra* la *prova* della divisione di poc'anzi.

```
      1,234          1,234
  ×      48            48
  ---------      ---------
      9 872          9 872
     49 36          49 36
  ---------            3
     59,232      ---------
  +   0,003         59,235
  ---------
     59,235
```

A *destra* la medesima *prova* è indicata ed eseguita più brevemente, scrivendo il *resto* sotto ai *prodotti parziali*, per far poi *una sola addizione.*

21. — Nel caso dianzi considerato, si può concludere che

$$59{,}235 : 48 = 1{,}234...$$

dove *i tre puntini* servono ad avvertire che il *resto* è *diverso da zero.*

Trascurando di scrivere *i tre puntini*, si commette un *errore*, perchè si lascia credere che il *resto* sia *zero.*

22. — Ci rimane a vedere come si possa *proseguire* la *divisione*, allorchè, dopo aver adoperate *tutte le cifre* del *dividendo*, si sia giunti ad un *resto diverso da zero.*

Ad es., si debba calcolare

$$189 : 72.$$

Si ha subito:

```
189 | 72
 45   2
```

Volendo *proseguire* la *divisione*, basta *imaginare* che il *dividendo* sia seguìto da una *parte decimale*, composta di quanti si vogliano *zeri*: i quali, ad uno ad uno, vengano effettivamente *trascritti* a *destra* dei successivi *resti parziali.*

A tal fine, il *divisore* va scritto un po' *discosto* dal *dividendo*, così:

```
189 | 72
 450  2,625
  180
   360
     0
```

Si conclude che:

$$189 : 72 = 2{,}625.$$

23. — Per *proseguire* la *divisione* nel modo ora indicato, allorchè il *dividendo* è un numero *decimale*, basta imaginare che la sua *parte decimale* sia *seguìta* da quanti si vogliano *zeri.*

Ad es.,

```
18,9 | 72
 4 50  0,2625
  180
   360
     0
```

E si conclude che:

$$18{,}9 : 72 = 0{,}2625.$$

24. — Avverto il mio giovane lettore che *non sempre* il *proseguire* una *divisione* conduce ad *esaurire* il *dividendo*, cioè ad ottenere *zero* come ultimo *resto.*

In sèguito egli imparerà a *prevedere* quando ciò accada.

Frattanto, lo prevengo che ogni *divisione* proposta negli *Esercizi* e nei *Problemi* è stata preparata in modo da risultare *esatta*, o sùbito o proseguendola opportunamente.

25. — Intanto, come esercizio, il lettore *prosegua*, sino ad esaurimento, la divisione per 48 (di cui abbiamo fatto la prova).

Incominci così:
48 in 30 sta 0 volte, e scriva questo 0 nel quoziente a destra del 4,
48 in 300 sta ecc.

Esercizi

I. — Scrivere sùbito *il complemento* di:

1. 0,8766 2. 0,2346 3. 0,9091

(Gli è come se il sottraendo fosse 1,0000 e quindi *l'ultima cifra decimale del sottrattore* va tolta da 10 e *ciascun'altra* da 9, risultando 0 *la parte intera*. Ciò stabilito, anzichè da destra a sinistra, riesce più comodo procedere *da sinistra a destra*, scrivendo 0 come *parte intera* e togliendo da 9 ogni *cifra decimale* del numero dato, fuorchè *l'ultima* che va tolta da 10).

II. — Eseguire le operazioni indicate:

1. $66 + 9{,}475 + 31{,}58 + 13{,}09 + 2{,}978$
2. $579{,}912 - 456{,}789$ 3. $902 - 778{,}877$
4. $3{,}003 \times 41$ 5. $0{,}429 \times 287$ 6. $13{,}53 \times 9{,}1$
7. 765×100 8. $765 : 100$ 9. $2{,}345 \times 100$
10. $192{,}4 : 100$ 11. $4{,}56 \times 100$ 12. $12{,}3 \times 100$
13. $450 : 1000$ 14. $0{,}007 \times 100$ 15. $8{,}76 : 100$
16. $9{,}89 : 23$ 17. $26{,}27 : 37$ 18. $6{,}319 : 89$
19. $15487 : 9{,}11$ 20. $637{,}97 : 4{,}87$ 21. $4{,}331 : 0{,}71$

III. — Eseguire le seguenti divisioni, proseguendole sino al resto zero:

1. $91 : 56$ 2. $9{,}01 : 2{,}12$ 3. $15{,}41 : 134$
4. $0{,}51 : 0{,}425$ 5. $111 : 11{,}84$ 6. $5{,}2 : 0{,}416$

AVVERTENZE

1. — *Vi sono* **problemi** *in cui alcuni* numeri, *dati o cercati, devono essere* **naturali**: *ad es., quelli che indicano quanti sono gli uomini (o i cavalli, o gli alberi, ecc.) di cui si parla.*

Ma vi sono anche **problemi** *in cui alcuni* numeri, *dati o cercati, possono essere* **razionali**: *ad es., quelli che indicano misure di lunghezza, di peso, di valore, ecc.*

In questi casi, comunemente, si adoperano numeri **naturali** *o* **decimali** *(non* frazioni, *nè* numeri misti).

2. — *Praticamente, in ogni* numero decimale:

di **metri**, *si usano* due cifre decimali, *che insieme indicano i* centimetri *(di rado si giunge alla* terza cifra decimale, *per indicare anche i* millimetri*)*;

di **chilometri**, *si usano* tre cifre decimali, *che insieme indicano i* metri;

di **chilogrammi**, *si usano* tre cifre decimali, *che insieme indicano i* grammi;

di **lire**, *si usano* due cifre decimali, *che insieme indicano i* centesimi.

3. — *Se* la parte decimale *di un* risultato *è tutta formata di* zeri, *la si* sopprime, *restando così un* numero naturale.

Altrimenti, se il numero delle cifre decimali *è*:

eguale *a quello voluto*, non si sopprimono *gli* zeri finali *che vi fossero*;

minore *di quello voluto, lo si* completa *con* zeri finali;

maggiore *di quello voluto, lo si* riduce *a questo, come sarà spiegato nel* § *delle* approssimazioni.

4. — *Per* risolvere *un* problema, *bisogna decidere anzitutto* quali operazioni *si debbano eseguire coi numeri dati. Ora, questa decisione dipende dall'indole del problema e non da numeri dati.*

Quindi, il principiante può aiutarsi, imaginando provvisoriamente che al posto di ogni numero decimale *vi sia un numero* naturale, *senza precisarlo od anche* precisandolo: *nel qual caso gli gioverà ricorrere a* numeri comodi, *così da consentirgli* la risoluzione mentale *del problema*, coi numeri da lui scelti. *Dopo di che, gli riuscirà facilissima* la risoluzione scritta *del medesimo problema*, coi numeri dati.

Comunque, per evitare da principio ogni difficoltà di comprensione, incomincio col trascrivere alcuni problemi del Volume I,

cambiandovi soltanto i numeri dati; *ma sopprimendo ogni indicazione del* procedimento *da seguire, per lasciare al risolutore la scelta del* più comodo.

Problemi

1. — Al principio di settembre, un calzolaio possedeva L. 643,25.
Durante quel mese ha risparmiato L. 127,65.
Quanto possedeva alla fine di settembre?

2. — Ieri, un panettiere ha venduto kg. 138,250 di pane nel mattino e kg. 72,500 nel pomeriggio.
Quanto nella giornata?

3. — Pietro è uscito di casa per fare due compere.
In un negozio ha pagato L. 37,25.
Nell' altro ha dato L. 25 che aveva ancora in tasca, ed è rimasto in debito di L. 4,50.
Con quante lire era uscito di casa?

4. — Antonio entra in un negozio e spende L. 53,35.
Consegna un biglietto da L. 100 ed attende il resto. Quanto?

5. — Dal suo droghiere, Biagio compera caffè, zucchero, olio e riso, per L. 179,45.
Ma paga solo L. 125. Di quante lire rimane debitore?

6. — Carlo deve a Diego L. 5823,50.
Gli dà un acconto di L. 4573,50.
Quanto gli deve ancora?

7. — Enrico fa alcune compere, in un negozio di cui è buon cliente.
Il conto sarebbe di L. 248,50.
Ma il padrone del negozio gli fa l' abbuono di un decimo dell' importo.
Quanto spende?

8. — Francesco esce di casa con L. 48,35.
In un negozio spende L. 23,75.
Rincasando, incontra Rinaldo, cui aveva prestato L. 7,50 e che gliele rende.
Con quante lire è rincasato Francesco?

9. — Saverio esce di casa con L. 143,85.

In quattro botteghe diverse, egli spende (successivamente) Lire 38,25, L. 4,50, L. 12, L. 77,75.
Con quante lire rincasa?

10. — Carlo compera una camicia per L. 29,50 ed una cravatta per L. 7,75.
Consegna un biglietto da L. 50.
Quanto di resto?

11. — Stefano ha venduto per L. 1852,50 un sacco di caffè, che gli era costato L. 1741,25 ed ha venduto per L. 635 un sacco di zucchero che gli era costato L. 612,75.
Complessivamente, quanto ha guadagnato?

12. — Ecco le annotazioni fatte ieri dal signor Valentino, il negoziante di cereali:
esistenza in cassa L. 7845,35, entrata L. 237,50, entrata L. 648, uscita L. 3087,15, entrata L. 447,75, uscita L. 1130,85, uscita Lire 1462,40, entrata L. 823.
Qual era l' esistenza di cassa, ieri sera?

13. — Quanto costano m. 3,20 di stoffa, a L. 41,50 il m.?

14. — Quanto costano 12 pezze di tela, di m. 48,50 ciascuna, a L. 7,30 il m.?

15. — In una fabbrica lavorano 25 operai, dei quali 8 a L. 23,50 il giorno e gli altri a L. 18,75 il giorno.
Quanto viene speso in paghe, ogni sabato?

16. — Un bottegaio ha comperato 12 casse di sapone da 50 kg. ciascuna, a L. 335 il q., in fabbrica.
Per trasporto ferroviario e consegna a domicilio, di tutte le casse, ha speso L. 84,25.
Inoltre, ha pagato il dazio, di L. 15 il q.
Quanto ha speso in tutto?

17. — Rodolfo aveva stabilito di vendere, a L. 2,75 il litro, litri 300 di vino, di cui era piena una botte giuntagli dalle Puglie.
Ma, dopo averne venduto così l. 120, egli ha riempito d' acqua la botte ed ha venduto tutto il vino annacquato a L. 2,25 il litro.
Così facendo, quanto ha guadagnato più del prefissato?

18. — Rodolfo ha comperato una botte che contiene l. 550 di vino, spendendo (fra costo, trasporto e dazio) L. 1027,50.
Lo travasa in damigiane da l. 24, vende le piene a L. 2,75 il litro (consegna a domicilio, damigiane a rendere) e si fa portare a casa l' ultima, non piena.

Quanto guadagna (oltre al valore della botte e del vino che berrà in famiglia), se la consegna delle damigiane gli viene a costare L. 1,25 ciascuna?

19. — Tre amici hanno pranzato insieme alla trattoria.
Il conto è di L. 43,50.
Qual è la quota di ciascuno?

20. — Un tale morendo lascia L. 135752, da spartire fra 3 figli e 2 figlie, in modo che la parte di ogni maschio sia doppia di quella d'ogni femmina.
Quanto spetta a ciascuno?

21. — Tre muratori hanno ricevuto L. 387, per un lavoro che hanno compiuto in 6 giorni.
In media, quanto al giorno ha ricevuto ciascuno?

22. — Due bottai costruiscono 27 barili in 6 giorni, ricevendo il legno occorrente e L. 13 il barile, quale compenso del lavoro.
In media, quanto al giorno riceve ciascuno?

23. — Enrico lavora a cottimo in una fabbrica di tessuti.
Ogni sera, il caposala segna nel libretto di ciascun operaio quante lire gli spettano per il lavoro eseguito in quel giorno.
Trascrivo dal libretto di Enrico le annotazioni della settimana scorsa:
lunedì 19,45 martedì 20,80 mercoledì 21,35 giovedì 22,15 venerdì 22,65 sabato 23,50.
In media, quante lire per ogni giorno di lavoro?

24. — Manlio è stato in viaggio una settimana.
Partito con L. 694,85 è ritornato con L. 213,45.
I biglietti ferroviari gli sono costati L. 143,65.
In media, quanto ha speso inoltre ogni giorno?

25. — Un operaio è pagato a L. 19,25 il giorno (domenica esclusa) ed in media spende L. 14,50 al giorno (domenica compresa).
In media, quanto risparmia al giorno (domenica compresa)?

26. — Nel mese di febbraio (d'un anno non bisestile), Pietro ha avuto L. 412,80 di paga, per aver lavorato 8 ore al giorno (domeniche escluse).
In media, quanto fu pagato per ogni ora di lavoro?

Il preventivo per un salotto

1. — Un salotto è lungo m. 6,60 largo m. 4,80 ed alto m 3,60.
Ha 2 usci larghi m. 1,20 ed alti m. 2,20.
Ed ha una finestra larga m. 1,20 il cui davanzale è a m. 0,80 dal pavimento e la cui altezza, dal davanzale in su, è m. 2.
Si vuol far *dipingere* il *soffitto*, ed inoltre: una *fascia* alta 20 cm. al sommo delle pareti; ed in basso uno *zoccolo*, alto 40 cm., che, sotto alla finestra, giunga sino al davanzale.
Si vuol fare *ricoprire* la parte libera delle pareti con *carta* alta cm. 60, i cui *rotoli* sono lunghi 8 m., e farla *orlare* orizzontalmente, in alto ed in basso (escludendo però il sommo dei due usci e della finestra), con una *striscia di carta*, in *rotoli* da 8 m.
E si vuol fare ricoprire tutto il pavimento con un *tappeto* la cui pezza è alta cm. 80.
Quanti m². si devono far *dipingere*?
Quanti *rotoli* di *carta* e quanti di *striscia* bisogna provvedere?
Quanti m. di *tappeto* occorrono?

2. — Incominciamo dal preventivo del *tappeto*, il quale dev'essere composto di striscie lunghe quanto il salotto.
In cm., quant'è largo il salotto?
E perciò quante striscie occorrono, alte cm. 80?
E ciascuna quanti m. dev'esser lunga? (In pratica, occorre che ogni striscia sia 10 cm. più lunga della stanza, per poterne piegare 5 cm. a ciascun capo.)
Quanti m. di *tappeto* occorrono?
Risposta: 40,20.

3. — Quanti m. di *striscia di carta*, da orlare, occorrono superiormente?
E, frattanto, quanti dm. è lunga la *fascia da dipingere* al sommo delle pareti? e quanti dm². è alta? e quanti dm². è la sua *area*?

4. — Quanti m. di *striscia di carta* occorrono inferiormente, escludendo i due usci e la finestra?
E, frattanto, quanti dm. è lungo lo *zoccolo da dipingere* in basso, senza la parte che sta sotto al davanzale? quanti dm. è alto? quanti dm². è la sua *area*?

5. — Sicchè: quanti m. di *striscia di carta* occorrono in tutto?

Quanti *rotoli*? (In pratica, si comperano *rotoli completi* e si tiene il residuo per riserva.)

Risposta: 6.

6. — Si mettano in colonna le *aree da dipingere* già calcolate (*fascia* e parte dello *zoccolo*), per scrivervi sotto quelle che si calcoleranno ora.

La parte dello *zoccolo sotto al davanzale* è un rettangolo. Quanti dm. è largo ed alto? quanti dm². è la sua *area*?

Quanti dm. è lungo e largo il *soffitto*? quanti dm². è la sua *area*?

Quanti dm². è *l'area totale da dipingere*? quanti m². ?

Risposta: 44,88.

7. — In fine, bisogna fare il preventivo dei *rotoli di carta*.

Prescindendo dalle parti di pareti sovrastanti ai due usci ed alla finestra, le altre parti, da ricoprire di *carta*, fanno insieme un *rettangolo*: il quale ha per *lunghezza* quella (già calcolata) dello *zoccolo, senza la parte che sta sotto al davanzale*.

Quanti dm. è lungo questo rettangolo? quanti dm. è alta la carta? quante striscie di carta, applicate verticalmente, occorrono?

Ciascuna dev'esser lunga, quant'è alto il rettangolo di cui ci occupiamo: cioè quanto l'*altezza* del *salotto*, diminuita della somma delle altezze della *fascia* e dello *zoccolo*. Quanti m. di carta per ogni striscia? per tutte? Quanti *rotoli*?

Risposta: 12.

8. — Ma non basta.

Sopra ogni *uscio*, bisogna ricoprire di *carta* un *rettangolo*, che ha per *altezza* quella del *salotto* diminuita di quella dell'*uscio* e della *fascia*; questa è la *lunghezza* delle striscie da applicare verticalmente. Quante ne occorrono per ogni uscio? per *i due usci*? in tutto, quanti m.?

Che *altezza* vi è dal sommo della *finestra* al basso della *fascia*? questa è la *lunghezza* delle striscie da applicare verticalmente? Quante ne occorrono? in tutto, quanti m.?

Quanti m. di carta occorrono sopra gli *usci* e la *finestra*? quanti *rotoli*?

Coi 12 rotoli già calcolati, quanti *rotoli di carta* bisogna comperare?

Risposta: 13.

Problemi geometrici

Avvertenza. — *In pratica, si adopera come* unità lineare *il* metro *ovvero un suo* multiplo *(ad es., il* km.*) o* summultiplo *(ad es., il* cm. *od il* mm.*)*.

I numeri decimali *si possono* evitare, *adoperando una* unità lineare *abbastanza piccola*.

Ad es., invece di dire che tre segmenti sono lunghi m.:

4 2,574 0,48

si può dire che essi sono lunghi:

4000 2574 480.

Ma invece, nel risolvere i problemi *seguenti,* non si dovrà cambiare l'unità lineare indicata; *e perciò la* risposta *dovrà darsi in numero* naturale *o* decimale, *come risulterà in ciascun caso.*

Si rammenti, nell' applicare le note regole *per il calcolo di* aree *o di* volumi, *che* l'unità superficiale *e* l'unità solida *devono essere il* quadrato *ed il* cubo *costruiti sull'* unità lineare.

Si avverta inoltre che, nelle misure di aree, *le* cifre decimali *vanno pensate* a 2 a 2. *E perciò, se occorre, bisogna* completarle *con* uno zero finale.

Ad es., non si scrive

m². 1,23456

ma invece m². 1,234560

per poter pensare:

m². 1, dm². 23, cm². 45, mm². 60.

Analogamente, nelle misure di volume, *le* cifre decimali *vanno pensate* a 3 a 3. *E perciò, se occorre, bisogna* completarle *con* uno zero finale *ovvero con* due zeri finali.

Ad es., non si scrive

m³. 8,765 4321

ma invece m³. 8,765 432 100

per poter pensare:

m³. 8, dm³. 765, cm³. 432, mm³. 100.

Si calcoli:

1. — il perimetro e l'area di un rettangolo, lungo cm. 3,5 e largo cm. 2,4.

2. — l'altezza di un rettangolo, la cui area è cm². 24,30 e la cui base è cm. 5,4.

3. — la base di un rettangolo, la cui area è cm². 37,74 e la cui altezza è cm. 5,1.

4. — il perimetro e l'area di un quadrato, il cui lato è cm. 3,8. (*La elevazione al* quadrato *o al* cubo *è un caso particolare di* moltiplicazione, *di 2 o di 3* fattori eguali; *e perciò l'eseguirla non presenta alcuna difficoltà, anche se la* base *è un numero* razionale, *ed in particolare se essa è un numero* decimale).

5. — l'area di un quadrato, il cui perimetro è cm. 13,6.

6. — l'area di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono cm. 7 e cm. 5.

7. — l'altro cateto di un triangolo rettangolo, di cui un cateto è cm. 5,8 e l'area è cm². 10,73.

8. — l'area di un triangolo (qualunque), di cui un lato è cm. 2,5 e la corrispondente altezza è cm. 1,6.

9. — l'altezza corrispondente ad un lato lungo cm. 5,8 in un triangolo la cui area è cm². 11,31.

10. — il lato corrispondente ad un'altezza di cm. 3,7 in un triangolo la cui area è cm². 4,81.

11. — l'area di un parallelogramma, di cui un lato è cm. 6,5 e la corrispondente altezza è cm. 4,4.

12. — l'altezza corrispondente ad un lato lungo cm. 4,3 in un parallelogramma la cui area è cm². 10,75.

13. — il lato corrispondente ad un'altezza di cm. 3,5 in un parallelogramma la cui area è cm². 18,20.

14. — l'area di un rombo, le cui diagonali sono cm. 5,3 e cm. 3,5.

15. — l'altra diagonale di un rombo, di cui una diagonale è cm. 3,9 e l'area è cm². 14,43.

16. — l'area di un trapezio, le cui basi sono cm. 4,7 e cm. 3,1 e la cui altezza è cm. 2,3.

17. — l'altezza di un trapezio, le cui basi sono cm. 5,3 e cm. 3,8 e la cui area è cm². 19,11.

18. — l'altra base di un trapezio, di cui una base è cm. 3,7 l'altezza è cm. 2,5 e l'area è cm². 8.

19. — l'area di un quadrangolo (convesso o concavo), di cui una diagonale interna è cm. 4,7 e le altezze ad essa corrispondenti (nei due triangoli parziali) sono cm. 2,3 ed 1,9.

20. — una diagonale interna ad un quadrangolo, la cui area è cm². 4, sapendo che le altezze corrispondenti alla diagonale cercata (nei due triangoli parziali) sono cm. 1,3 e cm. 1,2.

21. — l'area della superficie totale di un cubo ed il suo volume, sapendo che la somma de' suoi spigoli è cm. 18.

22. — l'altezza che bisogna dare ad una scatola, il cui fondo è internamente un quadrato di cm. 22,5 di lato, affinchè essa contenga cm³. 810.

23. — il peso di un cubo di ghiaccio, il cui spigolo è cm. 25 (sapendo che un dm³. di ghiaccio pesa kg. 0,920).

CAPITOLO V.

DECIMALI FINITI OD ACCORCIATI

§ 1. — Le frazioni ordinarie trasformabili in decimali

1. — Se il *denominatore* di una *frazione ordinaria* è una *potenza* di 2 o di 5, allora, basta moltiplicarne ambo i termini per la *potenza* di 5 o di 2 con lo *stesso esponente*, per *trasformarla* in *frazione decimale* e quindi in *numero decimale.*

Ad es.,

$$\frac{3}{16} = \frac{3}{2^4} = \frac{3 \times 5^4}{2^4\ 5^4} = \frac{3 \times 625}{10^4} = \frac{1875}{10000} = 0{,}1875$$

$$\frac{7}{125} = \frac{7}{5^3} = \frac{7 \times 2^3}{5^3\ 2^3} = \frac{7 \times 8}{10^3} = \frac{56}{1000} = 0{,}056.$$

2. — Si osservi che, in questi casi, il procedimento indicato è preferibile a quello più spontaneo della divisione:

```
30   | 16          700   | 125
140    0,1875        750    0,056
 120                    0
   80
    0
```

3. — Allorchè il *denominatore* è una *potenza* di 2, può

riuscir ancor più comodo *dividere* il *numeratore* per 2, ed il *quoto* per 2, e così via sino ad aver eseguite tante *divisioni consecutive* quante ne indica l'*esponente.*

Ad es., la trasformazione di 3/16 si ottiene con *quattro divisioni consecutive* per 2, così:

1,5 0,75 0,375 0,1875.

4. — Similmente si procede, allorchè il *denominatore* è il *prodotto* di una *potenza* di 2 o di 5 per una *potenza* di 10, come nei due es. seguenti:

$$\frac{2017}{25000} = \frac{2017}{10^3\ 5^2} = \frac{2017 \times 2^2}{10^3\ 10^2} = \frac{2017 \times 4}{10^5} = \frac{8068}{100000} = 0{,}08068$$

$$\frac{13}{3200} = \frac{13}{10^2\ 2^5} = \frac{13 \times 5^5}{10^2\ 10^5} = \frac{13 \times 3125}{10^7} = \frac{40625}{10^7} = 0{,}0040625.$$

In altro modo, prima si calcola 13/32, dividendo 5 volte consecutive per 2, e poi si divide per 100, così:

6,5 3,25 1,625 0,8125 0,40625 0,0040625.

5. — Inversamente:

se il *denominatore* di una *frazione ordinaria irriducibile* ha qualche *divisore primo* che sia *diverso* da 2 e da 5, allora essa *non è trasformabile* in *frazione decimale.*

Infatti, poichè la frazione è *irriducibile*, le sue *eguali* si ricavano da essa col *moltiplicarne* ambo i termini per uno stesso *numero naturale.* Ma, così facendo, quel *numero primo*, diverso da 2 e da 5, continuerà ad es-

sere *divisore* di ogni *nuovo denominatore;* e perciò questo non potrà mai essere una *potenza* di 10 (i cui *divisori primi* sono soltanto 2 e 5).

6. — Ad es., nessuna delle frazioni

8/17 40/49 25/26 54/55 299/300

è trasformabile in frazione decimale: perchè ciascuna di esse è irriducibile e il denominatore di ciascuna ha un divisore primo, diverso da 2 e da 5 (dite voi quale).

7. — Invece, ad es., non bisogna affrettarsi a negare la trasformabilità della frazione 235/376.
Infatti, semplificata per 47, essa diventa 5/8.
Quindi, mediante 3 consecutive divisioni per 2, si ha:

2,5 1,25 0,625

e si conclude che:

235/376 = 0,625.

Naturalmente a questo medesimo risultato si giunge col dividere sùbito 235 per 376.

2350	376
940	0,625
1880	
0	

Ma noi abbiamo *previsto* che questa divisione, purchè convenientemente proseguita, doveva chiudersi col resto *zero.*

8. — Concludendo:
tra le frazioni ordinarie irriducibili, le sole che siano trasformabili in frazioni decimali sono quelle il cui denominatore non ha alcun divisore primo, che sia diverso da 2 e da 5.

Esercizi

Di ciascuna delle seguenti frazioni si *dica,* se è o non è trasformabile in frazione decimale e perchè.
Nei casi affermativi, si *eseguisca* la trasformazione, anche in numero decimale.

1. 6/5	2. 5/6	3. 51/50	4. 50/51
5. 51/68	6. 68/51	7. 125/128	8. 128/125

Si verifichino i numeri decimali ottenuti negli ultimi due esercizi, moltiplicandoli fra loro.

§ 2. — Approssimazioni

1. — Come ho detto, comunemente *il numero delle cifre decimali* è determinato da esigenze pratiche: ad es., 2 se si tratta di *lire,* 3 se si tratta di *chilogrammi,* ecc.
Ma, anche se i numeri *dati* hanno il numero prescritto di cifre decimali, può darsi che i numeri *calcolati* ne abbiano di più.
Per quanto sapete, questo inconveniente non può presentarsi, qualora si debbano eseguire soltanto *addizioni* o *sottrazioni.*
Può presentarsi, invece, allorchè si eseguisce una *moltiplicazione*: perchè *il prodotto* ha tante cifre decimali quante sono *insieme* quelle dei *fattori.*
E si presenta quasi sempre, allorchè si eseguisce una *divisione*: sia che risulti un numero decimale *periodico* (semplice o misto, nel qual caso le cifre decimali sono *infinite*) ovvero *finito,* ma con *più cifre decimali* di quante se ne vorrebbero.

2. — Per quanto riguarda la *moltiplicazione,* accade so-

vente che *le cifre decimali* in *soprannumero* siano *zeri finali*, nel qual caso si *cancellano* senz'altro.

Ad es., per farsi fare un vestito, Anselmo ha comperato m. 3,20 di panno a L. 38,45 il m.
Quanto ha speso?
Ha speso *esattamente* L. 123,04.

```
 38,45
  3,20
 -----
 76900
11535
-------
123,0400
```

3. — Ma quanto avrebbe speso invece, se avesse comperato m. 3,26 di panno, a L. 38,48 il m.?
In questo caso, bisogna ***accorciare*** di *due cifre* il *prodotto*

125,4448

scegliendo fra *i due valori* ***approssimati***:

125,44 per ***difetto***
125,45 per ***eccesso.***

```
 38,48
  3,26
 -----
 23088
 7696
11544
-------
125,4448
```

Ora, secondochè si sceglie il primo od il secondo, ***l'errore*** che si commette è

0,0048 ovvero 0,0052

e perciò *scegliamo* 125,44 come quello *che più si approssima al valore esatto.*
Così facendo, *l'errore* non supera *il mezzo centesimo.*

4. — I bottegai preferiscono far pagare ai clienti *i valori approssimati per eccesso*; anzi, nonchè il *centesimo* di *lira*, essi completano il *soldo.*

5. — Tuttavia, sotto l'aspetto teorico, stabiliamo che:
nell'*accorciare* un *numero decimale*, se ne deve scegliere il valore approssimato *per difetto* o *per eccesso*, secondochè *la prima cifra che si sta per trascurare* è

una delle *prime cinque* (0, 1, 2, 3, 4) ovvero una delle *ultime cinque* (5, 6, 7, 8, 9).
Scegliere il valore *per difetto*, vuol dire *cancellare* senz'altro le cifre decimali in *soprannumero.*
Scegliere il valore *per eccesso*, vuol dire fare la detta *cancellazione*, ma *aggiungere 1 all'ultima cifra che si conserva.*

6. — Ad es., nel caso nostro, se dovessimo *accorciare*

125,4448

in modo da serbarne *tre cifre decimali* (cioè: con *errore* che non superi ***il mezzo millesimo***), allora sceglieremmo il valore *per eccesso*

125,445

perchè *la prima cifra trascurata* è un 8.
Ma noi dovevamo *accorciare* il nostro risultato, in modo da serbarne *due cifre decimali* (cioè: con *errore* che non superi ***il mezzo centesimo***) ed abbiamo scelto il valore *per difetto*

125.44

perchè *la prima cifra trascurata* è un 4.

7. — Per essere precisi, si può avvertire che un numero decimale è approssimato *per eccesso*, mettendo *un trattino* sull'*ultima cifra*, così:

$$38{,}48 \times 3{,}26 = 125{,}44\overline{5}$$

e dicendo « *è quasi* », invece di « è eguale a ».
E si può avvertire che un numero decimale è ap-

prossimato *per difetto*, facendolo seguire da *tre puntini*, così:

$$38{,}48 \times 3{,}26 = 125{,}44...$$

e dicendo « *è poco più di* », invece di « è eguale a ».

Ma, invece di cambiare la lettura del segno =, *alla fine* si può dire: « *per eccesso* » ovvero « *per difetto* ».

8. — Queste diverse *indicazioni* e *letture* hanno lo scopo di evitare che *due scritture*, come quelle di poc' anzi, siano credute *vere eguaglianze*.

Per convincersi che tali non sono, si osservi che, pur avendo *i primi membri eguali*, esse hanno *i secondi membri diseguali*.

9. — Inoltre, un particolare vantaggio reca *il trattino* quand' esso sta sopra un 5.

Invero, se invece di

$$125{,}44\overline{5}$$

si trovasse scritto

$$125{,}445$$

e si volesse *accorciare di una cifra* questo numero, si crederebbe di dover scegliere 125,45 perchè *la prima cifra* che si trascura *sembrerebbe* un 5. E si *sbaglierebbe*.

Invece, vedendo scritto

$$125{,}44\overline{5}$$

si capisce che questo è un numero già *accorciato* e che *la vera terza cifra* era un 4. Perciò *il nuovo accorciamento* dà

$$125{,}44...$$

10. — Pierino osserva:

— Poichè sapevamo di dover adoperare soltanto *due cifre decimali* del *prodotto*, era meglio risparmiare un po' di lavoro, adoperando soltanto *una cifra decimale* di ciascun *fattore*.

Lo invito ad eseguire la *moltiplicazione* in tal modo, ed egli trova 122,88.

— Così facendo, — gli dico — *l'errore per difetto* è 2,5648. Ti sembra tollerabile?

— Ah! — esclama Pierino. — Non ho badato che, essendo 8 e 6 le cifre da trascurare nei due fattori, per ciascuno di essi avrei dovuto adoperare *il valore approssimato per eccesso*.

Lo invito ad eseguire la nuova *moltiplicazione* ed egli trova 127,05.

— Questa volta, — gli dico — *l'errore per eccesso* è 1,6052. È minore dell' altro, ma è pur sempre intollerabile. Non ti pare?

— Forse — soggiunge Pierino, che non vorrebbe arrendersi, — avrei dovuto dare ad un fattore il valore *per difetto* ed all'altro il valore *per eccesso*.

— E secondo te, — gli chiedo sorridendo — avresti dovuto dare il valore *per eccesso* al *moltiplicando* o al *moltiplicatore*?

— Mah! — sospira Pierino, com' è abituato a fare, quando incomincia a sospettare di non concludere nulla di buono.

Io lo incoraggio a provare *nei due modi*, ed egli eseguisce:

38,5	38,4
× 3,2	× 3,3
770	1152
1155	1152
123,20	126,72

— Come vedi, — gli dico — nel primo modo ti risulta un *errore per difetto* di 2,2448 e nel secondo un *errore per eccesso* di 1,2752.

$$\begin{array}{r} 125{,}4448 \\ -\ 123{,}20 \\ \hline 2{,}2448 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 126{,}72 \\ -\ 125{,}4448 \\ \hline 1{,}2752 \end{array}$$

E questi, quantunque un po' minori dei precedenti, sono pur sempre *errori intollerabili.*

11. — Quindi: la previsione di dover *accorciare un prodotto* non autorizza ad *accorciare i fattori*, prima di eseguire *la moltiplicazione.*

Analoga avvertenza vale per *l'addizione* e per *la sottrazione.*

Ad es., se *i risultati* non devono avere più di due *cifre decimali*, eseguite le operazioni

$$\begin{array}{r} 3{,}194 \\ +\ 2{,}352 \\ \hline 5{,}546 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}517 \\ -\ 5{,}073 \\ \hline 4{,}444 \end{array}$$

si conclude che:

$$8{,}194 + 2{,}352 = 5{,}\overline{55}$$
$$9{,}517 - 5{,}073 = 4{,}44...$$

Invece, l'accorciamento preventivo dei numeri dati farebbe ottenere:

$$\begin{array}{r} 3{,}19 \\ +\ 2{,}35 \\ \hline 5{,}54 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9{,}52 \\ -\ 5{,}07 \\ \hline 4{,}45 \end{array}$$

12. — Allorchè un *quoziente* ha raggiunto *il numero desiderato di cifre decimali* senza che sia esaurita la

divisione, questa viene *interrotta* ed il *quoziente approssimato* si sceglie *per difetto* o *per eccesso*, secondochè *la prossima cifra decimale* risulterebbe *minore* o *non minore* di *5.*

Del che ci si accorge, osservando se *l'ultimo resto* è *minore* o *non minore* della *metà del divisore* (in cui si trascuri la virgola).

13. — Ad es., si debba calcolare

$$2{,}76 : 0{,}815$$

con *non più di due cifre decimali.*

Moltiplicati per 1000 il dividendo ed il divisore, si eseguisce la *divisione* sino alla *seconda cifra decimale* (del quoziente).

Poichè l'ultimo resto 530 è non minore della metà del divisore 815, si conclude che:

$$\begin{array}{r|l} 2760 & 815 \\ \cline{2-2} 3150 & 3{,}38 \\ 7050 & \\ 530 & \end{array}$$

$$2{,}76 : 0{,}815 = 3{,}39.$$

14. — Queste avvertenze vanno estese al caso frequente in cui si debbano eseguire successivamente *addizioni*, *sottrazioni* e *moltiplicazioni*, e sia *prestabilito* (in modo dichiarato o tacito) *il numero delle cifre decimali* che deve avere *il risultato finale.*

In tal caso, *non si accorceranno nè i numeri dati, nè i risultati intermedi*: occorrendo, *si accorcerà il risultato finale.*

15. — Sovente, tra le operazioni da eseguire per risolvere un problema, vi sono *divisioni non esatte.*

In tal caso, giova dapprima *indicare* tutte le *operazioni* da eseguire, trasformando ogni numero *decimale* ed ogni *quoto* in una *frazione.*

Dopo ciò, mediante *il calcolo delle frazioni* (il quale richiede soltanto la esecuzione di *addizioni*, *sottrazioni*, *moltiplicazioni* e *divisioni esatte* con numeri *naturali*), l'espressione proposta verrà ridotta ad *una sola frazione*.

Quindi, se questa non sarà *apparente*, per presentare *il risultato finale* in forma di numero *decimale*, basterà eseguire *una sola divisione* e come *ultima operazione*.

16. — Il procedere diversamente può condurre ad *errori intollerabili*, come chiarisco sùbito con esempi: nei quali, per semplicità, suppongo che *il risultato finale* debba essere calcolato con *non più di due cifre decimali*.

17. — Se devo calcolare

$$(123 : 45)\ 789$$

anzitutto *trasformo* quest'espressione, come se si trattasse del *prodotto* di una *frazione* per un numero *naturale*, così:

$$(123 \times 789) : 45.$$

Poi eseguisco:

```
  123          97047   | 45
  789           70     |------
-----          254      2156,6
 1107           297
 984             270
 861               0
-----
97047
```

Il numero cercato è *esattamente* 2156,60.

Chi, invece, eseguisse le operazioni nell'ordine dato, troverebbe:

```
                          2,73
 123   | 45                789
 330   |------           -----
        2,73              2457
  150                     2184
   15                    1911
                        -----
                        2153,97
```

e concluderebbe che il numero cercato è 2153,97 commettendo un *errore* di 2,63.

18. — Se devo calcolare

$$(1,33 : 4,56) : 0,007$$

anzitutto *trasformo* quest'espressione, come se si trattasse del *quoto* di *due frazioni*, e poi la *semplifico*, così:

$$\frac{133}{456} : \frac{7}{1000} = \frac{7 \times 1000}{24 \times 7} = \frac{125}{3}$$

sicchè il numero cercato è 41,67.

Chi, invece, eseguisse le operazioni nell'ordine dato, e badando al secondo divisore avesse la precauzione di calcolare il primo quoziente con tre cifre decimali, troverebbe:

```
1330   | 456
4180   |------
         0,291
 760
 304
```

$$1,33 : 4,56 = 133 : 456 = 0,292$$

e poi

$$0,292 : 0,007 = 292 : 7 = 41,71\ldots$$

commettendo un *errore* di 0,04.

```
292   | 7
12    |------
        41,71
 50
  10
   3
```

19. — Se devo calcolare

$$(63 : 54) + (0{,}36 : 0{,}32)$$

trasformo quest' espressione, come se si trattasse della *somma* di *due frazioni*, ottenendo:

$$\frac{63}{54} + \frac{36}{32} = \frac{7}{6} + \frac{9}{8} = \frac{28 + 27}{24} = \frac{55}{24} = 2{,}29...$$

E se, invece, dovessi calcolare

$$(63 : 54) - (0{,}36 : 0{,}32)$$

otterrei:

$$\frac{28 - 27}{24} = \frac{1}{24} = 0{,}04...$$

Esercizi

Si eseguiscano i calcoli seguenti, con *errore finale* che non superi *il mezzo centesimo*, indicando se per *difetto* o per *eccesso*.

1.	$1{,}35 \times 2{,}47$	**2.**	$2{,}61 \times 0{,}85$	**3.**	$25{,}18 : 5{,}57$
4.	$3{,}34 : 0{,}43$	**5.**	$(13 : 18{,}74)\ 8$	**6.**	$(1109 : 3) : 37$.

Le due ultime espressioni vanno prima trasformate.

Non così le tre seguenti, a calcolar le quali giova subito trovare ed accorciare il prodotto che appare in ciascuna di esse, badando alla specie dell'errore (per difetto o per eccesso): l' errore finale sarà della stessa specie per le prime due espressioni e della specie opposta per la terza.

7. $5{,}56 + (2{,}46 \times 1{,}35)$ **8.** $(2{,}46 \times 1{,}35) - 2{,}21$

9. $9{,}98 - (2{,}46 \times 1{,}35)$.

Per calcolare l' espressione seguente, giova trasformare i due quoti in frazioni ordinarie, semplificare queste e addizionarle, per trasformare poi la somma in numero decimale, approssimato.

10. $(1{,}84 : 1{,}68) + (7{,}2 : 24{,}3)$

Similmente e giovandosi in parte del lavoro fatto, si calcoli;

11. $(1{,}84 : 1{,}68) - (7{,}2 : 24{,}3)$.

Anche per calcolare le due espressioni seguenti, giova anzitutto trasformare in frazioni ordinarie le espressioni tra parentesi e non trascurare poi le semplificazioni.

12. $(9{,}1 : 3{,}4)\ (5{,}1 : 2{,}8)$ **13.** $(4{,}8 : 9{,}9) : (6{,}3 : 8{,}8)$.

Problema

A quanti *talenti*, *mine* e *sicli* (deboli o forti) equivaleva il nostro *quintale*?

(Si rammenti che il *talento debole* equivaleva a g. 30276, che la *mina* era 1/60 di talento e che il *siclo* era 1/60 di mina.

A quanti g. e cg. equivaleva il *siclo debole*? e, perciò, a quanti *sicli deboli* equivaleva il nostro q.?

Si scelga il numero intero *più approssimato*.

Si rammenti che i pesi *forti* erano *doppi* dei pesi *deboli*.

A quanti *sicli forti* equivaleva il nostro q.?

Si *dimezzi* il numero dei *sicli deboli*, rammentando ch'è approssimato per *eccesso*.

Si divida per 60 il numero dei *sicli deboli*: il resto dà i *sicli* domandati. Si divida per 60 il quoziente: il nuovo resto dà le *mine* cercate ed il nuovo quoziente dà i *talenti* domandati.

Similmente si operi sul numero dei sicli *forti*.

Seconda risposta. — A peso *forte*, il nostro *quintale* equivaleva ad 1 *talento*, 39 *mine* e 5 *sicli*.

PESI SPECIFICI

1. — Si chiama *peso specifico* di una sostanza omogenea *il peso* in *grammi*:
di un *centimetro cubo* di essa, se è solida o liquida,
di un *decimetro cubo* di essa, se è aeriforme (gas o vapore).

2. — Ad es., poiche un cm^3. di

cera	*vetro*	*marmo*	*lavagna*
0,96	2,6	2,7	2,8

pesa rispettivamente g.

questi *numeri* sono *i pesi specifici* di quelle sostanze *solide*.

E poichè un cm³. di

	alcool	*petrolio*	*olio*	*mercurio*
pesa rispettivamente g.	0,791	0,878	0,915	13,596

questi *numeri* sono *i pesi specifici* di quelle sostanze *liquide*.
(S'intende che parlo di *alcool puro* e di *olio d'oliva*).
Infine poichè un dm³. di

	idrogeno	*vapor acqueo*	*azòto*	*ossigeno*
pesa rispettivamente g.	0,09	0,81	1,26	1,43

questi numeri sono *i pesi specifici* di quelle sostanze *aeriformi*.

3. — Il *peso specifico* di una *medesima sostanza* varia al variare della sua *temperatura* e della *pressione esterna*.
I *pesi specifici* di cui parlo corrispondono alla *temperatura* di 0° (centigradi) ed alla *pressione barometrica* di 760 mm. (che è la pressione atmosferica normale al livello del mare).
Ma nei calcoli, per semplicità *trascureremo* le *variazioni* che questi pesi specifici subiscono al variare della temperatura e della pressione dell'aria circostante.

4. — Ad es., mentre (per la definizione di *grammo*) *il peso specifico* dell'*acqua distillata* è 1, in quanto però esso abbia la temperatura di 4° e sia sottoposta alla pressione di 760 mm., noi invece le attribuiremo *il peso specifico 1* anche nelle comuni condizioni di temperatura e di pressione; ed anche se, invece di essere acqua distillata (composta soltanto di *idrogeno* e di *ossigeno*), è l'*acqua* che usiamo abitualmente (quantunque essa contenga disciolte altre sostanze che ne modificano variamente, ma lievemente, il peso specifico).
Sicchè, praticamente, per ogni *quantità* di acqua:
lo stesso numero ne *misura* il *volume* in centimetri cubi ed il *peso* in grammi.

5. — A meno che *il peso specifico* dell'*acqua* non differisca notevolmente da 1, a cagione del suo *stato fisico* (ad es., ghiaccio, neve, vapore) o della sua *composizione chimica* (ad es., acqua di mare).

Infatti (mentre del *vapor acqueo* ho già detto parlando degli *aeriformi*), *i pesi specifici* di

	ghiaccio	*neve*	*acqua di mare*
sono:	0,92	0,1	1,026

(S'intende che parlo di *neve soffice*, non compressa, nè ammucchiata).

6. — Quanto *pesa* una lavagna lunga m. 1,45 larga m. 1,08 e spessa 1 cm.?
La sua *forma* è quella di un *parallelepipedo rettangolo* e perciò il suo *volume* è cm³.

$$145 \times 108 \times 1 = 15660.$$

Come ho detto, *il peso specifico* della *lavagna* è 2,8 cioè essa *pesa* g. 2,8 ogni cm³.
Quindi, la lavagna di cui stiamo parlando, *pesa* g.

$$2{,}8 \times 15660 = 43848$$

cioè kg. 43,848.

7. — Dunque:
il peso in grammi di un solido o liquido omogeneo è il prodotto del suo peso specifico per il suo volume in centrimetri cubi.

8. — Inversamente: se avessimo collocato quella lavagna su una *stadera* ed avessimo trovato che essa *pesa* g. 43848, avremmo potuto *calcolare* il suo *peso specifico*, così:

$$43848 : 15660 = 2{,}8.$$

9. — Dunque:
il peso specifico di un solido o liquido omogeneo, è eguale al quoto dei due numeri che misurano il suo peso in grammi ed il suo volume in centimetri cubi.

10. — Si rileggano i due enunciati, cambiandovi *grammi* e *centimetri cubi* in « kg. » e « dm³. », ovvero in « t. » e « m³. ».

11. — Ma, generalmente, i *solidi* d'uso comune non hanno una *forma* che si presti al *calcolo diretto* del loro *volume*.
Eppure, non conoscendo il loro *volume*, non è possibile *calcolare*:
il loro *peso*, mediante il loro *peso specifico*;
nè il loro *peso specifico*, mediante il loro *peso*.
Inoltre, il *peso* di un *liquido* o di un *aeriforme* non si può *mi-*

surare, se non unitamente ad un qualche *recipiente* che lo *contenga* (un *aeriforme* lo occupa sempre *totalmente*, mentre un *liquido* può occuparlo *totalmente* o *parzialmente*).

12. — E come si rimedia? — domanda Pierino.

— Facevi meglio a star zitto! — gli mormora Fiacchetti, in cui la curiosità è vinta dalla pigrizia.

— Sembra che il tuo vicino abbia qualche proposta da fare — dico sorridendo a Pierino, accennando a Fiacchetti.

— No, signore — dice questi, arrossendo.

— In ogni modo, — soggiungo io, traendo di tasca un foglietto — mi potrai aiutare.

13. — Ieri sono andato dal mio farmacista, ma non per comperare medicine. Abbiamo fatto alcune *pesate*, di cui ho preso nota per voi in questo foglietto.

Una stessa boccetta:

piena d'ètere pesava	g. 238,98
vuota	» 128
piena d'acqua	» 283

Ora Fiacchetti venga alla lavagna e scriva *il peso* in g. dell'*etere* contenuto in quella boccetta.

— Da 238,98 bisogna togliere 128 — dice Fiacchetti, accingendosi a scrivere i due numeri in colonna.

— Scrivi addirittura la differenza.

— Fa 110,98.

— E qual era invece *il peso* in g. dell'*acqua* contenuta nella boccetta?

— Devo togliere 128 da 283.

— Cioè 130 da 285. Quanto fa?

— Fa 155.

— Ma ogni g. d'acqua occupa...

— ... un dm³.

— Pierino, correggi.

— ... un cm³.

— E perciò *il volume* di quell'*acqua* era cm³. 155. Qual era dunque, Fiacchetti, *il volume* di quell'*ètere*?

— Lo stesso.

— Cioè?

— Cioè, cm³. 155.

— Quindi, se vuoi conoscere *il peso specifico* dell'*ètere*, dividi *il peso* in g. per *il volume* in cm³.

Fiacchetti eseguisce la divisione.

— Ora vai al posto — gli dico — e annota nel quaderno la tua scoperta:

il peso specifico dell'*ètere* è 0,716.

```
110,98 | 155
 248   |------
 930   | 0,716
   0
```

14. — Risulta che:

il peso specifico di un solido o liquido omogeneo è eguale al quoto dei numeri che misurano il suo peso ed il peso di un egual volume d'acqua.

— E non occorre soggiungere che questi due pesi vanno misurati in *grammi*? — domanda Pierino.

— Non occorre. Infatti: quali numeri misurerebbero in *centigrammi* quell'*ètere* e quell'*acqua*.

— 11·098 e 15·500.

— E qual è il loro quoto?

— È ancòra 0,716.

— Rammenta piuttosto che *il peso specifico* di un *aeriforme* è il peso in g. di un suo dm³ e quindi è 1000 volte il peso in g. di un suo cm³. Sicchè:

il peso specifico di un aeriforme omogeneo è 1000 volte il quoto dei numeri che misurano il suo peso ed il peso di un egual volume d'acqua.

15. — E venga Sventatelli a scoprire *il peso specifico* di una *tazzina* da caffè.

Ieri, il farmacista ed io abbiamo adoperato una tazzina piccola ed un bicchiere grande, in modo che la tazzina potesse stare dentro il bicchiere.

Scrivi che la tazzina vuota *pesava* g. 40,5.

Per misurarne *il volume*, avremmo potuto riempire d'acqua il bicchiere e poi mettervi dentro la tazzina, raccogliendo in un piatto della bilancia l'acqua che frattanto sarebbe traboccata dal bicchiere: il numero dei g. indicanti il peso di quest'acqua avrebbe indicato in cm³ *il volume* della *tazzina vuota*.

Ma, nel mettere la tazzina nel bicchiere, era inevitabile di far traboccare da questo un *volume d'acqua* un po' *maggiore* del *volume della tazzina*.

E perciò abbiamo fatto in altro modo.

Abbiamo messo *la tazzina dentro il bicchiere* e poi abbiamo riempito questo d'acqua. Così facendo, il tutto pesava g. 537,5.

Invece, il bicchiere pieno d'acqua, ma *senza la tazzina*, pesava g. 515.

Ora Sventatelli calcolerà *il volume* della *tazzina vuota.*

16. — È cm³. 22,5.

— Come hai fatto?

— Ho tolto 515 da 537,5.

— Ed hai sbagliato, come troppo sovente ti accade, per la smania di rispondere in fretta. Rifletti invece tranquillamente: se sul piatto della bilancia avessimo messo *il bicchiere pieno* ed *accanto* ad esso (non dentro) avessimo messo *la tazzina vuota*, quanti g. avrebbe pesato il tutto?

$$515 + 40,5 = 555,5.$$

— E se poi avessimo messo *la tazzina dentro il bicchiere* lasciando traboccar l'acqua sul piatto della bilancia, quanti g. avrebbe pesato il tutto?

— Ancòra 555,5.

— Ma *il bicchiere pieno,* con *la tazzina dentro,* pesava g. 537,5. Sicchè: quanti g. avrebbe pesato l'acqua che avrebbe dovuto traboccare sul piatto della bilancia?

$$555,5 - 537,5 = 18.$$

— Riassumendo: la tazzina vuota pesava g. 40,5 ed un egual volume d'acqua avrebbe pesato g. 18. Qual era dunque *il peso specifico della porcellana* di cui era composta quella *tazzina*?

Sventatelli eseguisce rapidamente la divisione alla lavagna e conclude: *il peso specifico* della *porcellana* è 2,25.

```
40,5 | 18
4 5  |----
  90 | 2,25
   0
```

— Bada ch'io parlato di « quella tazzina », perchè *le porcellane* hanno *pesi specifici* che variano da 2,15 a 1,3 secondo la loro composizione.

Problemi

1. — Qual è *il peso dell'aria* contenuta in un'aula (vuota) lunga m. 13, larga m. 10 ed alta m. 6?

(Calcolate il volume in m³. dell'aria contenuta nell'aula, supponendo che abbia la forma di un parallelepipedo rettangolo e sia sgombra di persone e di oggetti.

Il peso specifico dell'aria è 1,2932, cioè:
ogni dm³ d'aria pesa g. 1,2932
ogni m³. d'aria pesa kg. 1,2932.

Con vostra sorpresa, dovrete convincervi che l'aria contenuta in quell'aula pesa *più di una tonnellata.*)

2. — Per calcolare il peso specifico dell'etere vi ho parlato di una boccetta, che *vuota* pesa g. 128 e *piena d'acqua* pesa g. 283. Quanto peserebbe, se venisse riempita di *petrolio*?

(Si rammenti che il peso specifico del petrolio è 0,878.)

3. — Qual è *il volume* di una statua di marmo, che pesa kg. 1809?

(Si rammenti che il peso specifico del marmo è 2,7 sicchè ogni dm³. di marmo pesa kg. 2,7.)

4. — Per calcolare il peso specifico di una tazzina da caffè, vi ho parlato di un bicchiere che, pieno d'acqua, pesa g. 515.

Una statuetta d'avorio pesa g. 45.

Mettendola dentro il bicchiere e poi riempiendo questo di acqua il tutto pesa g. 535.

Qual è *il peso specifico* dell'*avorio*?

(I calcoli fatti per la tazzina da caffè, vanno rifatti per la statuetta d'avorio. Troverete: 1,8.)

5. — Ho due pezzi di *ghisa*, di cui uno certamente *massiccio* (senza cavità) pesa g. 91 e l'altro pesa g. 175, cioè *meno del doppio* mentre manifestamente il suo *volume* è *maggiore del doppio.*

Ciò deve provenire da qualche *cavità* esistente nel secondo, della quale vorrei calcolare il *volume*, pur non rammentando *il peso specifico* della *ghisa.*

(Metto *il primo pezzo* di ghisa dentro il bicchiere di poc' anzi, che poi riempio d'acqua: il tutto pesa g. 593.

Di questa pesata giovatevi per calcolare *il peso specifico* della *ghisa*, come avete fatto poc'anzi per l'avorio. Troverete: 7.

Qual è dunque *il volume* che *dovrebbe avere* il *secondo pezzo*, se fosse *massiccio*?

Metto *il secondo pezzo* di ghisa dentro il bicchiere e lo riempio d'acqua: il tutto pesa g. 679.

Se ne toglieste il pezzo di ghisa, di cui è dato il peso, quanto peserebbe il bicchiere con l'acqua rimastavi? E perciò quanti g., o cm³., d'acqua bisognerebbe versare ancòra nel bicchiere, per riempirlo? Calcolato così *il volume* che *ha* il *secondo pezzo* di ghisa, toglietegli *il volume* ch' esso *dovrebbe avere* se fosse *massiccio,* e che avete già calcolato.

Otterrete così *il volume* della (o delle) *cavità*: perchè, anche se vi fosse rimasta imprigionata un po' d'aria, il suo peso sarebbe trascurabile. Troverete: cm³. 6.)

CAPITOLO VI

NUMERI DECIMALI PERIODICI E LORO GENERATRICI

§ 1. — I numeri decimali periodici semplici

1. — Dico a Pierino:

— Dividi 5 per 7, con *quoziente decimale*. Ma, prima d'incominciare, vorrei tu mi dicessi se speri di poter *proseguire* la divisione, in modo da *chiuderla* col resto *zero*.

— Mah! — sospira prudentemente Pierino.

— In altri termini, 5/7 è o non è trasformabile in *frazione decimale*?

— Non è trasformabile in frazione decimale, perchè 5/7 è *irriducibile* ed il suo denominatore 7 è un numero *primo*, che è *diverso* da 2 e da 5.

— Benissimo. Adesso, eseguisci la divisione.

2. — Allora, — esclama Pierino, preoccupato delle conseguenze della sua risposta — la *divisione*, che sto per eseguire, *non avrà mai fine!*

— Proprio così. Ma non dartene pensiero: ad un certo punto, t'accorgerai che sarebbe inutile proseguire.

— E come me ne accorgerò?

— Poichè ogni *resto parziale* dev'essere *minore* del *divisore*, quali valori potrà avere?

— Dovrà essere uno dei numeri:

0 1 2 3 4 5 6

— Ma abbiamo già detto che non può essere *zero*.

— Allora, — conclude Pierino — dovrà essere uno dei numeri:

1 2 3 4 5 6

— Bene. Ora, tu non sai in quale *ordine* compariranno questi *resti parziali*, nè se compariranno *tutti*. Ma ormai puoi *prevedere* che *non più di sei consecutivi* potranno essere *fra loro tutti diversi*.

Sicchè, dopo *non più di sei divisioni parziali*, dovrà *ricomparire* uno dei *resti precedenti*; od anche, in questo caso, lo stesso *dividendo*.

3. — Così rassicurato, Pierino eseguisce la divisione:

```
50      | 7
 10       0,714285
  30
   20
    60
     40
      5
```

— Vedi, Pierino, che le nostre *previsioni* si sono avverate: dopo *sei divisioni parziali*, è *ricomparso* come *resto parziale* il 5, ch'era il tuo *dividendo*.

— E se continuassi?

— Sarebbe fatica sprecata. Non ne sapresti più di quello che tu possa *prevedere* molto facilmente: *ricomparirebbero* al *quoziente* (nello *stesso ordine*) tutte *le cifre* che hai trovato *sùbito dopo la virgola*; e, frattanto, *ricomparirebbero* (nello *stesso ordine*) tutti *i resti parziali* sino al 5. Otteresti dunque:

0, 714285 714285 ...

— E poi?

— E poi *sempre così*, senza fine.

4. — La *successione finita* di cifre

714285

che ricomparirebbe *senza fine*, proseguendo la divisione di 5 per 7, si chiama: ***periodo***.

Indico il *quoto* di 5 per 7, chiudendo *fra parentesi* il *periodo*, così:

0, (714285).

Il modo più comodo per *lèggere* (e per *dettare*) questa scrittura è:

« zero virgola, periodo 71·42·85 ».

5. — In sèguito, ci capiterà di dover adoperare anche scritture, come ad es.

9,24(351)

nelle quali, tra *la virgola* ed *il periodo*, stanno *alcune cifre* (almeno una), la cui *successione* si chiama: ***antiperiodo***.

Sicchè, nella scrittura

9,24(351)

9 è *la parte intera*, 24 è *l'antiperiodo* e 351 è *il periodo*.

La leggo:

« 9 virgola 24, periodo 351 ».

6. — Perciò, dobbiamo distinguere *tre specie* di *numeri decimali*:

quelli che sin qui abbiamo detto *decimali* senz'altro e che d'ora in poi diremo: ***decimali finiti***;

quelli in cui *il periodo* incomincia *sùbito dopo la virgola* e che diremo: ***decimali periodici semplici***;

e quelli in cui, tra *la virgola* ed *il periodo*, v'è *l'antiperiodo* e che diremo: ***decimali periodici misti***

Ad es.,

7,35	è un numero decimale	*finito*,
0,(714285)	. . . . .	*periodico semplice*,
9,24(351)	. . . . .	*periodico misto*.

7. — Dopo queste spiegazioni, dico a Pierino di indicare il risultato del suo lavoro, scrivendo:

5/7 = 0,(714285).

E soggiungo:

— Poichè *la frazione irriducibile* 5/7 ha dato origine al *numero decimale periodico semplice*

0,(714285)

diremo che 5/7 è ***la generatrice*** di questo numero.

8. — Ma — domanda Pierino — s'io scrivo a caso un *numero decimale periodico semplice*, avrà esso una *generatrice*?

— Sì, eccettuato *un solo caso*, che ti dirò poi. Intanto, scrivi un numero decimale periodico semplice a tuo piacere, e te ne troverò sùbito *una generatrice*.

Pierino scrive: 0,(296).

— Ecco *una generatrice* del tuo numero — gli dico.

E scrivo: 296/999.

9. — Pierino, sorpreso ch' io abbia potuto rispondergli con tanta prontezza, rimane pensieroso: non osa dubitare di quel che gli ho detto, ma avrebbe curiosità di farne *la prova*.

Ed io, che indovino il suo desiderio, lo incoraggio ad eseguirla.

Pierino eseguisce la prova e rimane persuaso.

Allora mi chiede come ho fatto.

2960	999
9620	0,296
6290	
296	

10. — In un modo semplicissimo:

per trovare *una generatrice* di *un numero decimale periodico semplice* (la cui *parte intera* sia *zero*), basta assumere come *numeratore* il *periodo* e come *denominatore* il numero formato con *altrettanti* 9.

11. — Che, facendo così, si faccia bene, l' ho verificato — dice Pierino. — Ma vorrei capirne il *perchè*.

— Niente di più facile. La tua *prova* è consistita nell'osservare che la divisione di

296 per 999

dà il quoziente 0,296 ed il resto 0,296. Ora, come *prova* altrettanto convincente, io (dopo aver moltiplicato per 1000 il tuo *dividendo*, il tuo *quoziente* ed il tuo *resto*) osservo che la divisione di

296000 per 999

dà il quoziente 296 ed il resto 296. Ti pare?

— Sì, ma questo non mi *spiega* nulla.

— Eppure questo *spiega* che tutto il lavoro, da te fatto per calcolare *ad una ad una* le cifre del quoziente, è stato sprecato.

— Perchè?

— Perchè la divisione di

296000 per 999

doveva dare il quoziente 296 ed il resto 296.

— E come lo si capisce?

— Osservando che il *resto* 296 è *minore* del *divisore* 999 e che *la prova della divisione* ci fa ritrovare il *dividendo*, così:

$$(296 \times 999) + 296 =$$
$$= 296\ (999 + 1) = 296 \times 1000 = 296000.$$

E perciò, *senza fare alcun calcolo*, avremmo potuto scrivere *sùbito*:

io

296000	999
296	296

e tu

296	999
296	0,296

12. — Ma allora — osserva Pierino — la generatrice di

0,(714285)

invece di 5/7, sarebbe

714285/999999.

— Anche questa — gli rispondo — è *una* generatrice di quel numero.

— Sicchè, — replica Pierino — *un solo* numero può avere *parecchie* generatrici?

— Sì, ma tutte *eguali* fra loro: e soltanto *quella* di

esse, che è *irriducibile*, io chiamo *la* generatrice. Pròvati dunque a *ridurre ai minimi termini* la tua frazione.

Pierino eseguisce:

	1	2	2
999999	714285	285714	142857
285714	142857	0	

714285 : 142857 = 5
999999 : 142857 = 7

— Vedi, — concludo — che *la* generatrice di

0,(714285)

è proprio 5/7.

13. — Ma allora — soggiunge Pierino — può darsi che

296/999

non sia *la* generatrice, ma *una* generatrice, di

0,(296).

— Può darsi. Ed appunto per questo, se bene rammenti, ho detto: « ecco *una* generatrice del tuo numero ». Verifica, dunque, se essa sia *la* generatrice; e, altrimenti, trovala.

Pierino fa quello che ormai sapete fare anche voi e conclude:

— *La* generatrice di 0,(296) è 8/27.

Gli faccio scrivere:

0,(296) = 8/27.

14. — Ora propongo a Pierino di trasformare in *numero decimale* la frazione *impropria* 40/13, proseguendo

la divisione di 40 per 13 sino a poter precisare *il periodo*.

Pierino eseguisce ed ottiene:

40/13 = 3,(076923).

15. — Veramente, egli scrive:

3,0(76923).

40	13
100	3,076923
90	
120	
30	
40	
1	

Ma lo rendo accorto dell'errore, facendogli calcolare un'altra cifra del quoziente.

— Il 13 in 10 sta 0 volte — dice Pierino.

— Sicchè, — dico io — *il periodo* incomincia dalle « 0 ». E perciò anche 3,(076923) è un *numero decimale periodico semplice*, perchè *il periodo incomincia sùbito dopo la virgola.*

16. — Infine, propongo a Pierino di trovare *la generatrice* di un *numero decimale periodico semplice*, la cui *parte intera* sia *diversa da zero*; ad es., di

3,(076923).

Per avviarlo, scrivo:

3,(076923) = 3 + 0,(076923)

e poi gli faccio calcolare *la generatrice* del secondo addendo.

Egli scrive: 76923/99999.

17. — Attenzione! — dico io. — Nel *denominatore* manca un 9.

— Ma come? — chiede Pierino, sorpreso. — Non ne ho scritti *cinque*, cioè *quante* sono *le cifre* del *numeratore*?

— Appunto. Ed invece, ne dovevi scrivere *sei*, cioè

quante sono *le cifre* del *periodo*: contando anche lo «0» iniziale, che bene hai fatto a non scrivere nel numeratore.

18. — Pierino corregge:

76923/999999.

Poi cerca *il massimo divisore* dei due termini di questa frazione, lo trova sùbito e scrive:

	13
999999	76923
0	

0,(076923) = 1/13.

—Quindi — concludo io — *la generatrice* desiderata è

$$3 + \frac{1}{13} = \frac{(3 \times 13) + 1}{13} = \frac{40}{13}$$

e indicherai il lavoro fatto, scrivendo:

3,(076923) = 40/13.

19. — Ma Pierino, che ha buona memoria, mi domanda quale sia il caso eccezionale, cui ho accennato da principio.

— È quello in cui una scrittura abbia la *forma* di *numero decimale periodico*, col *periodo* 9.

— E perchè? — domanda Pierino sorpreso.

— Trovami, se puoi, *una generatrice* di 0,(9).

— 9/9 — risponde Pierino, credendo di poter applicare la solita regola.

— No, perchè 9/9 = 1. E similmente non potresti trovare, ad es., *la generatrice* di 7,(9) perchè essa dovrebb' essere eguale alla somma di 7 e della *generatrice* di 0,(9) che non c' è.

— Ed allora? — chiede Pierino.

20. — Poichè non hanno *generatrice*, si conclude che, malgrado la loro *forma*, le scritture

0,(9) 1,(9) 2,(9) ...

non sono *numeri decimali periodici*: anzi, non sono *numeri*.

Esercizi

I. — Trasformare in numero decimale periodico (semplice) ciascuna delle frazioni:

1.	1/3	2.	2/3	3.	5/9	4.	3/11
5.	8/37	6.	29/27	7.	72/101	8.	10/7
9.	5/13	10.	25/21	11.	100/91	12.	8/63

II. — Trovare la generatrice (irriducibile) di ciascuno dei numeri:

1.	0,(1)	2.	0,(09)	3.	0,(45)	4.	0,(0099)
5.	11,(1)	6.	4,(54)	7.	0,(407)	8.	0,(378)
9.	0,(428571)	10.	0,(238095)	11.	7,(692307)		
		12.	0,(0588235294117647).				

(Quest' ultimo Esercizio non vi sgomenti: la generatrice è una *unità frazionaria*.)

§ 2. — I numeri decimali periodici misti

1. — Un altro giorno, dico a Pierino:

— Dividi 7 per 12, con *quoziente decimale*. Ma, prima d'incominciare, vorrei tu mi dicessi che cosa *prevedi*.

— Prevedo che *non* troverò un numero *decimale finito*.

— Perchè?

— Perchè 7/12 è una frazione *irriducibile*, il cui *denominatore* è *divisibile* per il numero *primo* 3, che è *diverso* da 2 e da 5.

— Bene. Inoltre, tu sai che, non potendo essere *zero*, ogni *resto parziale* sarà uno dei numeri *naturali*...

— ... da 1 ad 11.

— E perciò, puoi *prevedere* che, dopo *non più di undici divisioni parziali*,...

— ... dovrà *ricomparire* uno dei *resti parziali precedenti*...

— ... od anche lo stesso *dividendo*: perchè, in questo caso, esso pure è uno dei possibili *resti*. Sicchè, tu *prevedi* che troverai un numero decimale...

— ... *periodico*.

— Benissimo.

2. — Pierino sta per iniziare la divisione di 7 per 12. Ma io lo faccio indugiare ancora.

— Rammenta ch'io t'ho detto che vi sono *due specie* di numeri decimali *periodici*: in alcuni *il periodo* viene *sùbito dopo la virgola*, e si dicono *semplici*; in altri, invece, tra *il periodo* e *la virgola*, v'è *l'antiperiodo* e si dicono *misti*.

— Ma l'altra volta ci siamo occupati soltanto di periodici *semplici*.

— È vero. Tuttavia, vorrei tu mi dicessi se il numero decimale periodico, che troverai, sarà *semplice* o *misto*.

— E come faccio a indovinarlo? — chiede Pierino.

3. — Non si tratta di *indovinare*, — dico io — ma di *ragionare*. Supponi, per un momento, di trovare un numero decimale periodico *semplice*, come quelli di cui ci siamo occupati l'altra volta. Anzitutto, quale ne sarà *la parte intera*?

— Sarà *zero*, perchè 7/12 è una frazione *propria*.

— Ed allora, in che modo ne ritroveresti *la generatrice*?

— Scrivendo la frazione che ha per *numeratore* il *periodo* ed il *denominatore* formato con *altrettanti* 9. Poi, ridurrei questa frazione ai *minimi termini*.

— Ottimamente. Ma, prima della riduzione, il *denominatore* terminerebbe per 9, e perciò *non* sarebbe *divisibile* per 2. Quindi: ti sembra possibile che, mediante la riduzione, questo *denominatore* diventi *divisibile* per 2?

— No, certamente.

— Ed allora *la generatrice* non sarebbe la tua frazione *irriducibile* 7/12, perchè il suo *denominatore* è *divisibile* per 2.

— E si conclude? — domanda Pierino.

— Che *non* troverai un numero decimale periodico *semplice*.

— E che cosa troverò?

— Un numero decimale periodico *misto*.

4. — Pierino eseguisce la divisione:

```
70   | 12
100    0,583
  40
   4
```

e spontaneamente si ferma, allorchè vede *ricomparire* il *resto parziale* 4.

— Qual è *il periodo*? — gli domando.
— 3.
— E *l' antiperiodo*?
— 58.
Ora sai come devi indicare il risultato del tuo lavoro.
E Pierino scrive:

$$7/12 = 0{,}58(3).$$

5. — Tieni presente — dico a Pierino — che il ragionamento da noi fatto (per giungere alla *previsione* che 7/12 *genera* un numero decimale periodico *misto*) ci farebbe giungere alla *stessa previsione* per ogni *frazione irriducibile* il cui *denominatore*, oltre ad avere qualche *divisore primo*, diverso da 2 e da 5, fosse anche *divisibile* per 2 o per 5 (o per entrambi).

Ad es., lascio a te (ed al lettore) di calcolare i numeri decimali *generati* dalle frazioni 8/15 e 23/700, cioè di eseguire le divisioni di 8 per 15 e di 23 per 700, proseguendole sino a precisare *l'antiperiodo ed il periodo.*

6. — Adesso, invece, — propongo a Pierino — trovami il numero generato da 7/900, eseguendo *mentalmente* la divisione di 7 per 900.
— 900 in 7 sta 0 volte. Scrivo: « 0, ». Ora 900 in 70...
— Puoi dire invece: 90 in 7...
— ... sta 0 volte. Scrivo: « 0,0 ». Ora 90 in 70...
— Puoi dire invece: 9 in 7...
— ... sta 0 volte. Scrivo: « 0,00 ». Ora 9 in 70 sta 7 col resto 7. Scrivo: « 0,007 ».
— Anzi, ormai puoi scrivere:

$$7/900 = 0{,}00(7).$$

7. — Osserva — dico a Pierino — come sia facile trovare *una generatrice* di 0,00(7) e di ogni altro *numero decimale periodico misto*, la cui *parte intera* ed il cui

antiperiodo siano formati soltanto di *zeri*. Basta darle per *numeratore* il *periodo* e per *denominatore* il numero che si ottiene, scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del *periodo* e poi tanti 0 quante sono le cifre dell' *antiperiodo*. Così facendo, ritrovi sùbito 7/900. In conclusione, mentre

$$0{,}(7) = 7/9$$

invece

$$0{,}00(7) = 7/900$$

e, come hai visto, sono gli *zeri* del *denominatore* che generano l' *antiperiodo.*

8. — Ma come farei a *ritrovare la generatrice* di 0,58(3)? — chiede Pierino.
— È presto fatto. Calcola

$$0{,}58 + 0{,}00(3).$$

— E come?
— Sai che 0,58 è eguale alla *frazione decimale* ...
— 58/100
— ... e che *una generatrice* di 0,00(3) è ...
— 3/900.
— Quindi: $0{,}58 + 0{,}00(3) = \frac{58}{100} + \frac{3}{900}.$

— Ma così non abbiamo ancora *ritrovato la generatrice* di 0,58(3) — osserva Pierino.
— Eseguisci l' addizione e semplifica.
E Pierino scrive:

$$\frac{58}{100} + \frac{1}{300} = \frac{174 + 1}{300} = \frac{175}{300} = \frac{7}{12}.$$

9. — Vedi, Pierino, ch'io t'ho fatto *ritrovare* la gene-

ratrice di 0,58(3) facendoti *calcolare* quella di 0,58 + 0,00(3). Ti giova quindi rammentare che

$$0{,}58(3) = 0{,}58 + 0{,}00(3)$$

cioè: ogni *numero decimale periodico misto* è eguale alla *somma* del numero decimale *finito*, che si ottiene *trascurando il periodo*, e del numero decimale periodico *misto*, che si ottiene scrivendo uno *zero* al posto della *parte intera* e d'ogni *cifra* dell'*antiperiodo*.

10. — In altro modo:

$$\frac{58}{100} + \frac{3}{900} = \frac{(58 \times 9) + 3}{900} = \frac{58(10 - 1) + 3}{900} = \frac{580 - 58 + 3}{900}$$

e si conclude che:

$$0{,}58(3) = \frac{583 - 58}{900}.$$

11. — Sicchè:

per trovare una generatrice di un numero decimale periodico misto, la cui parte intera sia zero, si scrivono di sèguito l'antiperiodo ed il periodo, si calcola la differenza tra questo numero e l'antiperiodo, e la si assume quale numeratore di una frazione, il cui denominatore si forma, scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo e poi tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Poi, eseguendo e semplificando per 75,

$$0{,}58(3) = \frac{525}{900} = \frac{7}{12}.$$

12. — Che regola lunga! — esclama Pierino.

— Ma si fa più presto ad *applicarla* che a *dirla*. Comunque, essa viene insegnata abitualmente; mentre quella di poc'anzi l'ho pensata espressamente per te e mi sono accorto che l'hai trovata facile. Inoltre, essa ti ha preparato a capire quest'altra.

— Ma quale delle due regole dovrò adoperare? — chiede Pierino.

— In pratica, è indifferente usare l'una o l'altra. Ma la seconda ha il merito di farci capire che *la riduzione ai minimi termini non può eliminare dal denominatore tutti i suoi fattori 2 e 5.*

— E come ce lo fa capire?

— Affinchè ciò accadesse, poichè *il denominatore termina con zero*, bisognerebbe che anche *il numeratore terminasse con zero.* Ora, poichè il numeratore viene calcolato come *differenza*, bisognerebbe che *il sottraendo ed il sottrattore terminassero con una stessa cifra.*

— E questo non potrebbe accadere?

— No, perchè allora *il periodo e l'antiperiodo terminerebbero con una stessa cifra.*

— E che male ci sarebbe?

— Prova a scrivere un numero così fatto.

— Sùbito — dice Pierino. E scrive:

0,23(873).

— La tua scrittura è riducibile: *il periodo* non incomincia con 8, ma con 3. E quindi il tuo numero va scritto così:

0,2(387).

13. — Pierino si è persuaso ed io riassumo.

— L'altro giorno hai imparato che:

ogni frazione irriducibile, il cui denominatore sia divisibile per qualche numero primo, diverso da 2 e da 5, genera un numero decimale periodico.

Sicchè, in pratica, viene completamente trascurata la distinzione delle *tre specie* di *numeri decimali*, che tuttavia rimane importante sotto l'aspetto teorico, e ci sarà utile più innanzi.

Esercizi

I. — Trasformare in numero decimale periodico (misto) ciascuna delle frazioni:

1. 5/6	2. 4/55	3. 7/30	4. 1/54
5. 74/75	6. 75/74	7. 42/65	8. 65/42
9. 55/56	10. 56/55	11. 14/15	12. 15/14

II. — Trovare la generatrice (irriducibile) di ciascuno dei numeri:

1. 0,00(5)	2. 0,0(72)	3. 0,0(074)	4. 0,8(36)
5. 0,05(09)	6. 7,12(3)	7. 0,99(074)	8. 0,16(891)
9. 1,011(36)	10. 0,9(714285)	11. 0,00(238095)	12. 1,1(692307)

III. — Dire quale specie di numero decimale generi ciascuna delle seguenti frazioni (osservando che, dalla nona in poi, sono riducibili):

1. 7/32	2. 32/7	3. 24/52	4. 25/24
5. 34/35	6. 35/34	7. 90/91	8. 91/90
9. 35/56	10. 7/42	11. 18/75	12. 75/18

---

§ 3. — Periodicità convenzionali

Le ore del giorno

1. — Noi siamo abituati a numerare *periodicamente* da 1 a 24 le *ore* di ciascun giorno, da 1 a 60 i *minuti* (primi) di ciascun'*ora* e da 1 a 60 i (minuti) *secondi* di ciascun *minuto*.

Ma queste sono ***periodicità convenzionali***: perchè *ore*, *minuti* e *secondi* non corrispondono ad alcun fenomeno astronomico; e soltanto la volontà degli uomini ha assegnato loro *durate costanti*, che ogni buon orologio indica col moto delle sue tre lancette.

2. — Anche *le ore* hanno la loro storia.

Per i Greci antichi, la *notte* (dal tramontare al sorgere del Sole) era suddivisa in 12 *ore notturne*, eguali fra loro, e il *dì* (dal sorgere al tramontare del Sole) era suddiviso in 12 *ore diurne*, pure eguali fra loro.

E qui giova avvertire che, mentre noi chiamiamo *giorno* tanto il solo *dì* quanto l'insieme della *notte* e del *dì*, invece, in questo secondo significato, i Greci antichi usavano una parola composta, che si può tradurre appunto: *notte-dì*.

3. — Le *ore* di un *notte-dì* erano dunque 24, ma la loro *durata* cambiava di giorno in giorno col volgere delle *stagioni*.

La *durata* dell'*ora diurna* era *minima* nel *solstizio d'inverno*, cresceva sino ad *eguagliare* la *durata* dell'*ora notturna* nell'*equinozio di primavera*, cresceva ancora sino a diventare *massima* nel *solstizio d'estate*, poi decresceva sino ad *eguagliare* nuovamente la *durata* dell'*ora notturna* nell'*equinozio d'autunno*, e decresceva ancora sino a ritornare *minima* nel nuovo *solstizio d'inverno*.

4. — Così l'attenzione degli uomini venne attratta sulla ***periodicità naturale*** di quei *quattro giorni notevoli* e quindi sull'*anno astronomico*, quale *durata* del loro *periodo*.

5. — Anche i Romani suddividevano il *dies* in 12 ore, indicate dall' *horologium solarium* (meridiana); sicchè *il mezzogiorno* chiamavano « hora sexta » e, per dire ch'erano le 11, dicevano: «quintam horam tangit umbra».

Ma la *nox* era suddivisa più vagamente in 4 *vigiliae*, di cui la *prima* e la *secunda* dal tramonto alla mezzanotte, e la *tertia* e la *quarta* dalla mezzanotte all'alba.

6. — All'astronomo Claudio Tolomeo (del secondo secolo dopo Cristo) si attribuisce l'idea di usare sempre *le ore equinoziali*, sopprimendo così ogni diversità di durata fra *ore diurne* ed *ore notturne*.

7. — Prima che l'uso degli orologi meccanici consentisse la misura dei *minuti* e dei *secondi*, il frazionamento delle *ore* non andava oltre *il quarto d'ora*, che gli orologi solari e le *clessidre* potevano indicare con sufficiente approssimazione.

Così, ad es., nelle indicazioni di *Tolomeo* circa le *ecclissi*.

8. — Le 24 *ore* vennero *numerate progressivamente* in quattro modi diversi, *incominciando*:

dal sorgere del Sole (modo *babilonese*),

dal tramontare del Sole (modo *ebraico*, poi divenuto *italico*),

dalla mezzanotte (modo di *Ipparco*), [1]

dal mezzodì (modo di *Tolomeo*).

9. — I modi *babilonese* ed *italico* vennero giustamente abbandonati: perchè (in uno stesso luogo, che non sia

(1) Ipparco, il più antico e più grande astronomo greco (del secondo secolo avanti Cristo).

sull'equatore) l'istante del sorgere e quello del tramontare del Sole variano col volgere delle *stagioni*.

Tuttavia, l'uso del modo *italico* durò sino alla Rivoluzione francese. Il calendario indicava *i giorni* in cui si doveva regolare l'orologio con un *salto* di *un quarto d'ora* (*avanti* o *indietro*, secondochè ci si avvicinava al solstizio d'*estate* o d'*inverno*).

10. — Gli *astronomi* ed i *naviganti* preferirono e preferiscono il modo di *Tolomeo*; perchè, mentre il *mezzodì* è indicato dal passaggio del Sole sul *meridiano* del luogo, nessun fenomeno astronomico indica la *mezzanotte*.

11. — Ma per *il giorno civile* venne preferito il modo di *Ipparco*, perchè le ore del sonno costituiscono la più naturale separazione tra gli avvenimenti di due giorni consecutivi.

12. — Tuttavia, dopo la Rivoluzione francese, si ritenne più comodo di *ricominciare due volte* la numerazione delle *ore* di un *giorno*, dalla *mezzanotte* e dal *mezzodì*, (come tuttora indicano gli orologi comuni), distinguendole in *antimeridiane* e *pomeridiane* (come usa ancora da molti).

Risale soltanto al 1891, in Italia, il completo ritorno al modo di *Ipparco*, cioè alla *numerazione ininterrotta* delle 24 ore, da una *mezzanotte* all'altra. [1]

13. — Attualmente il *giorno civile* incomincia 12 ore *prima* del *giorno astronomico*.

Quindi, nell'annunciare al pubblico le loro osservazioni o previsioni, gli astronomi *aggiungono* 12 ore alle indicazioni che usano per loro conto.

(1) In alcuni campanili di montagna, ancora vi sono orologi che indicano soltanto 6 ore, cioè un *quarto* della durata di un *notte-dì*.

Da quell'uso, la mostra di qualsiasi orologio trasse e conservò il nome di *quadrante*.

I giorni della settimana

1. — La *settimana* corrisponde approssimatamente al quarto di lunazione.

La sua *durata costante* (che la parola indica latinamente: *septem mane*, sette mattine) ed il suo *finire* di *sabato* risalgono alla Bibbia. (1)

2. — L'Impero romano accolse l'uso della *settimana* e lo diffuse in Europa.

Costantino ammise il Cristianesimo fra le religioni liberamente professate e fece *terminare* la settimana nel giorno successivo al sabato, che si chiamò *domenica*. (2)

3. — Ora vi racconterò quale si ritiene che sia *l'origine* degli altri *nomi* dei *giorni della settimana*, di cui la più antica testimonianza ci è data da un'iscrizione scoperta a Pompei, che andò sepolta l'anno 79 dopo Cristo.

4. — L'astronomo *Claudio Tolomeo*, che vi ho già rammentato, ignorava l'esistenza dei pianeti Urano e Nettuno.

Egli credeva che il Sole ed i suoi pianeti ruotassero intorno alla Terra, sicchè anche il Sole era da lui annoverato fra *i pianeti* della Terra.

Inoltre, egli equivocava, ritenendo che, rispetto alla Terra, Venere fosse più lontana di Mercurio.

---

(1) «Ed il *settimo* giorno Iddio si *riposò*» (*Genesi*). «Rammenta il giorno del *riposo* (in ebraico: *sciabàd*), per santificarlo» (*Esodo*).

Nel calendario ebraico, gli altri giorni della settimana non hanno *nomi*, ma sono indicati soltanto col loro *numero progressivo*.

(2) In latino: *dies dominica*, giorno del Signore. *Costantino*, vissuto dal 274 al 337, nel 330 trasferì la propria residenza in Bisanzio, che in onor suo fu chiamata *Costantinopoli*.

Sicchè, nel *sistema tolemaico*, i *creduti pianeti* nell'*ordine decrescente* delle loro *credute distanze* dalla Terra, formavano questa successione:

SATURNO, GIOVE, MARTE, SOLE, VENERE, MERCURIO, LUNA.

5. — Ma almeno dal primo secolo dopo Cristo, gli astrologi avevano già posto le *ore* sotto la protezione *periodica* dei *pianeti*, nell'ordine indicato.

Ad es., se *la prima ora* di un giorno era consacrata alla LUNA, allora, ricominciando il periodo, l'ora 2 era dedicata a Saturno, l'ora 3 a Giove, l'ora 4 a Marte, l'ora 5 al Sole, l'ora 6 a Venere, l'ora 7 a Mercurio e l'ora 8 di nuovo alla *Luna*.

Così continuando, in quel giorno risultavano consacrate alla *Luna* anche le ore 15 e 22, mentre le ore 23 e 24 risultavano dedicate a Saturno e a Giove.

6. — In tal modo, *la prima ora* dell'indomani risultava consacrata a MARTE e quindi anche le ore 8, 15 e 22, mentre le ore 23 e 24 risultavano dedicate al Sole ed a Venere.

7. — Perciò, *la prima ora* del giorno seguente risultava consacrata a MERCURIO, con le ore 8, 15 e 22, mentre le ore 23 e 24 risultavano dedicate alla Luna ed a Saturno.

8. — In tal modo, *la prima ora* dell'indomani risultava consacrata a GIOVE.

Potete verificare voi che *la prima ora* dei giorni successivi risultava consacrata a VENERE, a SATURNO, al SOLE e poi nuovamente alla *Luna*.

9. — Sicchè, riassumendo: *la prima ora* di ciascun giorno risultava consacrata *periodicamente* ai pianeti, in *quest'ordine*:

LUNA, MARTE, MERCURIO, GIOVE, VENERE, SATURNO, SOLE.

E dal *pianeta* cui era dedicata *la prima ora* trassero *nome* i GIORNI, che perciò si chiamarono:

lunedì, martedì, mercoledì, giovedì, venerdì...

10. — E *Saturno* e il *Sole*?

I Romani, come dicevano *Lunae dies*, così dicevano *Saturni dies* e *Solis dies*. Ed oggi ancòra gli Inglesi dicono *Satur-day* e *Sun-day*.

Noi, invece, diciamo ***sabato*** e ***domenica***, in omaggio alla tradizione ebraica e cristiana, come ho detto da principio. (1)

I cicli dei calendari

1. — Poichè *l'anno solare* non è un numero *intero* di *giorni*, nessun popolo lo ha adottato come *anno civile*.

Ma, pur attribuendo a *ciascun anno civile* un numero *intero* di *giorni*, parecchi popoli compilarono il proprio *calendario* con l'intenzione di ristabilire *periodicamente* l'accordo tra gli anni *civili* e gli anni *solari*.

Tale *periodo* costituisce il ***ciclo*** di un *calendario*.

2. — Come sapete, il *ciclo* del calendario:

giuliano ha la durata di 4 anni, di cui 3 *comuni* (di 365 giorni) ed 1 *bisestile* (di 366 giorni);

gregoriano ha la durata di 400 anni, di cui 303 *comuni* e 97 *bisestili*.

(1) Il fatto che la settimana *incominciava* col giorno che poi fu chiamato *domenica* è confermato dal detto antico:

Prima dies Phoebi sacrato nomine fulget.

3. — Il *ciclo d'oro* (del nuovo calendario ***ebraico***) ha la durata di 19 anni, di cui 12 *semplici* (di 12 mesi lunari) e 7 *embòlimi* (di 13 mesi lunari) corrispondenti agli anni:

3, 6, 8, 11, 14, 17, 19.

4. — Notevole, per la sua *uniformità* era l'antico calendario ***egizio***: il suo *anno* era sempre di 12 *mesi*, di 30 *giorni*, seguìti da 5 *giorni complementari*.

Sicchè, l'anno *egizio* era sempre di 365 giorni, come l'anno *comune* di Giulio Cesare e di Gregorio XIII.

L'anno *solare* essendo ritenuto di 365 giorni e 6 ore, l'anno *civile* era in ritardo di *un giorno* ogni *quattro anni*, e perciò di *un anno civile* ogni 1460 *anni civili*.

Ma nulla veniva fatto per compensare questo ritardo: gli astronomi si accontentavano di sapere che 1461 anni *civili* avevano la durata (creduta) di 1460 anni *solari*, e chiamavano ***anno di Sirio*** l'anno *civile* in *soprannumero*, rispetto agli anni *solari*.

Sicchè, il *ciclo egizio* era di 1461 anni.

5. — Oggi ancora, la conoscenza di questo calendario occorre per interpretare le notizie astronomiche fornite da *Tolomeo*, il quale contò gli anni da quello in cui ebbe principio il regno di *Nebucadnèzar*. (1)

6. — Però il volgo, cui si voleva risparmiare ogni preoccupazione astronomica, non poteva non accorgersi che,

(1) Nabuccodonosor, re di Babilonia, che fece ornare di splendidi palazzi, templi e giardini. Assoggettò gli Egizi e distrusse Gerusalemme. Col nome accorciato in *Nabucco*, è il protagonista di una tragedia di *Niccolini* e di un'opera di *Verdi*.

Secondo l'astronomo francese *Delambre*, estendendo a ritroso il calendario *giuliano*, il 26 *febbraio* dell'anno 746 avanti Cristo corrisponderebbe al *capodanno* dell'anno 1 di *Nebucadnèzar*, ch'egli chiama *Nabonassar* (Astronomie théorique et pratique, tome III, p. 694, Paris, Courcier, 1814).

un po' per volta, il *capodanno mutava* di *stagione*, retrocedendo dall'*inverno* all'*autunno*, all'*estate*, alla *primavera*.

Tuttavia l'inconveniente non appare molto grave, se si paragona la *lentezza* di questa retrocessione alla durata della vita umana. Infatti, perchè la retrocessione fosse di *una stagione*, dovevano trascorrere ben 365 anni!

7. — Ma, al tempo dell'imperatore Augusto furono di opinione diversa; e, con evidente imitazione del calendario *giuliano*, il calendario *egizio* venne trasformato nel calendario ***alessandrino***, con l'aggiunta di *un giorno complementare* ogni 4 anni: ma lasciando invariati i mesi di 30 giorni.

Così, il *ciclo* si ridusse a 4 anni e d'allora in poi il *capodanno alessandrino* corrispose al 30 *agosto giuliano*.

8. — Vi ho dato queste notizie, perchè proprio ad esse si inspirarono i riformatori del calendario, durante la Rivoluzione francese.

Infatti, l'anno ***repubblicano*** fu composto di 12 mesi, di 30 giorni (come il mese *egizio* ed *alessandrino*), seguìti da 5 o da 6 *giorni complementari*, in modo che *il capodanno* coincidesse sempre con *l'equinozio d'autunno*. [1]

---

[1] Questa pretesa di esattezza astronomica fu combattuta preventivamente dall'astronomo *Delambre*, il quale rilevò che, ad es., nell'anno 144 dopo Cristo *l'equinozio d'autunno* era stato così *prossimo* alla *mezzanotte* che nessuno avrebbe potuto asserire se era stato un po' *prima* od un po' *dopo* di essa: sicchè il *capodanno* sarebbe risultato *incerto*.

Egli propose quindi che venisse conservata *la intercalazione periodica* dell'anno di 366 giorni, conforme al *calendario giuliano* e con *la correzione gregoriana*, cui egli avrebbe voluto aggiungere quest'altra (suggerita da calcoli analoghi a quelli da me svolti nel *Volume I*, ma meno approssimati, perchè egli attribuì all'anno solare 3 secondi e 6 decimi di meno): che *non fosse bisestile* l'anno 3600 o, se piacesse meglio, l'anno 4000.

Ma *Romme*, il riformatore del calendario, non volle seguire il parere

Ed ai *mesi* vennero dati nuovi *nomi*, la cui derivazione etimologica era un po' eterogenea, ma che avevano il merito di *finire* in uno stesso modo in ciascuna *stagione* e di avere un *significato* armonizzante con essa.

Furono chiamati:

Vendémiaire, Brumaire, Frimaire	per l'autunno,
Nivose, Pluviose, Ventose	... l'inverno,
Germinal, Floréal, Prairial	... la primavera
Messidor, Thermidor, Fructidor	... l'estate.

---

del *Delambre*, che pure aveva ottenuto l'approvazione di un'assemblea di matematici e di astronomi.

Epilogo pietoso: il giorno stesso, in cui il *Romme* presentò le sue proposte alla Convenzione, una disputa politica lo mise «*hors de la loi*» (« fuori della legge », cioè in istato d'accusa) ed il giorno stesso, in cui il decreto della sua riforma fu pubblicato, la sua condanna a morte venne eseguita.

CAPITOLO VII

POTENZE DI NUMERI RAZIONALI

1. — Il significato della *potenza* non cambia affatto quando *la base*, anzichè un numero naturale, è un numero *razionale* (purchè *l'esponente* sia ancora un numero *naturale*).

E cioè:

ogni potenza con esponente zero (e base diversa da zero) *vale 1,*

ogni potenza con esponente 1 è eguale alla base,

ogni potenza, con esponente non minore di 2, è il prodotto di tanti fattori eguali alla base, quanti ne indica l'esponente.

2. — Quindi, neppure cambiano le regole per *il calcolo delle potenze.*

E cioè:

il prodotto od il quoto di potenze, con una stessa base, è eguale a quella potenza, con la stessa base, che ha per esponente la somma o la differenza degli esponenti (e perciò, nel caso della divisione, l'esponente del dividendo dev'essere non minore di quello del divisore)*;*

il prodotto od il quoto di potenze, con uno stesso esponente, è eguale a quella potenza, con lo stesso esponente, che ha per base il prodotto od il quoto delle basi;

ogni potenza di potenza è eguale a quella potenza, con la base primitiva, che ha per esponente il prodotto degli esponenti.

3. — Per il significato della potenza, ad es.,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$$

da cui, per la regola della moltiplicazione delle frazioni,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

da cui, per il significato della potenza,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}.$$

4. — Dunque:

per elevare una frazione a potenza, con esponente non minore di 2, basta elevarne ambo i termini a potenza, con quell'esponente.

Ma è proprio necessario supporre che l'esponente non sia minore di 2?

Applicando la regola nel caso in cui l'esponente è 0, si ottiene $1 = 1/1$, il che è *vero.*

Ed applicandola nel caso in cui l'esponente è 1, si viene a dire che la frazione proposta è eguale a sè stessa, il che è *vero.*

Sicchè: la regola è *vera*, qualunque sia l'esponente.

5. — Si conclude che:

per elevare a potenza una frazione, basta elevarne ambo i termini a potenza, con quell'esponente.

6. — Se due numeri *naturali* sono *primi fra loro*, cioè

e per ultimo *dividiamo*:

```
54872      | 1331
 1632      ------
  3010      41,226145
   3480
    8180
     1940
      6090
       7660
        1005
```

Poichè il resto (considerato come numero naturale) non è minore della metà del divisore, scegliamo *l'approssimazione per eccesso* e concludiamo che

$$[3,(45)]^3 = 41,226146$$

sapendo che *l'errore* non supera *il mezzo milionesimo.*

Dal confronto col risultato precedente, risulta che *l'errore* di quello superava *il decimo.*

11. — Per sapere se la regola, per lo *sviluppo* del *quadrato* della *somma* o della *differenza* di due numeri, valga anche quando sono *razionali*, possiamo supporre che siano *frazioni ordinarie con uno stesso denominatore* (perchè, altrimenti, potremmo trasformarli in tal modo).

Ad es., accontentandoci di *indicare* le operazioni (senza *eseguirle*):

$$\left(\frac{31}{47}+\frac{8}{47}\right)^2=\left(\frac{31+8}{47}\right)^2=\frac{(31+8)^2}{47^2}$$

in cui sappiamo che

$$(31+8)^2 = 31^2 + (2 \times 31 \times 8) + 8^2.$$

Quindi:

$$\frac{(31+8)^2}{47^2}=\frac{31^2}{47^2}+\frac{2\times 31\times 8}{47^2}+\frac{8^2}{47^2}.$$

Riassumendo:

$$\left(\frac{31}{47}+\frac{8}{47}\right)^2=\left(\frac{31}{47}\right)^2+\left(2\times\frac{31}{47}\times\frac{8}{47}\right)+\left(\frac{8}{47}\right)^2.$$

E similmente, sapendo che

$$(31-8)^2 = 31^2 - (2 \times 31 \times 8) + 8^2$$

otteniamo:

$$\left(\frac{31}{47}-\frac{8}{47}\right)^2=\left(\frac{31}{47}\right)^2-\left(2\times\frac{31}{47}\times\frac{8}{47}\right)+\left(\frac{8}{47}\right)^2.$$

12. — Dunque:

il quadrato della somma o della differenza di due numeri razionali è eguale alla somma dei loro quadrati, aumentata o diminuita del loro doppio prodotto.

13. — Similmente,

$$\left(\frac{31}{47}+\frac{8}{47}\right)\left(\frac{31}{47}-\frac{8}{47}\right)=\frac{31+8}{47}\times\frac{31-8}{47}=\frac{(31+8)(31-8)}{47^2}$$

in cui sappiamo che

$$(31+8)(31-8) = 31^2 - 8^2.$$

Quindi:

$$\left(\frac{31}{47}+\frac{8}{47}\right)\left(\frac{31}{47}-\frac{8}{47}\right)=\frac{31^2-8^2}{47^2}=\frac{31^2}{47^2}-\frac{8^2}{47^2}=\left(\frac{31}{47}\right)^2-\left(\frac{8}{47}\right)^2.$$

14. — Dunque:

il prodotto della somma di due numeri razionali per la loro differenza è eguale alla differenza dei loro quadrati.

15. — E perciò, inversamente:

la differenza dei quadrati di due numeri razionali è eguale al prodotto della somma delle basi per la loro differenza.

Ad es.,

$$\left(\frac{40}{51}\right)^2-\left(\frac{23}{51}\right)^2=\frac{40+23}{51}\times\frac{40-23}{51}=\frac{63}{51}\times\frac{17}{51}=\frac{21}{17}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{17}.$$

16. — L'uso delle *potenze* di numeri *razionali* rende opportuno distinguere due casi, secondochè *la base* è *maggiore* o *minore* di 1 (ma diversa da zero).

Voi sapete che:

« se si moltiplica una potenza per la base, si ottiene la potenza successiva (cioè: con la stessa base e con l'esponente successivo) » e che:

« allorquando si moltiplicano fra loro due numeri razionali (il primo dei quali diverso da zero), il prodotto risulta maggiore o minore del moltiplicando, secondochè il moltiplicatore è maggiore o minore di 1 ».

17. — Potete dunque concludere che:

le potenze di un numero razionale (diverso da 0 e da 1) *crescono o decrescono insieme con l'esponente, secondochè la base è maggiore o minore di 1.*

18. — Segue ad es., che *la successione naturale delle potenze* di 3/2 (corrispondente alla *successione naturale* degli *esponenti*) è *crescente*:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^0=1,\quad \left(\frac{3}{2}\right)^1=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4},$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{27}{8}=3+\frac{3}{8},\quad \left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}=5+\frac{1}{16},\ldots$$

ed invece quella di 2/3 è *decrescente*:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^0=1,\ \left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{2}{3},\ \left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9},\ \left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27},\ \left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81},\ldots$$

Esercizi

Calcolare:

1. — il quadrato di 1/3, di 3/5, di 5/7, di 7/9,

2. — il cubo di $2+1/3$, di $3+1/2$
(trasformando la base in frazione impropria e poi la potenza in numero misto),

3. — il quadrato di $5+1/2$, di $9+1/3$
(nel modo precedente ovvero come somma di tre addendi),

4. — la quarta potenza di 4/3
(trasformandola poi in numero decimale, che avrà un periodo di 8 cifre),

5. $(1+5/9)^7\ (1+19/35)^7\ (5/12)^7$

(calcolando anzitutto il prodotto delle basi),

6. $(11+1/2)^2:(7+2/3)^2$

(calcolando anzitutto il quoto delle basi),

7. $(19/37)^2-(18/37)^2$

(come prodotto della somma delle basi per la loro differenza).

CAPITOLO VIII

RAPPORTI E PROPORZIONI

§ 1. — Rapporto

1. — Il *rapporto* di *due lunghezze*, già *misurate*, è il *quoto* dei *due numeri* che le *misurano* rispetto ad una *stessa unità*.

2. — Altrettanto dicasi del *rapporto* di *due aree*, di *due volumi*, di *due pesi*, di *due valori*, di *due tempi* (durate), ecc.

3. — Due commercianti, Pietro e Giovanni, si erano dati convegno nella stazione di Parma.

Pietro vi giunse da Bologna (km. 90) e Giovanni da Milano (km. 126).

Qual è *il rapporto* delle *distanze* che avevano superato?

4. — *Il rapporto* cercato è

$$90 : 126$$

ovvero, semplificandolo per 18,

$$5 : 7.$$

5. — Ma non usa dire che *il rapporto* delle *due distanze* è

« 5 *diviso* 7 ».

Si preferisce dire che *le due distanze* ***stanno fra loro***

« ***come*** 5 ***sta a*** 7 ».

6. — Allorchè *i due termini* di un *rapporto* sono *due numeri naturali*, si potrebbe anche indicarlo come *frazione ordinaria*.

Abitualmente lo si *indica* come *quoto*, ma lo si *riduce ai minimi termini* come *frazione ordinaria*.

7. — Segue che: *il rapporto di due lunghezze non dipende dalla scelta dell'unità di misura*.

Ad es., ricorrendo al *metro* anzichè al *chilometro*, le *distanze* di Parma da Bologna e da Milano sono m. 90·000 e m. 126·000. Ma il loro *rapporto* si *riduce* egualmente a « 5 : 7 ».

E similmente: non dipende dalla scelta dell'*unità* di misura neppure *il rapporto di due aree*, di *due volumi*, di *due pesi*, di *due valori*, ecc.

8. — Durante il pranzo, i due commercianti hanno concluso l'affare per cui si erano dati convegno.

Poi, mentre attendevano i treni per ripartire, si sono pesati.

Pietro pesava kg. 78 e Giovanni kg. 65.

Qual era *il rapporto* dei loro *pesi*?

9. — *Il rapporto* cercato è

$$78 : 65$$

ovvero semplificandolo per 13,

$$6 : 5.$$

Ma diciamo che *i due pesi stavano fra loro*

« *come* 6 *sta a* 5 ».

10. — Abitualmente, una frazione *impropria* (ma non apparente) come $^6/_5$ viene trasformata nel numero *misto* $1 + {}^1/_5$.

Invece, *il rapporto* «6 : 5» si lascia in questa forma.

11. — Pietro, di 36 anni, aveva seco un figlio di 9. Qual era il *rapporto* delle loro *età*?

12. — *Il rapporto* cercato è

36 : 9

ovvero, semplificandolo per 9,

4 : 1.

Ma diciamo che *le due età stavano fra loro*

« *come* 4 *sta a* 1 ».

13. — Abitualmente, una frazione *apparente* come $^{36}/_9$ viene ridotta al numero *naturale* 4.

Invece, *il rapporto* « 4 : 1 » si lascia in questa forma.

14. — Alle 20.50 (si legga: « 20 e 50 ») Giovanni è ripartito per Milano, arrivandovi alle 23.10.

Alle 21.40 Pietro ed il figliolo sono ripartiti per Bologna, arrivandovi pure alle 23.10.

Qual è *il rapporto* dei *tempi*, impiegati da Pietro e da Giovanni nel loro viaggio di ritorno?

15. — *Il tempo* impiegato da Pietro è stato ore

23.10 — 21.40

cioè (aggiungendo 20 minuti ad ambo i termini)

23.30 — 22 = 1.30

cioè: *minuti* 60 + 30 = 90.

Il tempo impiegato da Giovanni è stato

23.10 — 20.50

cioè (aggiungendo 10 minuti ad ambo i termini)

23.20 — 21 = 2.20

cioè: *minuti* 120 + 20 = 140.

Quindi, *il rapporto* cercato è

90 : 140

ovvero, semplificandolo per 10,

9 : 14.

Ma diciamo che *i tempi*, impiegati da Pietro e da Giovanni nel loro viaggio di ritorno, *stanno fra loro*

« *come* 9 *sta a* 14 ».

16. — Supponete che, invece del rapporto dei tempi impiegati da *Pietro* e da *Giovanni*, si fosse cercato il rapporto dei tempi impiegati

da *Giovanni* e da *Pietro*

Invece di 9 : 14

si sarebbe trovato 14 : 9.

17. — Come le *frazioni* $^9/_{14}$ e $^{14}/_9$ si dicono fra loro *reciproche*, così i *rapporti* « 9 : 14 » e « 14 : 9 » si dicono fra loro *reciproci* o ***inversi***.

Dunque:

scambiando fra loro i due tempi impiegati, il loro rapporto si inverte.

18. — Similmente, riprendendo sott'occhio *i rapporti* che abbiamo calcolato e *scambiando l' ordine dei nomi*:

le due distanze, superate da *Giovanni* e da *Pietro*, stavano fra loro come 7 sta a 5,

i pesi di *Giovanni* e di *Pietro* stavano fra loro come 5 sta a 6,

le età del *figlio* di Pietro e di *questi* stavano fra loro come 1 sta a 4.

19. — Gli è appunto per facilitare la eventuale *inversione* di *rapporti* come « 6 : 5 » e « 4 : 1 », che si preferisce *non trasformare* « 6 : 5 » in numero *misto* e « 4 : 1 » in numero *naturale*.

20. — Inversamente, il *quoto indicato* di *due numeri* si può pensare quale *rapporto* di *due lunghezze* (o di *due aree* o di *due volumi* ecc.) che, rispetto ad una *stessa unità*, siano *misurate* da quei *due numeri*.

Perciò, anche ogni *quoto indicato* di *due numeri* si chiama talvolta: loro ***rapporto***.

21. — Se ad es., « 5 : 9 » si pensa come *rapporto* di *due lunghezze*, di *due pesi*, ecc. ovvero di *due numeri*, allora si dice che 5 e 9 sono i suoi ***due termini*** e precisamente che:

5 è ***l'antecedente***

e 9 è ***il conseguente***.

In conclusione, è indifferente parlare di

	quoto	*dividendo*	*divisore*
ovvero di	*frazione*	*numeratore*	*denominatore*
ovvero di	*rapporto*	*antecedente*	*conseguente*.

22. — In molte questioni pratiche, se *il conseguente* è 100 o 1000 ed il *rapporto* è *riducibile*, si preferisce *non ridurlo*.

Ad es., impiegando 100 mila lire in una speculazione disgraziata, un commerciante ha perduto 15 mila lire.

Il rapporto fra *la perdita* ed *il capitale* è

15 : 100

e si preferisce lasciarlo in questa forma, pur potendo ridurlo a

3 : 20.

23. — I commercianti usano modi speciali di *dire* e di *scrivere* che giova conoscere.

Allorchè parlano dell'esito d' un affare, per brevità *sottintendono* che *il conseguente* è *il capitale impiegato*.

Non sottintendono invece *l' antecedente*, perchè esso talvolta è *guadagno* e tal altra è *perdita*.

Ad es., quel commerciante dice brevemente di aver avuto una *perdita* del

« 15 ***per*** 100 »,

cioè di « 15 lire *per ogni* 100 lire »,

e la indica con la scrittura:

15 %.

24. — Allorchè il *conseguente* è 100, il *rapporto* si chiama: ***percentuale***.

Ad es., i fabbricanti compensano i loro rappresentanti con una *percentuale* sugli importi delle vendite, che si chiama: ***provvigione***.

Se una compra-vendita di case, terreni, bestiame, ecc. viene conclusa con l'intervento di un sensale, questi riceve dal venditore e dal compratore una *percentuale* sull'importo dell'affare, che si chiama: ***mediazione***.

25. — Si chiama ***scala*** di un *disegno* il *rapporto* fra le *lunghezze disegnate* e le *lunghezze vere* (in quest'ordine).

Nelle carte *geografiche* si preferisce che la *scala* sia un' *unità frazionaria*, e cioè abbia per *antecedente* 1.

Ad es., se la scala è

1 : 500·000

allora ogni cm. *rappresenta* cm. 500·000, cioè m. 5000, cioè km. 5.

26. Come sappiamo per il *quoto*:

il rapporto di due numeri razionali è un numero razionale.

E quindi:

il rapporto di due numeri razionali è trasformabile nel rapporto di due numeri naturali.

Ad es.,

« Il rapporto di $^{65}/_{66}$ a $^{91}/_{90}$ »

(eseguendo la divisione di $^{65}/_{66}$ per $^{91}/_{90}$ cioè la moltiplicazione di $^{65}/_{66}$ per $^{90}/_{91}$ ma dopo aver semplificato per 13 e per 6) diventa:

« il rapporto di 75 a 77 ».

Ed ancora, ad es.,

« il rapporto di $7 + {}^{1}/_{7}$ a $3 + {}^{4}/_{7}$ »

(cioè di $^{50}/_{7}$ a $^{25}/_{7}$ cioè di 50 a 25) diventa:

« il rapporto di 2 ad 1 ».

Esercizi mentali

I. — Mediante le distanze ferroviarie progressive indicate a destra e riducendo ai minimi termini ciascun rapporto domandato, si dica come stanno fra loro le distanze di Ravenna

1. — da Godo e da Granarolo,	Ravenna	km.	0
2. — da Granarolo e da Fognano,	Godo	»	13
3. — da Godo e da Fognano,	Russi	»	17
4. — da Russi e da Borgo,	Granarolo	»	26
5. — da Russi e da Firenze,	Faenza	»	35
6. — da Borgo e da Firenze,	Brisighella	»	49
7. — da Faenza e da Brisighella,	Fognano	»	52
8. — da Faenza e da S. Cassiano,	S. Cassiano	»	60
9. — da Faenza e da Marradi,	S. Martino	»	64
10. — da Faenza e da Crespino,	Marradi	»	70
11. — da Faenza e da Panicaglia,	Fantino	»	75
12. — da Brisighella e da Marradi,	Crespino	»	80
13. — da Brisighella e da Panicaglia,	Fornello	»	87
14. — da S. Cassiano e da Marradi,	Ronta	»	93
15. — da S. Cassiano e da Fantino,	Panicaglia	»	98
16. — da S. Cassiano e da Crespino,	Borgo	»	102
17. — da S. Martino e da Crespino,	S. Piero	»	107
18. — da S. Martino e da Caldine,	Váglia	»	114
19. — da Fantino e da Ronta,	Montòrsoli	»	122
20. — da Crespino e da Caldine,	Caldìne	»	128
21. — da Crespino e da Firenze.	Firenze	»	136

II. — Similmente, si dica come stanno fra loro le altezze:

1. — delle cupole di S. Paolo a Londra (m. 110) e di S. Pietro in Roma (m. 132),

2. — del campanile di S. Marco a Venezia (m. 99) e del Torrazzo di Cremona (m. 121),

3. — del Torrazzo di Cremona e della torre della cattedrale di Strasburgo (m. 143),

4. — di ciascuno dei piloni (m. 250) della stazione radiotelegrafica di Coltano, fra Livorno e Pisa, e la torre Eiffel a Parigi (m. 300).

Problemi

1. — Qual è la velocità media del diretto che parte dalla stazione centrale di Palermo alle 14.10 e giunge alla stazione centrale di Messina alle 19.25?

La strada ferrata da Palermo a Messina è lunga km. 232.

(*La velocità media* di un treno è *il rapporto* fra *la lunghezza* della strada ferrata, misurata in *chilometri*, ed *il tempo* impiegato a percorrerla, misurato in *ore*.

Si calcoli *il tempo* impiegato, dapprima in ore e minuti, poi in ore e frazione d'ora, ed infine in numero misto di ore.

La velocità cercata risulterà espressa da un numero misto. Se la parte frazionaria è minore di $^1/_2$, la si trascuri; e si risponda che la velocità di quel treno è poco più di. . . km. all'ora).

2. — Risulta però dall'orario che quel diretto si ferma 6 minuti a Termini Imerese, 13 a S. Agata di Militello e 5 a Patti, oltre a 6 fermate di 1 minuto ciascuna.

Qual è dunque *il tempo netto* (di fermate) impiegato da quel treno?

E qual è la sua velocità media durante la corsa?

3. — Se durante la corsa quel diretto avesse la velocità media di 58 km. all'ora, e nulla venisse cambiato nell'ora di partenza da Palermo e nella durata delle soste intermedie, quale sarebbe la sua ora d'arrivo a Messina?

4. — Il rappresentante di una fabbrica di stoffe ne ha venduto in un anno per L. 213756.

La sua provvigione essendo del 7 % quanto ha guadagnato in media mensilmente?

(La sua provvigione è stata 7/100 dell'importo delle sue vendite. Staccando le ultime due cifre di questo, con una virgola, lo si divide per 100. Poi, si moltiplichi per 7 e si divida per 12).

5. — Quanto dovrebbe vendere annualmente quel rappresentante, per avere un guadagno mensile di L. 1400?

(Nel problema precedente, col moltiplicare l'importo delle vendite per 7/100, si otteneva la provvigione.

In questo problema, inversamente, col dividere la provvigione per 7/100, si otterrà l'importo delle vendite).

PENDENZE

1. — Se un tratto di *carrozzabile* sale di 4 m. ogni cm., cioè ogni 100 cm., allora (senza ridurre ad «1 : 25» il rapporto «4 : 100»), si dice ch'esso ha la *pendenza* del

4 per 100

che si scrive: 4 %

2. — Similmente, se un tratto di *strada ferrata* sale di 6 mm. ogni m., cioè ogni 1000 mm., allora (senza ridurre a «3 : 500» il rapporto «6 : 1000»), si dice ch'esso ha la *pendenza* del

6 per 1000

che si scrive: 6 ‰

3. — Secondochè si tratta di strade *carrozzabili* o *ferrate*, la *pendenza* si calcola *per cento* o *per mille*.

4. — Percorrendo in un certo *verso* la strada ferrata tra due stazioni, essa *sale sempre*: ma in un primo tratto ha la *pendenza* del 5 ‰ e nel secondo ha la *pendenza* del 9 ‰.

Chiedo a Sveltini quale sia la *pendenza media* della strada ferrata tra quelle due stazioni.

Egli crede di dover calcolare la *media aritmetica* delle due *pendenze*, pensa che $(5 + 9) : 2 = 14 : 2 = 7$

e risponde che la *pendenza media* è del 7 ‰.

Non doveva rispondere così.

5. — Perchè non doveva rispondere così? — chiede Pierino.

— Perchè la sua risposta sarebbe stata giusta nel solo caso in cui i due tratti di strada avessero avuto *la stessa lunghezza*.

— Ed allora, come avrebbe dovuto rispondere?

— Avrebbe dovuto chiedermi la *lunghezza* di *ciascuno* dei due tratti di strada. Gli avrei detto che il *primo* tratto era lungo km. 7 ed il *secondo* km. 21.

6. — E poi? — insiste Pierino.

— Pensaci tu. Sai che il *primo* tratto ha la *pendenza* del 5 ‰. E perciò: di quanti m. sale ad ogni km., cioè ad ogni 1000 m.?

— Sale di 5 m. al km.

— Sai che è *lungo* 7 km. Sicchè: di quanti m. sale in tutto?

— *Sale* di m. $5 \times 7 = 35$.

— Ragiona similmente per il *secondo* tratto.

— La sua *pendenza* è del 9 ‰ cioè sale di 9 m. al km. Essendo *lungo* 21 km., in tutto esso *sale* di m.

$$9 \times 21 = 189.$$

— Dunque, *insieme*, i due tratti di strada salgono ...

— ... di m. $35 + 189 = 224$

— ... con un percorso complessivo...

— ... di km. $7 + 21 = 28.$

— Sicchè, *in media*, di quanti m. al km. sale la strada ferrata tra quelle due stazioni?

— *Sale* di m. $224 : 28 = 8.$

— E perciò quella strada ha la *pendenza media* dell'8 ‰, mentre Sveltini aveva creduto ch'essa fosse del 7 ‰.

7. — Quindi: se percorrendo una *strada ferrata* in un certo verso, essa *sale, senza mai ridiscendere*, allora *la sua pendenza media* è *il rapporto*, che ha per *conseguente* 1000 e per *antecedente* il *quoto* del *distivello degli estremi* misurato in m. e della *lunghezza della strada* misurata in km.

8. — La strada ferrata da Terni a Sulmona è lunga km. 164.

Terni è a 128 m. sul livello del mare e Sulmona a m. 348.

Ma la strada ferrata, che unisce queste due città, *sale sempre* da Terni a Sella di Corno, che si trova a 989 m. sul livello del mare, e poi *scende sempre* sino a Sulmona.

Chiedo a Sveltini quale sia *la pendenza media* della strada ferrata da Terni a Sulmona?

9. — Questa volta, egli si affretta a domandarmi la *lunghezza* di *ciascuno* dei due tratti di strada.

Lo accontento, informandolo che Sella di Corno dista 85 km. da Terni, il che gli permette di calcolare quanto disti da Sulmona.

Ma lo avverto che queste notizie gioverebbero soltanto a chi dovesse calcolare *la pendenza media* di *ciascuno* dei due tratti di strada, mentr'io gli ho proposto di calcolare *la pendenza media* di *tutta* la strada.

10. — Sveltini rimane confuso.

Anche nell'altro problema si trattava, come in questo, di calcolare *la pendenza media* di una strada composta di due tratti.

Se per risolver l'altro occorreva conoscere la *lunghezza* di *ciascuno* dei due tratti, come mai tale conoscenza era diventata inutile per risolver questo?

Gli spiego che, nell'enunciare l'altro problema, dapprima avevo dato soltato la *pendenza* di *ciascuno* dei due tratti. Occorreva quindi conoscere anche le loro *lunghezze*, per potere calcolare *il dislivello degli estremi* di *ciascuno* dei tratti e ricavarne *il dislivello totale* della strada.

Questa volta, invece, i dati del problema consentono di calcolare subito *i due dislivelli parziali.*

11. — Il *dislivello* fra due luoghi è eguale alla *differenza* tra le loro *altimetrie*, cioè tra le loro *altezze sul livello del mare.*

Ad es., *il dislivello* fra Terni e Sella di Corno è di m.

$$989 - 128 = 861$$

e quello fra Sella di Corno a Sulmona è di m.

$$989 - 348 = 541.$$

12. — Scusi — interrompe Sveltini. — Per trovare *il dislivello totale*, nell'altro problema abbiamo dovuto cercare anzitutto *i due dislivelli parziali.* Ma in questo problema mi pare che si poteva farne a meno.

— E come calcoleresti *il dislivello totale?*

— *Il dislivello* fra Terni e Sulmona è di m.

$$348 - 128 = 220.$$

— Certamente. Ma, invece, a noi occorre calcolare *la somma* dei *dislivelli parziali* dei *due tratti* in *contropendenza* che compongono la strada da Terni a Sulmona: la quale somma è m.

$$861 + 541 = 1402.$$

13. — Pierino alza la mano.

— Non sei persuaso? — gli chiedo.

— Andrà bene, ma non capisco: mi pare che abbia fatto come se i due tratti fossero *entrambi in salita* od *entrambi in discesa.*

— Precisamente — gli rispondo, con sua meraviglia.

— Allora — replica egli, con maggiore convinzione — è come se la strada da Terni a Sulmona fosse *sempre in salita*!

— No, — gli rispondo — perchè ricadresti nel calcolo sbagliato di Sveltini. Puoi dire, invece, che è come se si trattasse di una strada *sempre in salita*, che fosse *lunga* quanto quella da Terni

a Sulmona, ma che da Terni *salisse* di m. 1402, arrivando così, non a Sulmona, ma ad un luogo la cui *altimetria* fosse m.

$$128 + 1402 = 1530.$$

— Adesso ho capito e grazie — dice Pierino, rimettendosi a sedere.

14. — Ed allora, completiamo il nostro calcolo.

Poichè *la somma dei dislivelli* è m. 1402, su un percorso di km. 164, si conclude che, *in media*, ad ogni km. la strada ha un *dislivello* di m.

$$1402 : 164 = 8{,}55.$$

Quindi *la pendenza media* della strada ferrata da Terni a Sulmona è circa dell' 8,55 ‰.

15. — Per esercizio potete calcolare *la pendenza media* di *ciascuno* dei due tratti di strada.

E dico « pendenza media » perchè, quantunque la strada da Terni a Sella di Corno *salga sempre*, essa *sale variamente* nei numerosi *tratti parziali* successivi che la compongono ed i cui *estremi* sono indicati lungo il percorso, con le rispettive *pendenze*, da targhe infisse nel terreno: affinchè i macchinisti possano regolare la corsa.

Problemi

1. — La strada ferrata da Trento a Brennero, lunga km. 145, sale sempre: da m. 193 sul livello del mare a m. 1370.
Calcolare la sua pendenza media.

2. — Pistoia e Bologna distano da Roma km. 350 e km. 449.
Calcolare la pendenza media della strada ferrata che unisce queste due città, salendo da m. 63 sul livello del mare (Pistoia) a m. 616 (Pracchia) e ridiscendendo a m. 45 (Bologna).

3. — La strada ferrata Trento Venezia, lunga km. 157, sale da m. 192 sul mare (Trento) a m. 468 (Pèrgine), discende a m. 452 (Calceràmica), risale a m. 467 (Caldonazzo) e ridiscende a m. 4 (Venezia),
Calcolare la sua pendenza media.

4. — Calcolare la pendenza media di ciascuno dei tre tratti, in contropendenza, che compongono la strada ferrata Postumia Trieste, e calcolare la pendenza media di tutta la strada.

Ecco le altimetrie (in m.) e le distanze progressive (in km.) delle stazioni estreme e delle stazioni separatrici:

Postumia	m. 582 . .	km. 0
Prestanègo.	» 536 . .	» 7
S. Pietro del Carso . . .	» 578 . .	» 13
Trieste	» 3 . .	» 82

§ 2. — Proporzione

1. — Ogni *eguaglianza di due rapporti* si chiama anche: *proporzione.*

2. — Ad es., riducendo ai minimi termini ciascuno dei due rapporti « 6 : 9 » e « 10 : 15 »

entrambi diventano 2 : 3

e perciò 6 : 9 = 10 : 15.

Questa è una *proporzione.*

Anzichè « 6 diviso 9 è eguale a 10 diviso 15 »

la si legge: « 6 *sta a* 9 *come* 10 *sta a* 15 ».

3. — Risulta che: *quattro* numeri *naturali* formano una *proporzione* (nell'*ordine* in cui sono dati) allorchè, *riducendo ai minimi termini* il *rapporto* del *primo* al *secondo* ed il *rapporto* del *terzo* al *quarto*, si ottiene *il medesimo risultato.*

4. — Ad es., formano una *proporzione*

30, 40, 130, 140?

No, perchè 30 : 40 = 3 : 4 e 130 : 140 = 13 : 14.

Formano una *proporzione*

15, 65, 21, 91?

Si, perchè 15 : 65 = 3 : 13 e 21 : 91 = 3 : 13.

E perciò 15 : 65 = 21 : 91

cioè: « 15 *sta a* 65 *come* 21 *sta a* 91 ».

5. — In questo es., i numeri 15 e 21, che sono gli *antecedenti* dei due *rapporti*, si chiamano gli ***antecedenti*** anche della *proporzione*.

Ed i numeri 65 e 91, che sono i *conseguenti* dei due *rapporti*, si chiamano i ***conseguenti*** anche della *proporzione*.

6. — In ogni *proporzione*, secondochè *uno* dei *due rapporti* è *riducibile* ad una frazione *propria* od *impropria*, lo stesso deve accadere dell'*altro* (altrimenti, non sarebbero *eguali*).

In altri termini:

in ogni proporzione, secondochè un antecedente è minore o maggiore del suo conseguente, anche l'altro antecedente è minore o maggiore del suo conseguente.

Ad es., nell'ultima proporzione:

« 15 è *minore* di 65 » e « 21 è *minore* di 91 ».

7. — Allorchè *quattro* numeri sono *ordinati*, il *primo* e l'*ultimo* si dicono gli ***estremi***, gli altri due si chiamano i ***medi***.

Nell'es., 15 e 91 sono gli *estremi*, 65 e 21 sono i *medi*.

8. — Si rammenti che *due frazioni* sono *eguali*, allorchè risultano *eguali* i *prodotti* del *numeratore* dell'*una* per il *denominatore* dell'*altra*.

Ad es., 4/14 = 6/21

perchè: $4 \times 21 = 84$ e $6 \times 14 = 84$.

Scrivendo in altro modo,

4 : 14 = 6 : 21

cioè: « 4 sta a 14 come 6 sta a 21 ».

Per verificare questa proporzione, ho confrontato il *prodotto* degli *estremi*, 4 e 21, col *prodotto* dei *medi*, 14 e 6 (ovvero 6 e 14).

9. — Si conclude che:

quattro numeri ordinati formano una proporzione allorchè il prodotto dei medi è eguale al prodotto degli estremi.

10. — Vi ho insegnato *due modi* per *verificare* se *quattro* numeri formano una *proporzione*, perchè vi serviate dell'uno o dell'altro, secondochè riesce più comodo.

Ad es., se i quattro numeri sono

5/8 3/7 7/12 2/5

il prodotto irriducibile, tanto degli *estremi* quanto dei *medi*, è 1/4.

Quindi, (5/8) : (3/7) = (7/12) : (2/5)

cioè: « 5/8 sta a 3/7 come 7/12 sta a 2/5 ».

11. — In ogni proporzione, *i conseguenti* devono essere entrambi *diversi da zero*: perchè hanno l'ufficio di *divisori*.

Non così *gli antecedenti*, che hanno ufficio di *dividendi*.

Ma, se *un antecedente* è *zero*, anche il *rapporto* cui esso appartiene è *zero*. Perciò anche *l'altro rapporto* dev'essere *zero* e quindi anche *l'altro antecedente* è *zero*.

E, se *ciascuno* degli *antecedenti* è *zero*, allora la *proporzione* sussiste *quali che siano i conseguenti*: perchè ciascuno dei due *rapporti* è *zero*, od anche: perchè ciascuno dei due *prodotti* (degli *estremi* e dei *medi*) è *zero*.

Ad es., 0 : 5 = 0 : 7

cioè: « 0 sta a 5 come 0 sta a 7 ».

Chiarito questo caso speciale, mi occuperò soltanto di *proporzioni* i cui quattro termini sono *tutti diversi da zero.*

12. — Dati *tre termini di una proporzione* ed il *posto* assegnato a ciascuno di essi, si può sempre calcolare ***il termine incognito*** (cioè: non conosciuto).

Provvisoriamente, giova *rappresentare il termine incognito* con una ***lettera***, ad es. x.

Così facendo, si ha il vantaggio di poter sùbito *indicare* la *proporzione* che si tratta di *completare*; e di potervi precisare, senza parole il *posto* assegnato a ciascuno dei *tre termini dati.*

13. — Ad es., si debba trovare ***il quarto proporzionale*** dopo i numeri 12 15 28.

Indicando con x il termine incognito, si tratta di calcolarlo in modo che sussista la *proporzione*

$$12 : 15 = 28 : x.$$

Poichè *il prodotto dei medi* è

$$15 \times 28 = 420$$

dev'essere 420 anche *il prodotto degli estremi.*

Poichè *uno degli estremi* è 12, *l'altro estremo* dev'essere

$$420 : 12 = 35.$$

Dunque, *il quarto proporzionale* (che provvisoriamente avevo indicato con la lettera x) è 35, e *la proporzione* va *completata* così:

$$12 : 15 = 28 : 35.$$

14. — Le due operazioni occorrenti per *completare* la *proporzione*

$$12 : 15 = 28 : x$$

si possono *indicare* sùbito così:

$$x = \frac{15 \times 28}{12}.$$

Istessamente si *completerebbe* la *proporzione*

$$x : 15 = 28 : 12.$$

15. — In conclusione:

per calcolare un estremo di una proporzione, basta dividere il prodotto dei medi per l'altro estremo.

16. — Similmente:

per calcolare un medio di una proporzione, basta dividere il prodotto degli estremi per l'altro medio.

17. — Ma non si trascurino ***le semplificazioni preventive.***

Ad es., si voglia *completare* la *proporzione*

$$48 : x = 64 : 68.$$

Immediatamente:

$$x = \frac{48 \times 68}{64} = \frac{3 \times 68}{4} = 3 \times 17 = 51$$

e *la proporzione* va *completata* così:

$$48 : 51 = 64 : 68.$$

18. — Può darsi che una *proporzione* abbia *i medi eguali* (fra loro).

Ad es., $4 : 6 = 6 : 9$

perchè ciascuno dei due rapporti è riducibile a 2/3, od anche: perchè *il prodotto degli estremi* è 36, come *il prodotto dei medi*, che in questo caso è *il quadrato del medio* (ripetuto).

19. — Allorchè *i medi* sono *eguali* (fra loro), si suol dire che *la proporzione* è ***continua.***

In questo caso, *l'ultimo termine* della *proporzione* si chiama: ***il terzo proporzionale*** *dopo i primi due*, sottintendendo così che *il medio va ripetuto.*

E questo si chiama: ***il medio proporzionale*** *fra i due estremi.*

20. — Sicchè:

per calcolare il terzo proporzionale dopo due numeri, basta dividere il quadrato del medio per l'estremo dato.

21. — Ma non si trascurino *le semplificazioni preventive.*

Ad es., si debba trovare *il terzo proporzionale* dopo 64 e 48, cioè il numero x tale che:

$$64 : 48 = 48 : x.$$

Si ha sùbito:

$$x = \frac{48^2}{64} = \frac{48^2}{8^2} = \left(\frac{48}{8}\right)^2 = 6^2 = 36$$

e la *proporzione* va *completata* così:

$$64 : 48 = 48 : 36.$$

Esercizi

I. — In questo gruppo di Esercizi, il numero cercato è sempre un numero *naturale.*

Calcolare *il quarto proporzionale* dopo:

1. 91 52 35 — 2. 3/4 5/18 13 + 1/2
3. 0,57 133 0,03 — 4. 0, (201) 0, (268) 3

(Ai numeri ***decimali periodici*** è prudente di sostituire le loro ***generatrici.***)

Calcolare *il terzo proporzionale* dopo:

5. 3 e 12 — 6. 1/20 e 3/2 — 7. 0,0289 e 1,19.

II. — In quest'altro gruppo di Esercizi, il numero cercato non è mai un numero naturale: gli si dia forma di numero ***decimale,*** finito o periodico.

Calcolare *il quarto proporzionale* dopo:

1. 78 9 91 — 2. 1 + 1/2 1 + 1/3 1 + 1/4
3. 0,6 0,0625 4,62 — 4. 2,4 0,(592) 0,61 (36)

Calcolare *il terzo proporzionale* dopo:

5. 7 ed 8 — 6. 1 + 2/5 e 2 + 2/5 — 7. 10,83 e 0,57.

Il calcolo di una speranza

1. — L'anno scorso Lorenzo ha ricevuto da un fabbricante l'offerta di assumerne la rappresentanza, con la provvigione del 5 % ovvero con lo stipendio mensile di L. 600 e la provvigione del 3 %

Egli ha accettato, scegliendo la provvigione del 5 %.

Su quale ***speranza*** ha fondato la sua scelta?

2. — Come si fa a *calcolare* una ***speranza*** ? — domanda Pierino.

— In questo caso, il calcolo è possibile. Supponi che, in un certo mese. Lorenzo venda per l'appunto tante merci, per cui gli sarebbe ***indifferente*** aver scelto l'una o l'altra delle due proposte del fabbricante. Gli è quanto supporre che lo ***stipendio*** di L. 600 lo avrebbe ***compensato esattamente*** della ***differenza di provvigioni.*** Qual è la differenza delle due percentuali?

— La differenza tra il 5% ed il 3% è il 2%.

— Si tratta dunque di calcolare L. x di merci che diano L. 600 di provvigione, come se L. 100 di merci dessero L. 2 di provvigione.

— Ed allora — dice Pierino — dovrà sussistere la proporzione

$$x : 100 = 600 : 2$$

da cui $$x = (100 \times 600) : 2 = 30{\cdot}000$$

3. — Ed infatti, vendendo per L. 30·000 al 5 %, quanto spetta a Lorenzo?

— Spettano L.

$$(30{\cdot}000 \times 5) : 100 = 1500.$$

— E quanto avrebbe avuto, invece, al 3 %?

— Avrebbe avuto L.

$$(30{\cdot}000 \times 3) : 100 = 900.$$

— Ma, in questo caso, Lorenzo avrebbe anche ricevuto lo stipendio di L. 600. Sicchè, in tutto, ...

—... avrebbe ricevuto L.

$$900 + 600 = 1500$$

— ... come nell'altro modo.

4. — Ma se, in un altro mese, Lorenzo vendesse soltanto per L. 20·000, quanto gli spetterebbe?

— Gli spetterebbero L.

$$(20{\cdot}000 \times 5) : 100 = 1000.$$

— E quanto avrebbe avuto, invece, nell'altro modo?

— Avrebbe avuto L.

$$600 + [(20{\cdot}000 \times 3) : 100] = 600 + 600 = 1200.$$

— Sicchè, in questo caso, la sua scelta gli riuscirebbe *dannosa*.

5. — Ma quanto spetterebbe a Lorenzo, se in un mese egli riuscisse a vendere per L. 40·000?

— Gli spetterebbero L.

$$(40{\cdot}000 \times 5) : 100 = 2000.$$

— E quanto avrebbe avuto nell'altro modo?

$$600 + [(40000 \times 3) : 100] = 600 + 1200 = 1800.$$

— Sicchè, in questo caso, la sua scelta gli riuscirebbe *vantaggiosa*.

6. — Ed ormai ritengo tu abbia capito che la scelta fatta da Lorenzo gli riuscirà *dannosa* o *vantaggiosa*, secondochè *mensilmente* egli riesce a vendere per *meno* o *piú* di L. 30·000 *in media*: perchè non si vende egualmente ogni mese.

L' importante per Lorenzo è di riuscire *annualmente* a vendere almeno...

—... per L. $30{\cdot}000 \times 12 = 360{\cdot}000$

—... *in media*: perchè non si vende egualmente ogni anno.

Possiamo dunque concludere che Lorenzo, nello scegliere fra le due proposte del fabbricante, ha fondato la sua decisione sulla *speranza* di vendere *in media* per *almeno* L. 360·000 all'*anno*.

7. — Qualche tempo fa, Lorenzo mi ha raccontato che, nel primo anno, era riuscito a vendere per L. 300·000.

— Allora, sarà stato di cattivo umore — dice Pierino, mostrando d'aver capito.

— Tutt'altro! Mi ha soggiunto che, per il primo anno, non aveva sperato di far tanto; ma che in questo, con la clientela che s'è formato, confida di vendere almeno per mezzo milione.

§ 3. — Trasformazioni

1. — *Da una proporzione si ricava un' altra proporzione, scambiando fra loro gli estremi*, ovvero *i medi*, ovvero *i medi e gli estremi.*

Infatti, così facendo, continua a sussistere *la eguaglianza dei due prodotti*, degli *estremi* e dei *medi.*

2. — Sicchè, ad es., basta aver verificato *la prima* delle *proporzioni* seguenti, per esser certi della verità delle *altre tre.*

$$3 : 21 = 2 : 14$$
$$14 : 21 = 2 : 3$$
$$3 : 2 = 21 : 14$$
$$14 : 2 = 21 : 3$$

3. — *Da una proporzione si ricava un' altra proporzione, scambiando fra di loro i due rapporti.*

E questo perchè *il segno di eguaglianza* significa: « *è lo stesso che* ».

4. — Ad es., dalle *quattro proporzioni* di poc'anzi si ricavano queste *altre quattro*:

$$2 : 14 = 3 : 21$$
$$2 : 3 = 14 : 21$$
$$21 : 14 = 3 : 2$$
$$21 : 3 = 14 : 2$$

5. — Si osservi che dalla prima di queste si ricavano le altre tre, *scambiando* fra loro *i medi*, ovvero *gli estremi*, ovvero *i medi e gli estremi.*

6. — Inoltre, dalla prima di quelle

$$3 : 21 = 2 : 14$$

si può ricavare subito l'ultima di queste

$$21 : 3 = 14 : 2$$

scambiando fra loro *antecedente* e *conseguente* in ciascuno dei due rapporti.

Si suol accennare a questa *trasformazione* con la parola: ***invertendo.***

7. — Data una *proporzione,* ad es.,

$$357 : 170 = 21 : 10$$

la *trascrivo* in forma di *eguaglianza di due frazioni*:

$$357/170 = 21/10.$$

Aggiungendo 1 ad ambo i membri, ottengo:

$$\frac{357}{170} + 1 = \frac{21}{10} + 1$$

da cui

$$\frac{357 + 170}{170} = \frac{21 + 10}{10}$$

che *trascrivo* in forma di *proporzione*:

$$(357 + 170) : 170 = (21 + 10) : 10.$$

8. — Risulta che:

da una proporzione si ricava un' altra proporzione, aggiugendo a ciascun antecedente il suo conseguente.

Eseguendo, ottengo la nuova proporzione:

$$527 : 170 = 31 : 10.$$

9. — Inversamente:

togliendo 1 ad ambo i membri di questa proporzione, ottengo:

$$\frac{527}{170} - 1 = \frac{31}{10} - 1$$

da cui

$$\frac{527 - 170}{170} = \frac{31 - 10}{10}$$

cioè: $(527 - 170) : 170 = (31 - 10) : 10.$

da cui, eseguendo, ritorno alla prima proporzione.

10. — Risulta che:

da una proporzione (in cui ogni antecedente sia maggiore del suo conseguente) ***si ricava un'altra proporzione, togliendo da ciascun antecedente il suo conseguente.***

11. — Non so perchè si usi accennare a queste ***due trasformazioni*** con le parole « componendo » e « dividendo ».

Mi sembrano più appropriate le parole: « ***addizionando*** » e « ***sottraendo*** ».

12. Dalla proporzione

$$35 : 21 = 15 : 9$$

addizionando:

$$(35 + 21) : 21 = (15 + 9) : 9$$

od invece *sottraendo*:

$$(35 - 21) : 21 = (15 - 9)$$

Dalle due nuove proporzioni, *scambiando i medi*:

$$(35 + 21) : (15 + 9) = 21 : 9$$
$$(35 - 21) : (15 - 9) = 21 : 9$$

e dal *confronto* di queste due:

$$(35 + 21) : (15 + 9) = (35 - 21) : (21 - 9)$$

da cui, *scambiando i medi*:

$$(35 + 21) : (35 - 21) = (15 + 9) : (15 - 9).$$

13. — Si conclude che, in ogni proporzione (in cui ciascun antecedente sia maggiore del suo conseguente): *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza* come *la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

Eseguendo, ottengo la nuova proporzione:

$$56 : 14 = 24 : 6.$$

Si usa accennare a questa *trasformazione* con la frase « componendo e dividendo », cui preferisco la frase: « ***addizionando e sottraendo*** ».

14. — Dalla proporzione

$$65 : 26 = 25 : 10$$

scambiando i medi:

$$65 : 25 = 26 : 10$$

da cui, *addizionando*:

$$(65 + 25) : 25 = (26 + 10) : 10$$

da cui, *scambiando i medi*:

$$(65 + 25) : (26 + 10) = 25 : 10.$$

15. — Si conclude che:
in ogni proporzione, la samma degli antecedenti sta alla

somma dei conseguenti come uno qualunque degli antecedenti sta al suo conseguente.

Eseguendo, ottengo:

$$90 : 36 = 25 : 10$$

od anche, *confrontando* con la prima:

$$90 : 36 = 65 : 26.$$

16. — Ritroviamo così, con altro linguaggio, il fatto già rilevato che:

se due frazioni sono eguali fra loro, esse sono pure eguali alla frazione che se ne ricava, addizionando separatamente numeratori e donominatori (come alcuni distrattoni fanno, credendo di *addizionare* le *due frazioni*).

Sicchè, l'ultimo es. si può anche enunciare così: *le frazioni* 65/26 e 25/10, essendo *eguali* fra loro, sono pure *eguali* alla *frazione*

$$\frac{65 + 25}{26 + 10}, \text{ cioè } \frac{90}{36}.$$

Esercizi

Si trovi il numero x tale che:

1. —	$(20 - x) : x = 7 : 3$	*(Addizionando, ecc.)*
2. —	$(24 - x) : x = 5 : 3$	
3. —	$(60 + x) : x = 7 : 5$	*(Sottraendo, ecc.)*
4. —	$(56 + x) : x = 9 : 5$	
5. —	$(21 - x) : 5 = x : 2$	*(Scambiando i medi, ecc.)*
6. —	$(20 + x) : 7 = x : 2$	
7. —	$5 : x = 4 : (27 - x)$	*(Scambiando gli estremi, ecc.)*
8. —	$6 : x = 7 : (x + 10)$	
9. —	$x : (33 - x) = 7 : 4$	*(Invertendo, ecc.)*
10. —	$x : (x + 35) = 5 : 4$	

CAPITOLO IX

PROPORZIONALITÀ

§ 1. — Proporzionalità diretta

1. — *Due numeri* si dicono ***direttamente proporzionali*** (o, brevemente, *proporzionali*) ad altri *due numeri*, allorchè, *nell'ordine dato*, essi formano una *proporzione*.

E lo stesso si dice quando, invece di ciascuna *coppia di numeri*, si pensano *due lunghezze*, o *due aree*, o *due volumi*, o *due pesi*, o *due valori*, ecc., ch' essi (due numeri) *misurino* rispetto ad una *stessa unità*.

2. — Ad es., scelti comunque *tre numeri razionali*, come 11,4 10,5 7,8

non occorre calcolare i prodotti

$$11{,}4 \times 7{,}8 \quad \text{e} \quad 10{,}5 \times 7{,}8$$

per concludere ch' essi sono *proporzionali* ad

$$11{,}4 \quad \text{e} \quad 10{,}5$$

cioè che $(11{,}4 \times 7{,}8) : (10{,}5 \times 7{,}8) = 11{,}4 : 10.5$.

3. — Si può pensare che quei due prodotti indichino *le aree* di *due parallelogrammi*, di cui 11,4 e 10,5 siano *le basi* e di cui 7,8 sia *l' altezza* corrispondente (*eguale* nei due parallelogrammi).

Si conclude che:

le aree di due parallelogrammi di eguale altezza sono proporzionali alle rispettive basi.

Ovvero, pensando che 11,4 e 10,5 siano *le altezze* corrispondenti alla *base* 7,8 (*eguale* nei due parallelogrammi), si conclude che:

le aree di due parallelogrammi di egual base sono proporzionali alle rispettive altezze.

4. — Come caso particolare, si rileggano i due enunciati cambiandovi « parallelogrammi » in *rettangoli.*

5. — Si può invece pensare che quei due prodotti indichino *le aree* di *due triangoli*, di cui 11,4 e 10,5 siano le *basi* e di cui 15,6 (cioè: il doppio di 7,8) sia *l'altezza* corrispondente (*eguale* nei due triangoli).

Si rileggano queste righe, scambiandovi fra loro le parole *base* ed *altezza.*

E poi si rileggano i due enunciati di poc' anzi, cambiandovi « parallelogrammi » in *triangoli.*

6. — Si può anche pensare che quei due prodotti indichino *i volumi* di *due parallelepipedi rettangoli*, di cui 11,4 e 10,5 siano *le aree* delle *basi* e di cui 7,8 sia *l'altezza* corrispondente (*eguale* nei due parallelepipedi).

Sicchè:

i volumi di due parallelepipedi rettangoli, le cui basi hanno aree eguali, sono proporzionali alle rispettive altezze.

7. — Quante cose ha ricavato da una sola proporzione! — esclama Pierino.

— E non ho ancora finito. Giova sapere che *il peso specifico* del *piombo* è 11,4 dell'*argento* è 10,5 e del *ferro* è 7,8.

12. — Il modo in cui abbiamo risolto questo problema si suol chiamare: **regola del tre.**

Come sapete (o saprete), *I tre moschettieri* hanno fornito il titolo al celebre romanzo di Alessandro Dumas, ma poi sono diventati *quattro*; ed il quarto, D'Artagnan, è il personaggio più importante e di cui l'autore parla prima d'ogni altro.

Similmente, nel nostro problema *i numeri dati* sono *tre*; ma, per tradurlo in una *proporzione*, bisogna sùbito adoperare *il quarto numero*, cioè quello cercato, rappresentandolo provvisoriamente con una *lettera*, ad es. x.

13. — Nel caso nostro, senza perder tempo a scrivere la proporzione, si poteva risolverla sùbito così:

$$x = 2475 \times \frac{90}{33}$$

e poi eseguire e trasformare come si è fatto. (1)

Da ciò la *regola*, che enuncia in altro modo una proprietà a voi nota delle proporzioni:

il primo termine di una proporzione è eguale al secondo moltiplicato per il rapporto degli altri due.

14. — Pierino alza la mano.

— Che cosa desideri? — gli chiedo?

— Mi piacerebbe sapere quanti km. all'ora percorreva quel treno.

---

(1) Si poteva ragionare altrimenti così:

se quel treno impiega 2475_s a percorrere 33 km., allora a percorrere *un solo* km. impiega *secondi*

$$2475 : 33 = 75$$

e quindi a percorrere 90 km. impiega *secondi*

$$75 \times 90 = 6750.$$

Il metodo ora adoperato si chiama: **riduzione all'unità.**

Quello che tu proponi è un altro **problema del tre,** come diremo brevemente per dire «problema che si risolve con la regola del tre».

Ed ecco il problema:

se quel treno ha percorso 33 km. in 2475_s, quanti km. percorrerà in 3600_s (di cui si compone un'ora)?

La sola cosa cui bisogna porre attenzione è di *scrivere ordinatamente le due coppie proporzionali.*

Ad es., sottintendendo le unità di misura e rappresentando con x il numero cercato, il nuovo problema è indicato chiaramente in questo *prospetto.*

distanze	tempi
x	3600
33	2475

Quindi

$$x = 33 \times \frac{3600}{2475}$$

da cui, la frazione essendo semplificabile per 9 e per 25,

$$x = 33 \times \frac{16}{11} = \frac{33}{11} \times 16 = 3 \times 16 = 48.$$

Sicchè: quel treno percorreva 48 km. all'ora. (1)

15. — Altri esempi di *proporzionalità dirette* saranno forniti incidentalmente da alcuni *problemi* seguenti.

---

(1) Con *la riduzione all'unità*, si ragiona così:

se quel treno percorre 33 km. in 2475_s, allora in *un solo* secondo percorre km $33/2475 = 1/75$

e quindi in 3600_s percorre km.

$$(1/75)\ 3600 = 3600/75 = 48.$$

Dai due esempi risulta che il *metodo della proporzionalità* è più rapido di quello della *riduzione all'unità.*

Problemi del tre, diretti

AVVERTENZA. — Anzitutto si indichi ciascun problema da 1 a 12 in un prospetto simile a quello di poc'anzi.

Poi, senza scrivere la proporzione, la si risolva: non trascurando le semplificazioni.

Dopo ciò, si risponda alla domanda che segue ciascuno di quei problemi. La risposta suggerirà un altro modo di risoluzione, che sarà utile dire, anche senza eseguire.

1. — Le aree di due rettangoli, aventi la medesima altezza, sono cm². 357 e cm². 595.

Sapendo che la base del primo è cm. 20,1 si calcoli quella del secondo.

(Che cosa rappresenta il quoto «357 : 20»?)

2. — Le aree di due triangoli, di egual base, sono cm². 413 e cm². 767.

Sapendo che l'altezza del primo è cm. 11,9 si calcoli quella del secondo.

(Che cosa rappresenta il quoto «413 : 11,9»?)

3. — I volumi di due parallelepipedi rettangoli, le cui basi hanno aree eguali, sono cm³. 568 e cm³. 781.

Sapendo che l'altezza del secondo è cm. 20,9 si calcoli quella del primo.

(Che cosa rappresenta il quoto «781 : 20,9»?)

4. — Che peso netto di frumento contiene un sacco, che conteneva un quintale netto di zucchero?

(Il peso specifico dello zucchero è 1,6.

Quello del frumento oscilla fra 0,72 e 0,78.

Secondochè nel calcolo si adopera 0,72 o 0,78 la risposta dev'essere preceduta da «almeno» o «tutt'al più».

Risolto il problema, si dica che cosa rappresenta il quoto «100 : 1,6».)

5. — Ho due campioni di legno, aventi lo stesso volume: l'uno di bosso d'Olanda pesa g. 58,1 e l'altro d'ebano pesa g. 49,8.

Sapendo che il peso specifico di quel bosso d'Olanda è 1,33 vorrei sapere quale sia il peso specifico di quell'ebano.

(La curiosità è giustificata, perchè il peso specifico dell'ebano oscilla fra 1,12 ed 1,21.

Che cosa rappresenta il quoto «58,1 : 1,33»?)

6. — Un droghiere ha pesato una damigiana piena di olio di mandorle, l'ha ripesata quand'è rimasta vuota e l'ha pesata ancora dopo averla riempita di olio di lino.

Dal primo e dal terzo peso togliendo separatamente il secondo, egli ha calcolato i pesi netti: kg. 12,838 per l'olio di mandorle e kg. 13,146 per l'olio di lino.

Egli sa che il peso specifico dell'olio di mandorle è 0,917 e vuol calcolare quello dell'olio di lino.

(Che cosa rappresenta il quoto «12,838 : 0,917»?)

7. — Una pezza di tela, lunga m. 28, costa L. 152,60.

Quanto costa un'altra pezza della medesima tela, lunga m. 32?

(Che cosa rappresenta il quoto «152,60 : 28»?)

8. — Una pezza di tela, a L. 4,80 il m., costa L. 129,60.

Quanto costa un'altra pezza di tela, della medesima lunghezza, a L. 6 il m.?

(Che cosa rappresenta il quoto «129,60 : 4,80»?)

9. — Giovanni ha comperato due pezze di tela, della stessa lunghezza, pagandole L. 104,40 e L. 121,8.

Egli rammenta che la prima costava L. 3,60 il m.

Aiutatelo a calcolare quanto al m. costava la seconda.

(Che cosa rappresenta il quoto «104,40 : 3,60»?)

10. — Francesco ha comperato due pezze di tela, della medesima qualità, pagandole L. 140,40 e L. 156.

Egli rammenta che la prima era lunga m. 27.

Aiutatelo a calcolare quant'era lunga la seconda.

(Che cosa rappresenta il quoto «140,40 : 27»?)

11. — Una pezza di tela, alta cm. 60, costa L. 87,50.

Quanto costerà un'altra pezza di tela, eguale alla prima per qualità e lunghezza, ma alta cm. 72?

(Che cosa rappresenta il quoto «87,50 : 60»?)

12. — Una squadra di operai deve trasportare 696 m³. di terra.

Quanto tempo impiegherà, se nei primi tre giorni ne ha trasportato 87 m³.?

(Si può rispondere con un numero di «giorni», sottintendendo «di lavoro»; ovvero di «settimane», sottintendendo «di 6 giorni di lavoro».

Che cosa rappresenta il quoto «87 : 3»?)

13. — Per calcolare l'altezza di un campanile, misuro la lunghezza della sua ombra e trovo ch'essa è m. 36.

Appoggio verticalmente sul terreno un bastoncino lungo 80 cm. e trovo che la sua ombra è 60 cm.

(Se volete fare il calcolo voi, sappiate che: nello stesso luogo e nel medesimo istante, le altezze di due corpi sono proporzionali alle lunghezze delle loro ombre.)

14. — Un treno diretto parte da Milano alle 18.5 avviato a Genova. Senza alcuna fermata intermedia, esso deve arrivare a Voghera alle 19.7.

A che ora attraverserà la stazione di Pavia?

(Le distanze da Milano sono: km. 36 sino a Pavia e km. 62 sino a Voghera.

In altri termini: se un treno impiega . . . minuti a percorrere 62 km., quanti minuti impiega a percorrere 36 km.?

Naturalmente, si farà il calcolo come se il treno procedesse con moto uniforme.)

15. — Aprendo completamente il rubinetto dell'acqua fredda che alimenta la vasca da bagno, riempio una brocca di 3 litri in 20 secondi e poi riempio la vasca in 23 minuti.

Qual è la capacità della vasca?

16. — Desidero sapere quanti giri faccia in un'ora una ruota d'una macchina e quanto tempo impieghi a fare 1000 giri.

A questo scopo, prima che la macchina sia messa in moto, faccio un segno colorato sull'orlo della ruota.

Mentre la macchina è in moto, conto 40 passaggi del segno colorato: frattanto, sono trascorsi 25 secondi.

Mentalmente: quanti giri in 5 secondi? in un minuto? in un'ora?

Inoltre, per fare 1000 giri: quante volte 5 secondi? quanti secondi? quanti minuti e quanti secondi?)

17. — A mezzogiorno ho regolato l'orologio del salotto. In 4 minuti (primi), il pendolo ha fatto 241 oscillazioni complete.

Che ora segnerà l'orologio a mezzanotte?

A che ora l'orologio segnerà mezzanotte?

(Un'oscillazione completa del pendolo, andata e ritorno, dovrebbe durare un secondo.

La prima questione si può risolvere mentalmente, rispondendo alle seguenti domande:

quanto ritarda l'orologio in 4 minuti? in 4 ore? in 12 ore?

In altro modo: se l'orologio segna 241 secondi mentre ne trascorrono 240, che ora segnerà quando saranno trascorse 12 ore?

$$x : 12 = 241 : 240.$$

Ed allora la seconda questione si può enunciare così: se in 240 secondi l'orologio ne segna 241, in quante ore ne segnerà 12?

$$y : 12 = 240 : 241$$

dove il numero incognito è indicato con y, per non confonderlo con l'x di poc'anzi.

Tanto x quanto y si presenteranno in forma di frazione impropria di ore, che bisogna trasformare: x in ore e minuti, ed y in ore, minuti, secondi e frazione propria di secondo.)

SCALE TERMOMETRICHE

1. — Sulla tavoletta di un termometro sono segnate due scale; a sinistra la *centigrada* o di *Celsius* e a destra la *ottantigrada* o di *Réaumur*.

A 0° e 100° (centigradi) corrispondono 0^R ed 80^R (gradi Réaumur od abbreviatamente: *Réaumur*).

Quanti Réamur corrispondono a 20°?

Quanti centigradi corrispondono a 12^R?

2. — In America viene adoperata la scala termometrica di *Fahrenheit*.

A 0° e 100° (centigradi) corrispondono 32^F e 212^F (gradi Fahrenheit od abbreviatamente: *Fahrenheit*).

Sicchè: dello stesso intervallo, Celsius ha fatto 100 parti e Fahrenheit ne ha fatto

$$212 - 32 = 180.$$

Quanti centigradi corrispondono a 95^F?

Quanti Fahrenheit corrispondono a 10°?

(Si risolvano le proporzioni:

$$x : 100 = (95 - 32) : 180$$
$$(y - 32) : 180 = 10 : 100.$$

Calcolato «$y - 32$», basterà aggiungergli 32 per trovare y.)

3. — Quanti Réaumur corrispondono a 122^F?

Quanti Fahrenheit corrispondono a 20^R?

(Si scrivano e si risolvano proporzioni analoghe alle precedenti, cambiandovi 100 in 80.)

§ 2. — Proporzionalità inversa

1. — *Due numeri* si dicono ***inversamente proporzionali*** ad altri *due numeri*, allorchè, *nell'ordine dato*, il *rapporto* di una coppia è *eguale* al *rapporto inverso* dell'altra coppia.

E lo stesso si dice quando, invece di ciascuna *coppia di numeri*, si pensano *due lunghezze*, o *due aree*, o *due volumi*, o *due pesi*, o *due valori*, ecc., ch'essi (due numeri) *misurino* rispetto ad una *stessa unità*.

2. — Ad es., le basi di due rettangoli, aventi la stessa area, siano cm. 8,9 e cm. 2,67.

L'altezza del primo sia cm. 2,1.

Quale dev'essere l'altezza del secondo?

3. — L'area del primo rettangolo è cm^2.

$$8{,}9 \times 2{,}1 = 18{,}69$$

e quindi l'altezza del secondo è cm.

$$18{,}69 : 2{,}67 = 7.$$

4. — L'eguaglianza di due prodotti, ad es.,

$$8{,}9 \times 2{,}1 = 2{,}67 \times 7$$

si può trasformare nella proporzione:

$$8{,}9 : 2{,}67 = 7 : 2{,}1$$

in cui sono adoperati come *estremi* i due fattori d'un prodotto e come *medi* i due fattori dell'altro.

5. — Si conclude che:

in due parallelogrammi aventi la stessa area, le *basi* stanno fra loro come l'*altezza del secondo* sta all'*altezza del primo*.

Più brevemente:

in due parallelogrammi aventi la stessa area, le basi sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze.

6. — La stessa eguaglianza si poteva anche trasformare nella proporzione

$$2{,}1 : 7 = 2{,}67 : 8{,}9$$

per concludere che:

in due parallelogrammi aventi la stessa area, le altezz e sono inversamente proporzionali alle rispettive basi.

7. — Come caso particolare, si rileggano i due enunciati cambiandovi « parallelogrammi » in *rettangoli*.

8. — Or dunque:

in due prodotti eguali, i moltiplicandi sono inversamente proporzionali ai rispettivi moltiplicatori.

9. — Ad es., si può pensare che i due prodotti considerati indichino le *aree raddoppiate* di *due triangoli*, essendone i moltiplicandi le *basi* ed i moltiplicatori le rispettive *altezze*.

Si conclude che:

in due triangoli aventi la stessa area, le altezze sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze.

10. — Ovvero, si può pensare che i moltiplicandi siano le *aree delle basi* di *due parallelepipedi rettangoli* e che i moltiplicatori ne siano le rispettive *altezze*; sicchè i due prodotti eguali ne indichino i *volumi*.

E perciò:

in due parallelepipedi rettangoli aventi lo stesso volume, le aree delle basi sono inversamente proporzionali alle rispettive altezze.

11. — Poichè 8,9 e 2,67 sono *i pesi specifici* del *rame*

(martellato) e dell'*alluminio* (laminato), cm^3. 2,1 di rame pesano g.

$$8{,}9 \times 2{,}1$$

e $cm.^3$ 7 di alluminio pesano g.

$$2{,}67 \times 7.$$

Dall'eguaglianza dei due prodotti segue che:
corpi di egual peso hanno pesi specifici inversamente proporzionali ai loro volumi.

12. — Se L. 8,90 e L. 2,67 sono i prezzi di un litro d'olio o di vino, allora l. 2,1 di olio costano L.

$$8{,}9 \times 2{,}1$$

e l. 7 di vino costano L.

$$2{,}67 \times 7.$$

Dall'eguaglianza dei due prodotti segue che:
merci di egual valore hanno prezzi unitari inversamente proporzionali alle loro quantità.

13. — Un treno diretto va da Roma a Terni in $2_h\ 20_m$ con la velocità media di km. 48 all'ora.

Qual è la velocità media di un treno accelerato che percorre la medesima strada in $2_h\ 40_m$?

14. — I due treni impiegano rispettivamente ore

$$2 + 1/3 = 7/3 \qquad \text{e} \qquad 2 + 2/3 = 8/3.$$

Il problema si può risolvere così:
la distanza da Roma a Terni è km.

$$48\ (7/3) = 16 \times 7 = 112$$

e quindi la velocità media cercata dev'essere (in km. all'ora):

$$112 : (8/3) = 112\ (3/8) = 14 \times 3 = 42.$$

15. — Si noti che:
la distanza percorsa da un veicolo è il prodotto della sua velocità media per il tempo impiegato.

Quindi:
se due veicoli percorrono distanze eguali, le loro velocità medie sono inversamente proporzionali ai tempi impiegati.

16. — Il problema, dianzi risolto, è indicato nel prospetto

velocità	ore (I)
x	8/3
48	7/3

in cui x rappresenta la velocità incognita e la scrittura « (I) » indica che si deve ricavarne la proporzione *inversa*:

$$x : 48 = (7/3) : (8/3)$$

cioè

$$x : 48 = 7 : 8$$

da cui

$$x = (48 \times 7) : 8 = 6 \times 7 = 42.$$

17. — Risulta che:
se quattro numeri sono inversamente proporzionali, il primo è eguale al secondo moltiplicato per il rapporto inverso degli altri due.

Sicchè, nel caso nostro, senza perder tempo a scrivere la proporzione, dal prospetto si ricava sùbito:

$$x = 48 \times \frac{7/3}{8/3} = \frac{48 \times 7}{8} = 6 \times 7 = 42.$$

18. — Altri esempi di *proporzionalità inverse* saranno forniti incidentalmente da alcuni problemi seguenti, che chiameremo: **problemi del tre, inversi.**

Problemi del tre, inversi

AVVERTENZA. — Si rilegga quella che precede i problemi del tre, *diretti*.

1. — Le basi di due rettangoli, aventi la stessa area, sono cm. 36 e cm. 24.

Sapendo che l'altezza del primo è cm. 18, si calcoli quella del secondo.

(Che cosa rappresenta il prodotto « 36×18 » ?)

2. — Le altezze di due triangoli, aventi la stessa area, sono cm. 6,3 e cm. 4,2.

Sapendo che la base del secondo è cm. 15, si calcoli quella del primo.

(Che cosa rappresenta il prodotto « $4{,}2 \times 15$ » ?)

3. — Le aree delle basi di due parallelepipedi rettangoli, aventi lo stesso volume, sono cm^2. 264 e cm^2. 660.

Sapendo che l'altezza del primo è cm. 25, si calcoli quella del secondo.

(Che cosa rappresenta il prodotto « 264×25 » ?)

4. — Le altezze di due parallelepipedi rettangoli, aventi lo stesso volume, sono cm. 12 e cm. 15.

Sapendo che l'area della base del secondo è cm^2. 208, si calcoli quella del primo.

(Che cosa rappresenta il prodotto « 208×15 » ?)

5. — Su un piatto d'una bilancia viene messo un cubo di legno di noce, stagionato, avente lo spigolo di cm. 4 ed il peso specifico 0,9.

Si domanda il volume dei pezzi di sughero, che bisogna mettere sull'altro piatto della bilancia, per ristabilire l'equilibrio.

Il peso specifico del sughero è 0,24.

(Che cosa rappresenta il prodotto « $0{,}9 \times 64$ » ?)

6. — Ho due campioni di legno, stagionati, aventi lo stesso peso: l'uno di mogano ha il peso specifico 0,85 ed è cm^3. 60, e l'altro di quercia è cm^3. 50.

Qual è il peso specifico di quel campione di quercia?

(La curiosità è giustificata, perchè il peso specifico del legno di quercia oscilla fra 0,61 ed 1,17.

Che cosa rappresenta il prodotto « $0{,}85 \times 60$ » ?)

7. — Due botti di vino, di hl. 4 e di hl. 6 furono pagate egualmente, la prima a L. 2,70 il litro.

A quanto il l. la seconda?

Il valore delle botti è compreso nel prezzo del vino.

(Che cosa rappresenta il prodotto « 270×4 » ?)

8. — Un cliente di Rodolfo ha comperato da lui 8 hl. di vino a L. 2,40 il l.

Poichè la qualità non gli è piaciuta, ha ottenuto di cambiarlo con vino da L. 3,20 il l.

Aiutate Rodolfo a calcolare quanti l. gliene debba mandare in cambio.

(Che cosa rappresenta il prodotto « 240×8 » ?)

9. — La strada ferrata da Roma a Castellamare Adriatico sale da m. 58 sul livello del mare a m. 896, per ridiscendere a m. 5.

A cagione di questi dislivelli, un treno diretto la percorre in $6_h\ 40_m$ con la velocità media di 36 km. all'ora ed un accelerato la percorre con la velocità media di 25 km. all'ora.

In quanto tempo?

(Si riduca a frazione impropria irriducibile di ore il tempo impiegato dal diretto.

Che cosa rappresenta il prodotto « 36 (20/3) » ?)

10. — Una squadra di 12 manovali sta ultimando un trasporto di terra e lo compirebbe in altri 14 giorni lavorativi.

Ma l'imprenditore ha bisogno che il lavoro sia finito fra 8 giorni.

Quanti altri operai gli occorrono?

(Prima si trovi « quanti » e poi « quanti altri ».

Che cosa rappresenta il prodotto « 14×12 » ?)

11. — Due ruote sono ingranate; l'una ha 128 denti e l'altra 26.

Mentre la prima fa 65 giri, quanti ne fa la seconda?

(Che cosa rappresenta il prodotto « 128×65 » ?)

12. — Si deve costruire una ruota dentata, in modo che faccia 350 giri al minuto, essendo ingranata in una ruota di 42 denti che fa 5 giri al secondo.

Quanti denti deve avere la nuova ruota?

(Quanti giri al minuto fa la ruota esistente?

Che cosa rappresenta il prodotto « 42×300 » ?)

13. — Un imprenditore si è impegnato a far compiere uno scavo lungo 100 m. in 20 giorni.

A tale scopo, egli ha calcolato che gli occorrono 15 operai che lavorino 8 ore al giorno.

Ma, dopo 13 giorni di lavoro, è scoppiata una rissa fra alcuni suoi operai: cosicchè egli si è trovato costretto a licenziarne 3, senza avere la possibilità di assumerne altri.

Per non mancare al suo impegno, egli si propone di far lavorare più intensamente gli operai rimastigli, distribuendo fra loro anche le paghe dei 3 operai licenziati.

Essendo costante la sezione dello scavo e la quantità di lavoro che ogni operaio può fare in ogni ora, si domanda quante ore al giorno dovranno lavorare gli operai rimasti.

(La questione, apparentemente complicata, si riduce alla ricerca del numero x di *ore* occorrenti a 12 *operai* per fare *ogni giorno* quello che in 8 *ore* avrebbero eseguito 15 operai.

A tale scopo, il prodotto del numero delle *ore* per quello degli *operai* non deve cambiare; e perciò:

il numero delle ore giornaliere è inversamente proporzionale al numero degli operai.)

§ 3. — Proporzionalità composta

1. — In 6 giorni, lavorando 8 ore al giorno, una squadra di manovali ha trasportato 420 m.^{3} di terra.

Gliene rimangono da trasportare 315 e vuol farlo in 4 giorni.

A tale scopo, quante ore al giorno deve lavorare?

2. — Questo è un **problema del tre, composto**: perchè lo si può trasformare in una *successione* di *problemi del tre, semplici.*

3. — Primo problema:

poichè lavorando 8 ore al giorno si trasportarono 420 m.^{3} di terra, quante ore al giorno bisognerebbe lavorare per trasportarne 315, nello *stesso numero di giorni*?

Nello stesso numero di giorni:

i metri cubi trasportati sono direttamente proporzionali alle ore giornaliere di lavoro.

Quindi, rappresentando con y il numero cercato in questo primo problema, risulta:

$$y = 8 \times \frac{315}{420}.$$

4. — Secondo problema:

poichè lavorando 6 giorni occorrerebbero y ore al giorno per completare il trasporto di terra, quante ore al giorno bisognerà lavorare, per eseguire in 4 giorni *lo stesso lavoro*?

Per fare uno stesso lavoro:

i giorni occorrenti sono inversamente proporzionali alle ore giornaliere di lavoro.

$$x = 8 \times \frac{315}{420} \times \frac{6}{4} = 8 \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = 9.$$

5. — E così abbiamo risolto il problema proposto principio, il quale si può indicare nel seguente prospetto:

ore	m.^{3} (D)	giorni (I)
x	315	4
8	420	6

in cui ciascuna *colonna* ha il significato indicato superiormente e ciascuna delle *due righe* di numeri si riferisce ad uno *stesso fatto*, in modo che il numero cercato x stia nella *prima riga* e nella *prima colonna.*

Inoltre, e questo è il più importante, ciascuna *intestazione* di colonna è seguìta dalla lettera « D » od « I », secondochè i numeri di quella colonna sono *direttamente* od *inversamente* proporzionali a quelli della *prima.*

6. — Preparato così il prospetto indicante qualunque *problema del tre composto*, anzichè rinnovare i ragiona-

menti fatti poc'anzi, si porrà sùbito x eguale al *prodotto* del *numero sottostante* ad x per *i rapporti diretti* delle coppie di numeri situati nelle colonne contrassegnate con la lettera « D » e per *i rapporti inversi* delle coppie di numeri situati nelle colonne contrassegnate con la lettera « I ».

Ad es., dal prospetto si ricava sùbito:

$$x = 8 \times \frac{315}{420} \times \frac{6}{4}.$$

Problemi del tre, composti

1. — Una squadra di 21 muratori ha costruito un mu[illegible] ung 14 m., alto 3 m. e grosso 24 cm.

Quanti operai (egualmente capaci ed attivi) occorreranno per costruire (in egual tempo) un altro muro lungo 20 m., alto 4 m. e grosso 18 cm.?

(Anzitutto, si prepara il prospetto:

operai	lungh.	alt.	gross.
x	20	4	18
21	14	3	24

Ora bisogna *completarlo* con la indicazione « D » ovvero « I » a destra della intestazione di ogni colonna fuorchè la prima.

A questo scopo, si rifletta che, se i due muri fossero:

egualmente alti e grossi, allora i due numeri di *operai* sarebbero ***direttamente proporzionali*** alle due ***lunghezze***;

egualmente lunghi e grossi, allora i due numeri di *operai* sarebbero ***direttamente proporzionali*** alle due ***altezze***;

egualmente alti e lunghi, allora i due numeri di *operai* sarebbero ***direttamente proporzionali*** alle due ***grossezze***;

Brevemente, si conclude che:

i due numeri di operai sono direttamente proporzionali alle lunghezze, alle altezze ed alle grossezze dei due muri;

e perciò la intestazione del prospetto va ***completata*** così:

operai | lungh. (D) | alt. (D) | gross. (D).

Ed ora calcolate x nel modo che vi ho insegnato, facendo le opportune semplificazioni.

In questo caso, si poteva ragionare più semplicemente, così: i due numeri di *operai*

$$x \quad \text{e} \quad 21$$

devono essere ***direttamente proporzionali*** ai ***volumi*** dei due muri, che in dm.^{3} sono indicati dai prodotti

$$200 \times 40 \times 18 \quad \text{e} \quad 140 \times 30 \times 24.$$

In questo modo o nell'altro, troverete: 30.

— Ma, trattandosi di *operai*, che cosa si sarebbe concluso se non risultava un numero *intero*? — domanda Pierino.

— Se veniva un numero *misto*, si sarebbe dovuto rispondere con ***la parte intera aumentata di uno***.)

2. — Un libro ha 245 pagine.

Ogni pagina piena ha 32 righe.

Ogni riga piena è composta con 48 caratteri: lettere o cifre o segni d'interpunzione o intervalli bianchi.

Si vuol ristampare il libro in pagine da 40 righe, ciascuna di 56 caratteri.

Quante pagine, circa, risulteranno?

(Se non variasse il numero dei caratteri per riga, il numero delle *pagine* sarebbe ***direttamente*** o ***inversamente*** proporzionale al numero delle *righe* per pagina?

Se non variasse il numero delle righe per pagina, il numero delle *pagine* sarebbe ***direttamente*** o ***inversamente*** proporzionale a numero dei *caratteri* per riga?

Compilate il prospetto completo e risolvete.

In questo caso, si poteva ragionare più semplicemente, così: i due numeri di *pagine*

$$x \quad \text{e} \quad 245$$

devono essere... (direttamente o inversamente?) ***proporzionali*** ai due numeri di *caratteri* adoperati in ogni pagina, i quali sono indicati dai prodotti

$$56 \times 40 \quad \text{e} \quad 48 \times 32.$$

Comunque, la risposta va accompagnata dalla parola « circa », perchè non sono piene tutte le pagine, nè tutte le righe.)

3. — Per tappezzare le pareti di una stanza occorrono 10 rotoli di carta, ciascuno lungo 15 m. ed alto 72 cm.

Quanti rotoli occorrerebbero invece, adoperando un'altra carta, i cui rotoli sono lunghi 18 m. ed alti 60 cm.?

(Se il risultato vi meravigliasse, calcolate in cm.^{2} l'area tappezzata con un rotolo di ciascuna delle due carte.)

4. — Un tale ha comperato 78 m. di tela, alta cm. 70, spendendo L. 163,80.

Quanto spenderà, nello stesso negozio, per 95 m. di tela della medesima qualità, ma alta 60 cm.?

(Le due spese devono essere... proporzionali alle due lunghezze e... proporzionali alle due altezze.

In altro modo, si può calcolare quanto sia costata al m. la prima tela e poi quanto debba costare al m. la seconda).

5. — 25 operai stanno facendo lo scavo per un canale a sezione costante, lungo 232 m.

In 63 giorni, ad 8 ore al giorno, avevano fatto uno scavo lungo 145 m., quando 4 operai dovettero abbandonare quel lavoro.

Non avendo la possibilità di sostituirli, l'imprenditore ottenne dai rimasti che lavorassero 9 ore al giorno, rimunerando equamente l'ora di lavoro straordinario.

Fra quanti giorni di lavoro sarà finito lo scavo?

§ 4. — Parti proporzionali

1. — Diremo che *due successioni di numeri* sono ***direttamente proporzionali*** (fra loro), quando *il rapporto* dei loro *primi* due numeri è *eguale* al rapporto dei *secondi*, dei *terzi*, ecc.

2. — Ad es., le due successioni

35, 75, 95
21, 45, 57

sono *direttamente proporzionali*, perchè

$$35 : 21 = 5/3, \qquad 75 : 45 = 5/3, \qquad 95 : 57 = 5/3.$$

Diremo brevemente che 5/3 è ***il rapporto di proporzionalità*** delle *due successioni* considerate.

3. — Dal confronto, ad es., della *prima* eguaglianza con la *terza* segue che

$$35 : 21 = 95 : 57$$

da cui, scambiando i medi,

$$35 : 95 = 21 : 57.$$

4. — Dunque:

allorchè due successioni di numeri sono direttamente proporzionali, *due numeri qualunque* della *prima* sono *direttamente proporzionali* ai *due numeri corrispondenti* della *seconda*.

5. — Si osservi che, *dividendo* la prima successione (cioè: ogni suo numero) per 5 e la seconda per 3, entrambe diventano:

7, 15, 19.

Inversamente, *moltiplicando* questa successione (cioè: ogni suo numero) per 5 o per 3, si ritrovano le due successioni considerate: ciascuna delle quali è *direttamente proporzionale* a questa, coi *rapporti di proporzionalità* 5 e 3.

6. — Dunque:

moltiplicando una successione di numeri per un numero, si ottiene una successione direttamente proporzionale a quella;

due successioni, direttamente proporzionali ad una terza, sono direttamente proporzionali fra loro.

7. — Ad es., moltiplicando per 2 la prima successione e per 7 la seconda, otteniamo le due nuove successioni

70, 150, 190
147, 315, 399

le quali sono *direttamente proporzionali*, tanto a quelle da cui le abbiamo ricavate quanto fra loro.

8. — Si rammenti che:

se alcuni rapporti sono eguali fra loro, allora uno qualunque di essi è uguale al rapporto della *somma degli antecedenti* e della *somma dei conseguenti.*

Quindi:

allorchè due successioni di numeri sono direttamente proporzionali, il loro *rapporto di proporzionalità* è eguale al *rapporto* fra *la somma* di alcuni numeri della *prima* e *la somma* dei corrispondenti numeri della *seconda.*

9. — Ad es., si voglia *scindere* 109 in *parti direttamente proporzionali* a 13, 9, 3.

In altri termini, si voglia scindere 100 nella *somma* di tre numeri

$$a, \qquad b, \qquad c$$

formanti una successione *direttamente proporzionale* a

$$13, \qquad 9, \qquad 3.$$

Il rapporto di proporzionalità di queste due successioni dev'esser dunque:

$$(a + b + c) : (13 + 9 + 3)$$

cioè

$$100 : 25 = 4$$

E perciò dev'essere

$$a : 13 = 4, \qquad b : 9 = 4, \qquad c : 3 = 4$$

e quindi

$$a = 4 \times 13 = 52, \quad b = 4 \times 9 = 36, \quad c = 4 \times 3 = 12.$$

10. — Or dunque:

per scindere un numero in *parti direttamente proporzionali* ad alcuni numeri dati, si *divide* quello per

la somma di questi e poi si *moltiplica* il *quoto* per ciascuno dei numeri dati.

Questa si chiama: ***regola di partizione*** (diretta).

11. — Salgo sul diretto che parte da Verona (porta Vescovo) alle 3.23 ed arriva a Padova alle 5.1.

Il treno è partito in orario.

Poco dopo viene un controllore.

Mentre mi rende il biglietto, gli chiedo:

— Quante fermate di qui a Padova?

— Una sola: a Vicenza.

— Quanti minuti di fermata?

— Sette.

Mi pento di non avergli domandato *a che ora* vi si arriva: tanto più che non ho l'orario ed i miei compagni di viaggio si sono già riaddormentati.

Ma, sapendo che da Verona a Vicenza sono 48 km. e da Vicenza a Padova sono 30 km., riesco a soddisfare la mia curiosità, senza disturbare alcuno.

Da Verona a Padova, il treno impiega

$$5^h\ 1^m - 3^h\ 23^m = 1_h\ 38_m = 98_m$$

ma sta fermo 7 minuti e quindi corre soltanto minuti

$$98 - 7 = 91.$$

Supposto ch'esso proceda con moto uniforme, devo scindere questi 91 minuti in *due parti proporzionali* alle due distanze, cioè ai numeri 48 e 30.

La prima di queste parti è

$$\frac{48}{48 + 30} \times 91 = \frac{48}{78} \times 91 = \frac{8}{13} \times 91 = 8 \times 7 = 56.$$

Dunque: il treno dovrebbe impiegare 56 minuti a percorrere il primo tratto e perciò dovrebbe arrivare a a Vicenza alle

$$3^h\ 23^m + 56_m = 4^h\ 19^m.$$

12. — Talvolta, può giovare di *sostituire* alla *successione* dei numeri dati *un'altra successione*, che sia *direttamente proporzionale* a quella.

Ad es., si voglia scindere 100 in *parti direttamente proporzionali* alle *frazioni*

$$1/2 \qquad 1/4 \qquad 1/12.$$

Giova moltiplicare queste per *il minimo multiplo dei loro denominatori*, che è 12, ottenendo la successione di numeri *naturali*

$$6, \qquad 3, \qquad 1.$$

Poichè $100 : (6 + 3 + 1) = 100 : 10 = 10$

i tre numeri cercati sono

$$10 \times 6 = 60, \qquad 10 \times 3 = 30, \qquad 10 \times 1 = 10.$$

13. — Arnaldo, Biagio e Carlo hanno formato una società commerciale, impiegandovi rispettivamente lire 125 mila, 95 mila ed 80 mila.

Alla fine del primo anno, il guadagno fu di L. 38·417,40.

Quanto spetta a ciascuno, supposto che le prestazioni di lavoro dei tre soci siano già state retribuite mediante equi stipendi ?

Nell'ipotesi fatta, si tratta di scindere 38·417,40 in *parti direttamente proporzionali* ai numeri

$$125{\cdot}000, \qquad 95{\cdot}000 \qquad 80{\cdot}000$$

cioè (dividendoli per 5000) ai numeri

$$25, \qquad 19, \qquad 16$$

la cui somma è

$$25 + 19 + 16 = 60.$$

A tale scopo, si calcola

$$38{\cdot}417{,}40 : 60 = 640{,}29$$

e si conclude che:

ad Arnaldo spettano	L.	$640{,}29 \times 25 = 16{\cdot}007{,}25$
a Biagio spettano	L.	$640{,}29 \times 19 = 12{\cdot}165{,}51$
ed a Carlo spettano	L.	$640{,}29 \times 16 = 10{\cdot}244{,}64$

Per *verifica* si addizionano le parti, ottenendo 38·418,40

14. — Diremo che *due successioni di numeri* sono *inversamente proporzionali* (fra loro), quando ciascuna di esse è *direttamente proporzionale* alla successione dei *reciproci* dell'altra.

15. — Ad es., le due successioni

$$\begin{matrix} 4, & 6, & 7 \\ 21, & 14, & 12 \end{matrix}$$

sono *inversamente proporzionali*, perchè la prima è *direttamente* proporzionale alla successione

$$1/21 \qquad 1/14 \qquad 1/12$$

ovvero perchè la seconda è *direttamente* proporzionale alla successione

$$1/4 \qquad 1/6 \qquad 1/7$$

come si rende evidente col moltiplicare per 84 ogni termine delle due nuove successioni.

16. — In altro modo:

due successioni di numeri sono *inversamente proporzionali*, allorchè *il prodotto* dei *primi* due numeri (delle due successioni) è *eguale* a quello dei *secondi*, dei *terzi*, ecc.

Ad es., nelle due successioni considerate,

$$4 \times 21 = 84, \qquad 6 \times 14 = 84, \qquad 7 \times 12 = 84.$$

17. — Si rifletta che:

due successioni, inversamente proporzionali ad una terza, sono direttamente proporzionali fra loro.

Infatti, ciascuna di quelle due è direttamente proporzionale alla successione dei reciproci della terza e perciò sono direttamente proporzionali fra loro.

18. — Si voglia *scindere* 155 in *parti inversamente proporzionali* a 3, 9, 21

cioè in parti *direttamente* proporzionali ad

1/3 1/9 1/21

cioè (moltiplicando per 63) *direttamente* proporzionali a

21, 7, 3

la cui somma è

$$21 + 7 + 3 = 31.$$

Poichè $155 : 31 = 4$

le tre parti cercate sono:

$5 \times 21 = 105$, $5 \times 7 = 35$, $5 \times 3 = 15$.

19. — Un comune di montagna si compone di tre frazioni, le quali hanno press'a poco lo stesso numero di abitanti.

Viene decisa la costruzione di un ponte su un torrente, distribuendo la spesa, che sarà di L. 155 mila, in parti inversamente proporzionali alle distanze di ciascuna frazione dal luogo in cui sorgerà il ponte.

Queste distanze sono: hm. (ettometri) 3, hm. 9 ed hm. 21.

Come dovrà essere ripartita la spesa?

20. — Facendo il calcolo in biglietti da mille lire, si tratta di *scindere* 155 in *parti inversamente proporzionali* ai numeri

3, 9, 21.

Come risulta dall'ultimo esercizio, le tre frazioni di quel comune dovranno concorrere alla costruzione del ponte con L.

105 mila, 35 mila, 15 mila.

21. — Tizio, Caio e Sempronio si erano associati per alcuni affari da cui hanno tratto un guadagno di L. 18 mila.

Tizio aveva messo in società L. 25 mila per 6 mesi, Caio L. 30 mila per 4 mesi e Sempronio L. 35 mila per 3 mesi.

Qual parte di guadagno spetta a ciascuno?

22. — Se i *tempi* fossero stati *eguali,* il guadagno avrebbe dovuto essere distribuito in parti *direttamente* proporzionali ai *capitali.*

Se invece i *capitali* fossero stati *eguali,* il guadagno avrebbe dovuto essere distribuito in parti *direttamente* proporzionali ai *tempi.*

Perciò i tre soci devono distribuirsi il guadagno in *parti direttamente proporzionali ai capitali* ed ai *tempi.*

Questo problema di *partizione composta* si chiama: **problema di società.**

23. — E come lo si risolve? — chiede Pierino.

— Supponi che i tre soci siano riusciti a calcolare *la parte* di guadagno che spetta ad uno qualunque di essi, per *ogni* biglietto da *mille* lasciato in società per *un mese.* Quante di queste *parti eguali* sono dovute a Tizio?

— $25 \times 6 = 150$

— A Caio?

— $30 \times 4 = 120.$

— A Sempronio?

— $35 \times 3 = 105.$

— A tutti e tre insieme?

— $150 + 120 + 105 = 375.$

— Ed allora, poichè il guadagno fu di L. 18 mila, di quante lire dev' essere ciascuna di queste parti eguali ?

— Di L. 18000 : 375 = 48.

— E perciò qual parte di guadagno ebbe ciascuno ?

— Caio ebbe L. $48 \times 150 = 7200$
Tizio ebbe L. $48 \times 120 = 5760$
e Sempronio ebbe L. $48 \times 105 = 5040$
che insieme fanno appunto L. 18000

24. — Si conclude che:

scindere un numero in parti direttamente proporzionali ad alcune successioni di numeri è lo stesso che scinderlo in parti *direttamente* proporzionali alla *successione dei prodotti* dei *primi*, dei *secondi*, dei *terzi*, ecc. numeri delle successioni date.

25. — Infine:

scindere un numero in parti inversamente proporzionali ad alcune successioni di numeri è lo stesso che scinderlo in parti *direttamente* proporzionali alle *successioni dei reciproci* dei numeri delle successioni date.

Esercizi

Scindere 1924 in tre parti:

1. — direttamente proporzionali ai numeri 10, 13, 14.

2. — direttamente proporzionali ai numeri 1/3, 1/12, 9/20.

3. — inversamente proporzionali ai numeri 12, 8, 3.

4. — direttamente proporzionali ai numeri 2, 3, 7 ed ai numeri 11, 7, 5.

5. — inversamente proporzionali ai numeri 3, 4, 6 ed ai numeri 1, 2, 3.

6. — direttamente proporzionali ai numeri 5, 8, 19 ed inversamente proporzionali ai numeri 171, 279, 589.

(Per quest'ultimo esercizio, anzitutto si scrivano i reciproci dei

numeri della seconda successione e si moltiplichino per il minimo multiplo dei loro denominatori.

Dopo ciò, si tratterà di scindere il numero dato in parti direttamente proporzionali ai numeri, 5, 8, 19 ed ai numeri calcolati).

Problemi

1. — Due manovali hanno eseguito un certo lavoro per L. 450, lavorando l'uno 17 giorni e l'altro 13.

Quanto spetta a ciascuno ?

2. — Tre frazioni di un comune decidono di costruire un ospedale, distribuendone la spesa di mezzo milione in parti direttamente proporzionali al numero degli abitanti, i quali sono 8600 nella prima frazione, 6950 nella seconda e 4450 nella terza.

Quanto spenderà ciascuna frazione di quel comune ?

3. — Per riparare il tetto di una casa furono spese L. 18400.

Fu deciso che i quattro comproprietari vi concorressero in proporzione diretta dei valori d'acquisto dei loro appartamenti, che furono L. 120 mila, 95 mila, 85 mila e 68 mila.

Quanto spese ogni comproprietario per quella riparazione ?

4. — Domenico, Enrico e Francesco sono comproprietari di un negozio.

Il guadagno dell'anno scorso fu ripartito così: a Domenico L. 11·725, ad Enrico L. 14·070 e a Francesco L. 16·415.

Con quanto ha contribuito ogni socio a costituire il capitale sociale, che è di L. 450·000 ?

5. — Una vasca da bagno, quand'è piena sino all'affioratore, contiene 700 litri.

Vengono aperti i due rubinetti, in modo che, in tempi eguali, da essi fluiscano quantità eguali di acqua: dall'uno calda e dall'altro fredda.

Trascorsi 4 minuti, viene chiuso il rubinetto dell'acqua calda.

Dopo ciò, trascorrono 3_m 40_s prima che la vasca sia piena.

Quanti litri d'acqua calda furono adoperati ?

6. — Dalla vendita delle merci di un bettegaio fallito si sono ricavate L. 35·625, nette di ogni spesa, che devono essere ripartite fra tre suoi creditori, cui egli avrebbe dovuto L. 97·500, L. 52·500 e L. 37·500.

Di quanto dovrà accontentarsi ciascuno di essi e quale percentuale del loro credito avranno ricuperato ?

7. — Giorgio, Luca e Matteo si erano associati per alcuni affari da cui hanno tratto un guadagno di L. 54·321.

Domenico aveva messo in società L. 130 mila per 7 mesi, Enrico L. 182 mila per 5 mesi e Francesco L. 455 mila per 2 mesi.

Qual parte di guadagno spetta a ciascuno?

8. — Tre comuni si sono consorzionati per la costruzione di un ponte.

Il primo comune aveva 5950 abitanti ed il suo municipio distava dal ponte 5 ettometri.

Il secondo comune aveva 8330 abitanti ed il suo municipio distava dal ponte 7 hm.

Il terzo comune aveva 10710 abitanti ed il suo municipio distava dal ponte 9 hm.

Fu deciso che alla spesa i tre comuni contribuissero in parti direttamente proporzionali agli abitanti ed inversamente proporzionali alle distanze.

Quale parte di spesa spettò ad ogni comune?

Tre testamenti successivi

Un tale lasciò L. 336·300 a tre suoi nipoti: Pietro, che aveva 30 anni e 5 figli; Paolo, che aveva 36 anni e 6 figli, e Rinaldo, che aveva 48 anni ed 8 figli.

In un primo testamento lo zio diceva che le parti dovevano essere direttamente proporzionali al numero dei figli che avrebbe avuto ciascuno dei tre nipoti sino al giorno della sua morte.

Fatto il conto, rinvennero un testamento posteriore, secondo il quale le parti invece dovevano essere inversamente proporzionali al numero degli anni compiuti da ciascuno dei tre nipoti.

Rifatto il conto, trovarono un terzo testamento dello zio, scritto il giorno prima della sua morte, in cui egli prescriveva che le parti fossero direttamente proporzionali al numero dei figli di ciascun nipote ed inversamente proporzionali agli anni compiuti dai nipoti stessi.

Quanto sarebbe toccato a ciascuno dei tre nipoti, se il primo testamento non fosse stato annullato dai successivi? e quanto invece se fosse rimasto valido il secondo?

Quanto ereditò effettivamente ciascuno dei tre nipoti?

§ 5. — Miscugli e leghe

1. — Mescolo due qualità di caffè tostato: 5 hg. dell'una, che ho pagato L. 2,60 l'hg., e 2 hg. dell'altra, che ho pagato L. 2,95 l'hg.

Quanto mi costa ogni hg. del *miscuglio*?

Il costo di tutto il miscuglio è L.

$$(2{,}60 \times 5) + (2{,}95 \times 2) = 13 + 5{,}90 = 18{,}90$$

ed il suo peso è hg.

$$5 + 2 = 7.$$

Quindi ogni hg. di esso mi costa L.

$$18{,}90 : 7 = 2{,}70.$$

2. — Si conclude che:

per calcolare *il valore unitario di un miscuglio*, basta *dividere* il suo *valore* (cioè: *la somma dei valori* delle merci mescolate) per la sua *quantità* (cioè: per *la somma delle quantità* delle merci mescolate).

E questa è ***la regola diretta di miscuglio***, applicata ai ***valori unitari***.

3. — Naturalmente, *le quantità* vanno tutte misurate rispetto ad una *stessa unità*: la quale, secondo *la qualità* delle merci può essere una *lunghezza* (ad es., per le stoffe) o un'*area* (ad es., per i terreni) o un *volume* (ad es., per i legnami da costruzione) o una *capacità* (ad es., per i vini) o un *peso* (ad es. per le farine).

Ed alla *stessa unità* vanno riferiti *i valori unitari*; sicchè *il valore* di ciascuna merce sia *il prodotto* del suo *valore unitario* per la sua *quantità*.

4. — Mescolo 30 cm^3. di essenza di lavanda con 40 cm^3. di essenza di cannella.

Il peso specifico dell'essenza di lavanda è 0,89 e quello dell'essenza di cannella è 1,03.

Qual è il peso specifico della *miscela*?

Il peso di tutta la miscela è g.

$$(0{,}89 \times 30) + (1{,}03 \times 40) = 26{,}7 + 41{,}2 = 67{,}9$$

ed il suo volume è cm^3.

$$30 + 40 = 70.$$

Quindi il suo peso specifico è

$$67{,}9 : 70 = 0{,}97.$$

5. — Si conclude che:

per calcolare *il peso specifico di una miscela*, basta *dividere* il suo *peso* (cioè: *la somma dei pesi* dei corpi mescolati) per il suo *volume* (cioè: per *la somma dei volumi* dei corpi mescolati).

E questa è *la regola diretta di miscuglio*, applicata ai *pesi specifici*.

6. — Naturalmente, trattandosi di corpi *solidi* o *liquidi*, secondochè *i volumi* sono misurati in cm^3. o in $dm.^3$, *i pesi* vanno misurati in g. o in kg.; sicchè *il peso* di ciascun corpo sia *il prodotto* del suo *peso specifico* per il suo *volume*.

7. — È doveroso avvertire che soltanto in modo approssimato *il volume* della miscela è *eguale* alla *somma dei volumi* dei corpi mescolati.

Ad es., se si mescola grano e farina, il volume del miscuglio risulta *minore* della somma dei volumi del grano e della farina: perchè una parte della farina andrà ad occupare i vani tra i chicchi del grano.

E quel che accade manifestamente col grano e con la farina, accade in modo più o meno rilevante, palese soltanto negli effetti, anche nel mescolare liquidi o aeriformi, o nel fondere insieme corpi solidi.

Ma noi trascureremo tali variazioni di volume.

8. — Fondo sei monete d'argento: una da L. 5, due da L. 1 e tre da L. 2.

Qual è il titolo di questa *lega*?

Si rammenti che:

il *titolo* di una lega d'argento (o d'oro) è il peso in g. dell'argento (o dell'oro) contenuto in un kg. di lega, cioè il peso in mg. dell'argento (o dell'oro) contenuto in un g. di lega;

mentre le monete d'argento da 5 lire hanno il titolo 900, quelle da una lira e da 2 lire hanno il titolo 835;

ogni kg. d'argento monetato vale 200 lire, sicchè ogni lira d'argento monetato pesa g.

$$1000 : 200 = 5.$$

Perciò:

una moneta d'argento da 5 lire è costituita da g. 25 di lega al titolo 900,

due monete d'argento da 1 lira e tre da L. 2 fanno 8 lire d'argento monetato, cioè g. 40 di lega al titolo 835.

Dunque: tutta la lega da me formata contiene mg. d'argento

$$(900 \times 25) + (835 \times 40) = 22500 + 33400 = 55900$$

e pesa g. $\quad 25 + 40 = 65.$

Quindi: ogni g. di lega contiene mg. d'argento

$$55900 : 65 = 860$$

e questo è il titolo cercato.

9. — Si conclude che, se una *lega nobile* (contenente *argento* od *oro*, che si chiama il suo *fino*) è ottenuta fondendo insieme *alcune leghe nobili* (contenenti una stessa *qualità* ma diverse *quantità* di *fino*), allora:

per calcolare *il titolo della nuova lega* basta *dividere il peso del suo fino* (cioè: *la somma dei fini* delle leghe componenti) per il suo *peso* (cioè: per *la somma dei pesi* delle leghe componenti).

E questa è *la regola diretta di miscuglio*, applicata ai *titoli* delle *leghe nobili*.

10. — Naturalmente, secondochè *i pesi delle leghe* sono misurati in g. o in kg., *i pesi del fino* vanno misurati in mg. o in g.; sicchè *il peso del fino* contenuto in ciascuna lega sia il *prodotto* del suo *titolo* per il suo *peso*.

11. — Rodolfo, il vinaio, ha ancora 450 litri di un vino che sin qui ha venduto a L. 3 il litro, ma che gli avventori trovano troppo caro.

Egli ha molto altro vino, che vende a L. 2,20 il litro.

Quanti litri di questo deve mescolare a quello, per poter vendere la miscela a L. 2,50 il litro, conservando invariato il suo guadagno?

Non per gli avventori ma per Rodolfo, gli è come s'egli vendesse a L. 2,50 il litro, tanto i 450 litri del vino ch'egli vendeva a L. 3 quanto gli x litri del vino ch'egli vendeva a L. 2,20 e metterà nella miscela.

La prima vendita gli darebbe un minor ricavo di L.

$$(3 - 2{,}50)\ 450 = 0{,}50 \times 450 = 450 : 2 = 225$$

mentre la seconda gli darebbe un maggior ricavo di L.

$$(2{,}50 - 2{,}20)\ x = 0{,}30 \times x.$$

Affinchè il maggior ricavo di questa compensi esattamente il minor ricavo di quella, dovrà essere

$$0{,}30 \times x = 225$$

da cui $$x = 225 : 0{,}30 = 750.$$

12. — Soffermiamoci ad osservare che il problema di Rodolfo è completamente *indicato* dall'eguaglianza

$$(2{,}50 - 2{,}20)\ x = (3 - 2{,}50)\ 450$$

che si può trasformare nella proporzione

$$x : 450 = (3 - 2{,}50) : (2{,}50 - 2{,}20).$$

13. — Risulta che:

il rapporto di due quantità di merci, di cui la prima abbia il minor valore unitario ed il cui miscuglio debba avere un valore unitario prefissato (necessariamente intermedio fra gli altri due), ***è eguale al rapporto che ha per antecedente la differenza tra il valore unitario maggiore e l'intermedio, ed ha per conseguente la differenza tra il valore unitario intermedio ed il minore.***

E questa è ***la regola inversa di miscuglio***, applicata ai ***valori unitari***.

14. — Se Rodolfo l'avesse conosciuta, egli avrebbe risolto il suo problema senza alcun ragionamento, così:

$$x : 450 = (3 - 2{,}50) : (2{,}50 - 2{,}20) = 0{,}50 : 0{,}30 = 5 : 3$$

da cui

$$x = (450 \times 5) : 3 = 150 \times 5 = 750.$$

15. — *La regola inversa di miscuglio* (che abbiamo applicato ai *valori unitari*) si applica anche ai ***pesi specifici***; nel qual caso, va modificata così:

il rapporto dei volumi di due corpi, di cui il primo abbia il minor peso specifico ed il cui miscuglio debba avere un peso specifico prefissato (necessariamente intermedio fra gli altri due), ***è eguale al rapporto che ha per antecedente la differenza tra il peso specifico maggiore e l'in-***

termedio, ed ha per conseguente la differenza tra il peso specifico intermedio ed il minore.

16. — Eccone un'applicazione.

Un ragazzo, che non sa nuotare, vuol legare intorno al suo corpo alcuni pezzi di sughero, in modo da potersi gettare in mare e restare a galla.

Poichè egli pesa kg. 42,051 quanti g. dovrà pesare il sughero?

Poichè i pesi specifici del corpo umano, dell'acqua di mare e del sughero sono

1,07 1,026 0,24

la regola inversa di miscuglio fornisce *il rapporto* fra *i volumi* del *sughero* e del *ragazzo*, in modo che il peso specifico del loro insieme sia eguale a quello dell'acqua di mare.

Tale rapporto è dunque

$$(1{,}07 - 1{,}026) : (1{,}026 - 0{,}24) = 0{,}044 : 0{,}786 = 22 : 393.$$

Il *volume* di quel *ragazzo* è dm^3.

$$42{,}051 : 1{,}07 = 39{,}3$$

e perciò, rappresentando con x il *volume* in dm^3. del *sughero* occorrente per tenerlo a galla, deve sussistere la proporzione:

$$x : 39{,}3 = 22 : 393$$

da cui

$$x = (39{,}3 \times 22) : 393 = 2{,}2.$$

Per tenere a galla quel ragazzo occorrono dunque dm^3. 2,2 di sughero, cioè cm^3. 2200, cioè grammi

$$0{,}24 \times 2200 = 528.$$

17. — E se, invece che in mare, quell'uomo si gettasse in un lago? — domanda Pierino.

— Il peso specifico del tuo lago supererà di poco quello dell'acqua distillata; quindi è prudente considerarlo eguale ad 1. Sicchè potete rifar sùbito il calcolo, scrivendo 1 al posto di 1,026.

— Ne fai sempre delle tue! — brontola Fiacchetti al compagno.

Ma prima ch'egli abbia preparato quaderno e penna, Pierino ha già finito: trovando (con approssimazione per eccesso) che occorrerebbero g. 869 di sughero.

Verificate voi il calcolo di Pierino.

18. — *La regola inversa di miscuglio* (che abbiamo applicato ai *valori unitari* ed ai *pesi specifici*) si applica anche ai *titoli* delle *leghe nobili*; nel qual caso va modificata così:

il rapporto dei pesi di due leghe, di cui la prima abbia il titolo minore ed il cui miscuglio debba avere un titolo prefissato (necessariamente intermedio fra gli altri due), *è eguale al rapporto che ha per antecedente la differenza tra il titolo maggiore e l'intermedio, ed ha per conseguente la differenza tra il titolo intermedio ed il minore.*

19. — Eccone un'applicazione.

Un argentiere possiede kg. 18 di argento al titolo 815 ed altrettanti al titolo 880.

Qual è la massima quantità di argento al titolo 835, ch'egli potrà ricavarne per semplice fusione?

La regola inversa di miscuglio fornisce *il rapporto*

$$(880 - 835) : (835 - 815) = 45 : 20 = 9 : 4.$$

Poichè in questo rapporto l'antecedente è maggiore del conseguente, l'argentiere dovrà adoperare *tutti* i

18 kg. di argento al titolo *minore* ed x kg. di argento al titolo *maggiore*: in modo che risulti

$$18 : x = 9 : 4$$

da cui

$$x = (18 \times 4) : 9 = 2 \times 4 = 8.$$

Quindi, la massima quantità di argento, che si doveva calcolare, è kg.

$$18 + 8 = 26.$$

Il re, l'orafo e il matematico

1. — Un re aveva ordinato al suo orafo di approntargli una corona d'oro puro.

Sospettando ch'egli vi avesse mescolato un po' d'argento, chiese ad un matematico di decidere se l'orafo lo avesse frodato.

Il matematico immerse la corona in un vaso pieno d'acqua e pesò quella ch'era traboccata, trovando ch'era 20 g.

Il volume della corona era dunque 20 cm³.

Se fosse stata d'oro puro (il cui peso specifico è 19,5), avrebbe dovuto pesare g.

$$19{,}5 \times 20 = 390.$$

Invece, essa pesava soltanto g. 345 e perciò la frode dell'orafo era ormai certa.

2. — Sapresti dirmi quanto oro e quanto argento egli abbia adoperato? — chiese il re.

Ed il matematico lo soddisfece, ragionando così:

Se l'orafo avesse adoperato *un solo* cm³. d'argento (il cui peso specifico è 10,5) in cambio di un *egual volume* d'oro, allora il *peso* della corona sarebbe diminuito di g.

$$19{,}5 - 10{,}5 = 9.$$

Ma invece egli avea spinto la sua frode a tal segno, che il *peso* della corona era diminuito di g.

$$390 - 345 = 45.$$

Dunque: i cm³. d'oro, cambiati con altrettanti d'argento, erano stati

$$45 : 9 = 5$$

e perciò i cm³. d'oro puro, adoperati nella corona, erano stati soltanto

$$20 - 5 = 15.$$

E così il matematico potè dire al re che la corona era composta di g.

$$19{,}5 \times 15 = 292{,}5 \text{ d'oro}$$
$$10{,}5 \times 5 = 52{,}5 \text{ d'argento.}$$

3. — Noi avremmo potuto risolvere il problema, osservando anzitutto che *il peso specifico* della corona era

$$345 : 20 = 17{,}25.$$

Quindi, per la regola *inversa* di miscuglio, *il rapporto dei volumi d'argento e d'oro*, di cui era composta la corona, doveva essere

$$(19{,}5 - 17{,}25) : (17{,}25 - 10{,}5) = 2{,}25 : 6{,}75 = 1 : 3.$$

Sicchè, per la regola *diretta* di partizione, quei *volumi d'argento e d'oro* erano cm³.

$$\frac{20}{1+3} \times 1 = 5 \quad \text{e} \quad \frac{20}{1+3} \times 3 = 15$$

da cui i *pesi* corrispondenti già calcolati.

I due anelli

1. — Di due anelli, formati con la stessa lega aurea, uno è liscio e l'altro è ornato di un diamante.

Viene proposto ad uno stimatore di gioielli di calcolare il peso del diamante, senza staccarlo dall'anello.

Però egli sa che il peso specifico dei diamanti è 3,5.

2. — Con una bilancia di precisione, lo stimatore pesa ciascun anello e l'acqua che ciascuno di essi fa traboccare da un vaso

pieno, per conoscere anche i loro volumi. Poichè l'anello liscio pesa g. 5,705 ed è cm³. 0,35 il peso specifico della lega aurea è

$$5{,}705 : 0{,}35 = 16{,}3.$$

Poichè l'anello col diamante pesa g. 7,14 ed è cm³. 0,504 il suo peso specifico è

$$7{,}14 : 0{,}504 = 7140 : 504 = 85/6.$$

Notate che, per non trascurar nulla, egli ha preferito esprimere il quoto in forma di frazione ordinaria irriducibile.

3. — A questo punto, egli ha applicato *la regola inversa dei miscugli*, trovando che *il rapporto dei volumi* del *diamante* e della *lega aurea* (in quest'ordine) dev'essere:

$$(16{,}3 - 85/6) : (85/6 - 3{,}5)$$

cioè, moltiplicando per 6 tanto l'antecedente quanto il conseguente e distribuendo questo fattore ad ambo i termini di ciascuna differenza:

$$(97{,}8 - 85) : (85 - 21) = 12{,}8 : 64 = 128 : 640 = 1 : 5.$$

4. — Dopo ciò, mediante *la regola di partizione diretta*, egli ha calcolato *il volume* del *diamante* in cm³.

$$\frac{0{,}504}{1+5} \times 1 = \frac{0{,}504}{6} = 0{,}084$$

ed infine *il peso* del *diamante* in g.

$$3{,}5 \times 0{,}084 = 0{,}294.$$

DOMANDA INSIDIOSA

Si hanno 345 grammi di lega aurea al titolo 875.

Per ottenere una lega al titolo 750, la si fonde tutta con un certo peso di *rame*.

Ma supponete invece che, senza cambiare il peso della lega al titolo 875, si riuscisse a mettervi un certo peso di rame al posto di altrettanto peso d'oro puro, in modo da ridurla al titolo 750, e che quest'oro puro venisse fuso a parte con un certo peso di rame, in modo da ottenere *un altro po' di lega* al titolo 750.

Si domanda se *tutto il rame* adoperato nel primo modo *pesi* di più o di meno di quell'*altro po' di lega* ottenuta a parte nel secondo modo.

RISPOSTA

Senza far calcoli, si può risponder subito che quel rame e quella lega *pesano ugualmente*.

Invero, nell'uno e nell'altro modo, *tutto l'oro puro* ch'era contenuto nella lega data viene commisto a *tanto rame* quanto ne occorre per ridurla al titolo desiderato.

E perciò il complessivo *aumento di peso* dev'essere *lo stesso* nei due modi, ch'esso si presenti quale *peso di tutto il rame* nel primo modo o quale *peso di quell'altro po' di lega* nel secondo modo.

Problemi diretti

1. — Un droghiere vende tre qualità di caffè tostato a L. 2,90 a L. 2,70 ed a L. 2,40 l'ettogrammo.

Egli mescola 15 hg. della prima qualità con 25 hg. della seconda e 35 hg. della terza.

A quanto dovrà vendere ogni ettogrammo del miscuglio?

(Si ricorra alla regola *diretta* di miscuglio, applicata ai *valori unitari*.)

Risposta: — a L. 2,60.

2. — Un liquorista mescola 55 cm³. di essenza di bergamotto con 90 cm³. di essenza di menta.

Il peso specifico dell'essenza di bergamotto è 0,882 e quello dell'essenza di menta è 0,911.

Qual è il peso specifico della miscela?

(Si ricorra alla regola *diretta* di miscuglio, applicata ai *pesi specifici*.)

Risposta: — 0,9.

3. — Un argentiere fonde 7 monete d'argento da una lira con 8 da 5 lire e 9 da 2 lire.

Qual è il titolo della lega?

(Quanti g. di argento monetato al titolo 900? e quanti al titolo 835?

Dopo ciò, si ricorra alla regola *diretta* di miscuglio, applicata ai *titoli* delle leghe nobili.)

Risposta: — 875.

4. — Una botte, della capacità di 3 hl. conteneva l. 225 di un vino ch'era costato al vinaio L. 225 l'hl.

Poichè i clienti lo trovavano un po' leggiero, egli diede la colma alla botte con un vino più generoso, che gli era costato L. 325 l'hl.

A quanto il litro dovrà vendere la miscela, per guadagnare il 20 % del costo?

(Quanti litri di vino occorsero per dar la colma alla botte? Dopo ciò, si ricorre alla regola *diretta* di miscuglio, applicata ai *valori unitari*.)

Risposta: — a L. 3.

5. — Ogni kg. di argentana (*packfong*) contiene 500 g. di rame, 300 di nichelio e 200 di zinco.

Il peso specifico del rame è 8,60 del nichelio è 8,28 e dello zinco è 7,15.

Qual è il peso specifico dell'argentana?

(Il volume di 500 g. di rame è cm³. 500 : 8,6.

Similmente, si indichi il volume di 300 g. di nichelio ed il volume di 200 g. di zinco.

Si calcolino i tre quozienti, interi: i primi due per difetto ed il terzo per eccesso.

Dopo ciò, si ricorra alla regola *diretta* di miscuglio, applicata ai *pesi specifici*.

Si eseguisca l'ultima divisione con approssimazione al mezzo centesimo.)

Risposta: — 8,20.

6. — I pesi specifici dell'oro e del rame essendo 19,5 ed 8,8 qual è il peso specifico di una loro lega al titolo 780?

(Ogni grammo di quella lega contiene mg. 780 d'oro e mg. 1000 — 780 di rame.

Quanti mm³. d'oro contiene? e quanti di rame?

Si dividano i 1000 mg. complessivi per i corrispondenti mm³. complessivi.)

Risposta: — Il peso specifico di quella lega è 15 + 5/13.

Problemi inversi

1. — Un bottegaio riceve da un negoziante due qualità di olio. Per fare il guadagno desiderato, dovrebbe venderne una a L. 8,20 il litro e l'altra a L. 8,90 il litro.

In quale rapporto dovrà mescolare le due qualità di olio, per poter vendere la miscela a L. 8,50 il litro?

(Si ricorra alla regola *inversa* di miscuglio, applicata ai *valori unitari*.)

Risposta: — Nel rapporto « 4 : 3 ».

2. — Si deve fare un oggetto metallico, del volume di cm³. 198, in modo che, immerso totalmente in una bacinella piena di mercurio a 0°, vi rimanga in equilibrio: cioè non vada a fondo, nè venga a galla.

A tale scopo, si decide di fare quell'oggetto parte in ferro e parte in platino: perchè questi due metalli non sono intaccati dal mercurio e perchè i loro pesi specifici 7, 8 e 21 sono l'uno minore e l'altro maggiore del peso specifico del mercurio a 0°, che e 13, 6.

Quanti cm³. di ferro e quanti di platino si dovranno adoperare?

(La regola *inversa di miscuglio* fornisce il rapporto dei due numeri cercati e la regola di *partizione diretta* consente di calcolarli.)

Risposta: — cm³. 111 di ferro e cm³. 87 di platino.

3. — Qual è il titolo di una lega d'oro e di rame, il cui peso specifico è 15 + 5/13?

(Chi rammenta l'ultimo problema diretto, può rispondere sùbito che il titolo è 780.

Ma chi voglia riuscire a calcolare questo numero, ricorra anzitutto alla regola *inversa* di miscuglio applicata ai *pesi specifici*.

Troverà che in quella lega, *il rapporto dei volumi* del *rame* e dell'*oro*, in quest'ordine, è

$$\left(\frac{195}{10} - \frac{200}{13}\right) : \left(\frac{200}{13} - \frac{88}{10}\right)$$

che si riduce al rapporto di due numeri d'una cifra.

D'altra parte, *il volume* di *un grammo* di lega, cioè di 1000 mg. è mm³.

$$1000 : (200/13)$$

che si riduce a numero naturale, di cui si dovranno fare *due parti* che stiano fra loro nel *rapporto* calcolato.

La *seconda* di queste parti dà i mm³. d'*oro* contenuti in *un grammo* di lega.

Moltiplicando il peso specifico 19,5 dell'oro per il suo volume in mm³., si otterrà *il peso* in mg. dell'*oro* contenuto in *un grammo* di lega, cioè *il titolo* della lega.)

Risposta: — 780.

4. — La lattaia mi porta 10 litri di latte, il cui peso netto è kg. 10,270 cioè 50 g. di meno di quel che dovrebb'essere.

Quanto devo alla lattaia, se pago il latte di mucca a L. 1,20 il litro, ma non pago l'acqua che vi ha mescolato?

(I 10 litri di latte di mucca dovrebbero pesare kg. 10,320 perchè il suo peso specifico è 1,032. Quello della miscela è 1,027 e quello dell'acqua si può valutare 1.

Calcolate *il rapporto dei volumi* di *acqua* e di *latte*, in quest'ordine.

Dei 10 litri di miscela calcolate *due parti* che stiano fra loro nel *rapporto* calcolato.

La *seconda* di queste parti, che calcolerete esattamente, dà i litri di *latte di mucca* contenuti nei 10 litri di miscela.

Infine, calcolerete quanto devo alla lattaia.)

Risposta: — L. 10,15 regalandole mezzo soldo.

5. — A Rodolfo, il vinaio, sono rimasti 198 l. di una qualità di vino che sinora egli ha venduto a L. 3,25 il litro.

Per facilitarne la vendita, egli vuol annacquarlo in modo da poter ridurre il prezzo della miscela a L. 2,75 il litro.

Quanti litri d'acqua deve mescolare al vino?

(Non per gli avventori ma per Rodolfo, gli è come se tanto il vino puro quanto l'acqua mescolatavi venissero venduti a L. 2,75 il litro.

Se Rodolfo vendesse a questo prezzo il vino puro, senza annacquarlo, quanto di meno ricaverebbe al litro? in tutto?

In compenso, quanti litri d'acqua, che nulla gli costa, deve vendere a L. 2,75 il litro?)

Risposta: — 36.

NOTA. — Senza tanti ragionamenti, *il prezzo unitario* del vino puro è 3,25 della miscela è 2,75 e dell'aqua è 0.

Quindi, *il rapporto dei volumi* dell'*acqua* e del *vino puro*, in quest'ordine, dev'essere

$$(3{,}25 - 2{,}75) : (2{,}75 - 0)$$

Semplificandolo, l'antecedente diventa un numero di una cifra

Rappresentando con x il numero cercato, deve sussistere la proporzione che ha per primo rapporto « $x : 198$ » e per secondo rapporto quello calcolato.

Dalla proporzione si ricava la risposta.

6. — Un orafo desidera sapere quanti grammi di rame debba fondere con 140 g. d'oro puro, per ottenere una lega aurea al titolo 875.

Diteglielo voi.

(Dovrà sussistere la proporzione

$$x : 140 = (1000 - 875) : 875$$

in cui x è il numero cercato.)

Risposta: — 20.

NOTA — Si osservi che *il rapporto dei pesi* del *rame* e dell'*oro puro*, in quest'ordine, è quello fornito dalla regola *inversa* di miscuglio: purchè si consideri *l'oro puro* come una lega aurea al titolo 1000 ed *il rame* come una lega aurea al titolo 0.

7. — Quell'orafo ha adoperato 64 g. della lega di poc'anzi.

Ora desidera sapere quanti g. di rame debba fondere con la lega rimastagli, per ottenere una lega al titolo 840.

Diteglielo voi.

(Poichè di lega al titolo 875 erano rimasti g.

$$140 + 20 - 64$$

devrà sussistere la proporzione

$$x : 96 = (875 - 840) ; (840 - 0)$$

in cui x è il numero cercato.)

Risposta: — 4.

8. — Quell'orafo ha adoperato 18 g. della lega al titolo 840.

Ora desidera sapere quanti g. di oro puro debba fondere con la lega rimastagli, per ottenere nuovamente una lega al titolo 875.

Diteglielo voi.

(Poichè di lega al titolo 840 erano rimasti g.

$$64 + 4 - 18 = 50$$

dovrà sussistere la proporzione

$$50 : x = (1000 - 875) : (875 - 840)$$

in cui x è il numero cercato.

Si osservi che ho scritto « $50 : x$ », e non « $x : 50$ », perchè la

nostra regola *inversa* di miscuglio dà la precedenza alla lega di titolo *minore*.

Risposta : — 14.

9. — Un'altra volta, il solito orafo desidera sapere quanti grammi di rame debba fondere con 97 monete d'oro da 20 lire, con 63 da 10 lire e con 13 da 5 lire, per ottenere una lega al tilolo 850.

E ricorre a voi per saperlo.

(Voi rammentate che *l'oro monetato* ha il titolo 900 ed il valore di 3100 *lire-oro* ogni kg.

E perciò voi calcolate anzitutto *il peso* delle monete d'oro, che quell'orafo vuol fondere, dividendo il numero complessivo di quelle lire-oro per 3100.

Troverete un numero intero n di grammi.

Dopo ciò, dovrà sussistere la proporzione

$$x : n = (900 - 850) : (850 - 0)$$

in cui x è il numero cercato.)

Risposta : — 5.

CAPITOLO X

AMPIEZZE ANGOLARI

§ 1. — Varie specie di angoli

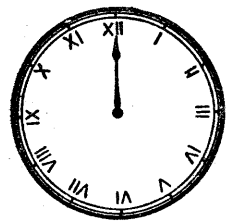
1. — Nell'orologio del salotto, s'è staccata la lancetta delle ore.

In attesa che venga l'orologiaio ad accomodarlo, mi accontento di sentir *suonare* le *ore* e di osservare *la lancetta dei minuti.*

Suonano *le otto* e la lancetta indica il XII.

Suonano *le nove* e la lancetta indica il XII.

È trascorsa *un'ora* e, frattanto, la lancetta *è ritornata nella posizione primitiva, dopo aver occupato, una sola volta, tutte le posizioni possibili.*

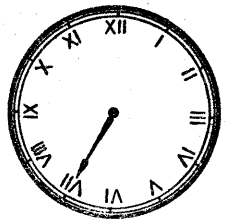


Brevemente: in *un' ora* essa ha compiuto *un giro.*

2. — Scoccano *le dieci* e di nuovo la lancetta indica il XII.

È trascorsa *un'altra ora*: e, frattanto, la lancetta ha compiuto *un altro giro.*

3. — Sono le *dieci e trentacinque.*



La lancetta indica il VII.
Che cosa indicherà fra *un'ora*?
Indicherà di nuovo il VII.
E, frattanto, che cosa avrà compiuto?
Avrà compiuto *un giro.*

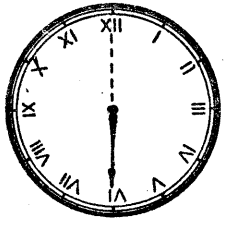
4. — In *un'ora*, a cominciare da un *istante* qualunque, *la lancetta dei minuti* compie *un giro.*
In *due ore* compie 2 *giri*, in *tre ore* compie 3 *giri*, ecc.

5. — *Tutti i giri sono eguali.*

6. — In una *frazione* (anche impropria) di *ora*, la lancetta compie una *frazione di giro*, che si chiama: ***angolo.***
La sua *posizione iniziale* (di partenza) e la sua *posizione finale* (di arrivo) si chiamano: ***i lati*** dell' *angolo.*
Il *perno* (intorno al quale si muove la lancetta) si chiama: ***il vertice*** dell'angolo.
Ogni angolo ha due lati e un vertice.
Il vertice d'un angolo è il solo punto comune ai due lati.

7. — Poichè due angoli sono due frazioni di giro, per ***confrontare*** o ***addizionare*** o ***sottrarre*** due *angoli*, basta *confrontare* o *addizionare* o *sottrarre* le corrispondenti *frazioni.*

8. — Ogni *mezzo giro* si chiama: *angolo* ***piatto.***



9. — *La lancetta dei minuti* compie *un angolo piatto* in *mezz'ora.*
Ad es., alle *undici* indicava il XII (nella figura la lancetta è appena accennata) ed alle *undici e mezza* indica il VI.
La sua *posizione finale* è ***opposta*** alla sua *posizione iniziale.*

10. — *I due lati d'ogni angolo piatto sono opposti.*

11. — *Tutti gli angoli piatti sono eguali.*

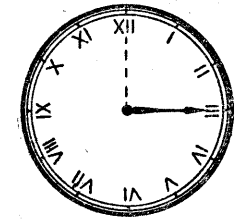
12. — Ogni angolo *minore* di *un angolo piatto*, si chiama: *angolo* ***convesso.***

13. — Ogni angolo *maggiore* di *un angolo piatto* e *minore* di *un giro* si chiama: *angolo* ***concavo.***

14. — *La lancetta dei minuti* compie *qualsiasi angolo convesso* in *meno* di *mezz'ora.*
Essa compie *qualsiasi angolo concavo* in *più* di *mezz'ora* ed in *meno* di *un'ora.*

15. — Ogni *quarto di giro* si chiama: *angolo* ***retto.***

16. — *La lancetta dei minuti* compie *un angolo retto* in *un quarto d'ora.*



Ad es., a *mezzogiorno* indicava il XII ed al *quarto* indica il III.
La sua *posizione finale* è ***perpendicolare*** alla sua *posizione iniziale.*

17. — *I due lati di ogni angolo retto sono fra loro perpendicolari.*

18. — *Tutti gli angoli retti sono eguali.*

19. — *Ogni angolo piatto equivale a due angoli retti.*
Ogni giro equivale a due angoli piatti, cioè *a quattro angoli retti.*

20. — Ogni angolo *minore* di *un angolo retto* si chiama: *angolo* ***acuto.***

21. — Ogni angolo *maggiore* di *un angolo retto* e *minore* di *un angolo piatto* si chiama: *angolo* ***ottuso.***

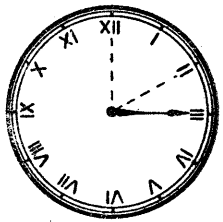
22. — *La lancetta dei minuti* compie *qualsiasi angolo acuto* in *meno* di *un quarto d'ora.*
Essa compie *qualsiasi angolo ottuso* in *più* di *un quarto d'ora* ed in *meno* di *mezz'ora.*

In ambo i casi, la sua *posizione finale* è ***obliqua*** alla sua *posizione iniziale.*

23. — *I due lati di ogni angolo acuto od ottuso sono fra loro obliqui.*

24. — In 10 *minuti* la lancetta compie un angolo *acuto* e nei 5 *minuti consecutivi* essa compie un altro angolo *acuto.*

Frattanto, sono trascorsi 10 + 5 *minuti*, cioè *un quarto d'ora* e perciò essa ha compiuto un angolo *retto.*



Quindi, la *somma* di quei *due angoli consecutivi* è *un angolo retto.*

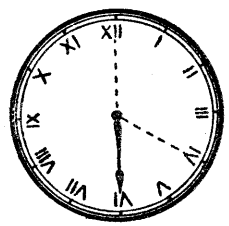
Ciò si esprime, dicendo che quei *due angoli* sono fra loro ***complementari***, ovvero che l'*uno* è ***il complemento*** dell'*altro.*

25. — *Due angoli sono fra loro complementari, quando la loro somma è un angolo retto.*

26. — *Angoli eguali* (fra loro) *hanno complementi eguali* (fra loro).

27. — In 20 *minuti* la lancetta compie un angolo *ottuso* e nei 10 *minuti consecutivi* essa compie un angolo *acuto.*

Frattanto, sono trascorsi 20 + 10 *minuti*, cioè *mezz'ora.*



Quindi, la *somma* di quei *due angoli consecutivi* è *un angolo piatto.*

Ciò si esprime, dicendo che quei *due angoli* sono fra loro ***supplementari***, ovvero che l'*uno* è ***il supplemento*** dell'*altro.*

28. — *Due angoli sono fra loro supplementari, quando la loro somma è un angolo piatto.*

29. — *Angoli eguali* (fra loro) *hanno supplementi eguali* (fra loro).

Secondochè un angolo è

acuto, retto, ottuso

il suo supplemento è

ottuso, retto, acuto.

30. — Riassumendo:

gli angoli minori di un giro sono di tre specie: convessi, piatto e concavi;

e gli angoli convessi sono di tre sottospecie: acuti, retto ed ottusi.

31. — Prima che proseguiate, vi informo che è venuto l'orologiaio ed ha rimesso a posto *la lancetta delle ore.*

DOMANDA

Allo scoccare di ciascuna *ora*, dall'*una* alle *undici* (ovvero dalle *tredici* alle *ventitre*), quale *specie* di *angolo* comprendono fra loro la lancetta dei *minuti* (come *primo lato*) e la lancetta delle *ore* (come *secondo lato*)?

Le lancette sovrapposte

1. — Quand'è che le due lancette dell'orologio sono fra loro *sovrapposte*, come accade a *mezzogiorno* e a *mezzanotte*?

2. — Poichè *un giro* viene compiuto dalla lancetta dei *minuti* in *un'ora* e dalla lancetta delle *ore* in *dodici ore*, la *velocità* di quella è 12 *volte* la *velocità* di questa.

Sùbito dopo la mezzanotte, la lancetta dei minuti *precede* quella delle ore, formando con essa *angoli crescenti* (acuti, retto, ottusi, piatto, concavi), sino a *raggiungerla* alle spalle (dopo aver compiuto *un giro* di più).

Quando avverrà *il primo raggiungimento*?

3. — Dopo un'ora — risponde Sventatelli.

— Cioè, all'una. Ma, all'una, dove si trovano le due lancette?

— Quella dei minuti indica il XII e quella delle ore indica l'I.

— Sicchè *il raggiungimento* non è ancora accaduto.

4. — Accadrà all'una e cinque minuti — soggiunge Sventatelli.
— Perchè dici così? — gli domando.
— Perchè allora anche la lancetta dei minuti indicherà l'I.
— Sì, ma la lancetta delle ore sarà rimasta ad aspettarla?
— No,... ed allora non so che cosa dire — confessa Sventatelli.

5. — Puoi concludere che il tempo, interposto fra due successive *sovrapposizioni* delle due lancette, è *maggiore* di *un' ora e cinque minuti*. Quindi: *la prima sovrapposizione* avviene *dopo* l'1.5 (una e cinque minuti), *la seconda dopo* le 2.10, *la terza*....
— ... *dopo* le 3.15, *la quarta*...
— Saltiamo. Quando avviene *la decima sovrapposizione*?
— *Dopo* le 10.50.
— E *la undicesima*?
— *Dopo* le 11.55.
— Ma, quand'è *precisamente* che le due lancette si *sovrappongono* per la prima volta *dopo* le 11.55?
— *A mezzogiorno* — risponde giustamente Sventatelli.

6. — Quindi — concludo io — *a mezzogiorno* si ha *la undicesima sovrapposizione dopo la mezzanotte*. Quante *ore* sono *trascorse* dalla mezzanotte al mezzogiorno?
— 12 ore.
— Dunque: *il tempo che trascorre fra due sovrapposizioni successive* delle lancette è l'*undicesima parte di 12 ore*, cioè *ore*

$$^{12}/_{11} = 1 + {}^{1}/_{11}.$$

7. — *Quanti minuti* oltre l'ora? — chiede Pierino.
— Come si trasformano le *ore* in *minuti*? — gli chiedo io di rimando.
— Basta moltiplicare il loro numero per 60.
— Moltiplica dunque $^{1}/_{11}$ per 60 e poi trasforma in numero misto.
— Ecco: $^{60}/_{11} = 5 + {}^{5}/_{11}.$
— Similmente, trasforma in *secondi* i $^{5}/_{11}$ di *minuto*.
— Ottengo: $60\,(^{5}/_{11}) = {}^{300}/_{11} = 27 + {}^{3}/_{11}.$
— Riassumendo, *fra due sovrapposizioni successive* trascorre:

$$1^h\ 5^m\ 27^s + {}^{3}/_{11}.$$

8. — Perciò, *la prima sovrapposizione* dopo la mezzanotte accade ad $1^h\ 5^m\ 27^s + {}^{3}/_{11}.$

Dite voi quando accadono *le altre dieci sovrapposizioni*, prima del mezzogiorno.

Problemi

Quando, per la prima volta dopo la mezzanotte:

1. — le due lancette dell'orologio sono fra loro opposte?
(Dopo la mezzanotte, dev'essere trascorso la metà del tempo occorrente affinchè le lancette tornino a sovrapporsi.)

2. — le due lancette dell'orologio sono fra loro perpendicolari?
(Dopo la mezzanotte, dev'essere trascorso 1/4 ovvero 3/4 del tempo occorrente affinchè le lancette tornino a sovrapporsi.)

§ 2. — Gradi, minuti e secondi

1. — Il *grado* è 1/90 di *angolo retto*.

2. — Quindi:
l'angolo retto è 90° (leggasi: « 90 *gradi* »),
l'angolo piatto è 180°,
il giro è 360°.

3. — Il *minuto* (primo) è 1/60 di *grado*.
Il (minuto) *secondo* è 1/60 di *minuto*.

4. — Come sapete, *i minuti ed i secondi di ora* si indicano con le lettere « m » ed « s », a *destra* dei rispettivi numeri (in *alto* od in *basso*, secondochè si vuol indicare un *istante* o una *durata*).
Invece, *i minuti ed i secondi di grado* si indicano con *un àpice* « ′ » o con *due àpici* « ″ », a *destra* dei rispettivi numeri e sempre in *alto*.

Ad es., 8 *gradi*, 18 *minuti* e 25 *secondi* si scrive:

$$8^\circ\ 18'\ 25''.$$

5. — Per calcolare *la somma* di alcuni *angoli*, di ciascuno dei quali è data *l'ampiezza* in *gradi, minuti e secondi*, se ne scrivono le misure in altrettante *righe*, in

modo che risultino tre *colonne*: per i *gradi*, per i *minuti* e per i *secondi*.

Ecco un es. di *addizione*.

La somma dei secondi è 124″. Risultando essa *maggiore* di 60″, si *pensa*:

60 in 124 sta 2 volte, col resto 4.

48°	23′	45″
53°	27′	38″
67°	52′	41″
169°	44′	4″

Quindi, 124″ = 2′ 4″

e perciò si *scrive* 4″ e si *porta* 2′.

La somma dei minuti è 102′. Ma, con 2′ di riporto, essa diventa 104′. Risultando anch'essa *maggiore* di 60′, si pensa:

60 in 104 sta 1 volta, col resto 44.

Quindi, 104′ = 1° 44′

e perciò si *scrive* 44′ e si *porta* 1°.

Infine, *la somma dei gradi* è 168°. Ma, con 1° di riporto, essa diventa 169°, che si *scrive*.

Se negli addendi mancassero i *secondi*, si incomincerebbe dai *minuti*.

E, se negli addendi mancassero anche i *minuti*, si incomincerebbe e si finirebbe coi *gradi*.

6. — Quest'ultimo caso è il più bello! — esclama Fiacchetti.

— Certamente, è il più comodo — gli rispondo. — Ma io scelgo espressamente gli esempi che presentano le maggiori difficoltà, per addestrarvi a superarle.

D'altronde, eseguirò *più rapidamente* l'addizione di cui mi sono occupato poc'anzi.

Scorro la colonna delle *unità di secondi*, pensando:

5 e 8 fa 13, ed 1 fa 14.

Scrivo 4″ e porto 1.

Scorro la colonna delle *diecine di secondi*, pensando:

4 e 1 di riporto fa 5, e 3 fa 8, e 4 fa 12.

Siccome queste sono 12 *diecine di secondi* ed ogni *minuto* equivale a 6 *diecine di secondi*, penso:

6 in 12 sta 2 volte, col resto 0.

Perciò, *nulla scrivo* e porto 2′.

Similmente, per i *minuti*, penso:

3 e 2 di riporto fa 5, e 7 fa 12 e 2 fa 14.

Scrivo 4′ e porto 1. Poi, penso:

2 e 1 di riporto fa 3, e 2 fa 5, e 5 fa 10
6 in 10 sta 1 volta, col resto 4.

Scrivo 4 (davanti a 4′) e porto 1.

Dopo di che, l'addizione dei *gradi* non presenta la più lieve difficoltà.

7. — Occorre sovente di dover calcolare *il complemento* od *il supplemento* di un angolo dato.

A tale scopo, basta *togliere* la sua *ampiezza* da 90°, ovvero da 180°.

Ad es., un angolo di 60° ha per *complemento*

90° — 60° = 30°

e per *supplemento*

180° — 60° = 120°.

8. — Se si deve calcolare *il complemento*, ad es., di

13° 14′ 15″

per agevolarne la sottrazione da 90°, si trasforma *uno* di questi *gradi* in 60′ e poi *uno* di questi *minuti* in 60″.

Così facendo, si *trasforma* 90° in

89° 59′ 60″

e *la sottrazione* si eseguisce *mentalmente*, da *sinistra* a *destra*, così:

89° meno 13° fa 76°
59′ meno 14′ fa 45′
60″ meno 15″ fa 45″

e si conclude che:

il complemento di 13° 14′ 15″ è 76° 45′ 45″.

9. — Similmente, se si deve calcolare *il supplemento* di

17° 27′ 37″

per agevolare la sottrazione da 180°, si *trasforma* 180° in

179° 59′ 60″

e *la sottrazione* si eseguisce *mentalmente*, da *sinistra* a *destra*, così:

179° meno 17° fa 162°
59′ meno 27′ fa 32′
60″ meno 37″ fa 23″

e si conclude che:

il supplemento di 17° 27′ 37″ è 162° 32′ 23″.

10. — Devo calcolare un angolo che è 7 *volte* un altro angolo, la cui ampiezza è

13° 14′ 15″.

cioè: devo *moltiplicare* quest'angolo per 7.
Indico la *moltiplicazione* così:

```
 13° 14′ 15″
      × 7
 92° 39′ 45″
```


Brevemente, la *eseguisco* così:

15″ per 7 fa 105″
60 in 105 sta 1 volta, col resto 45.

Scrivo 45″ e porto 1′.

14′ per 7 fa 98′, ed 1′ di riporto fa 99′.
60 in 99 sta 1 volta, col resto 39.

Scrivo 39′ e porto 1°.

13° per 7 fa 91°, ed 1° di riporto fa 92°.

Scrivo 92°.

11. — Devo calcolare un angolo che è 1/3 di un altro angolo, la cui ampiezza è

49° 50′ 51″

cioè: devo *dividere* quest'angolo per 3.
Indico la *divisione* così:

```
49°   50′   51″ | 3
19              |----------
 1° = 60′         16° 36′ 57″
     110′
      20
       2′ = 120″
            171″
             21
              0
```

Brevemente, la *eseguisco* così:

49° *diviso* 3 dà 16° di *quoziente* ed 1° di *resto*
1° = 60′
50′ + 60′ = 110′
110′ *diviso* 3 dà 36′ di *quoziente* e 2′ di *resto*
2′ = 120″
51″ + 120″ = 171″
171″ diviso 3 dà 57″ di quoziente e 0″ di *resto*.

12. — E se la divisione dei *minuti secondi* desse *un resto diverso da zero*, si proseguirebbe coi *minuti terzi*? — domanda Pierino.

— E che cosa sarebbero, secondo te, questi *minuti terzi*, dei quali io non vi ho mai parlato?

— Come 1/60 di minuto *primo* fa un minuto *secondo*, così credevo che 1/60 di minuto *secondo* facesse un minuto *terzo*.

— No, ci si accontenta dei minuti *secondi*, perchè 1″ è già un angolo così piccolo, che praticamente non lo si può disegnare. Per convincertene, supponi di possedere un *orologio* in cui i minuti *secondi* (di grado) siano indicati così chiaramente come, nel mio orologio da tasca, sono indicati i *minuti* primi (di ora) e cioè, con *trattini* sul suo contorno, diretti verso il centro. Quanti *trattini* nel *tuo* orologio?

— Tanti, quanti sono i *secondi* di grado in un *giro*.

— Cioè?

— $$360 \times 60 \times 60.$$

— E quanti, invece, nel *mio*?

— Uno per *minuto* (di ora), cioè 60.

— Quanti trattini del *tuo* orologio, per ogni trattino del *mio*?

— $$(360 \times 60 \times 60) : 60 = 360 \times 60 = 21600.$$

— E perciò, se *l' intervallo* fra due trattini consecutivi dev'essere *lo stesso* nel *tuo* orologio e nel *mio*, come dev'esser grande il *tuo*?

— Dev'esser 21600 volte il suo.

— Quindi, poichè *il diametro* del *mio* è 4 cm., *il diametro* del *tuo* dev'essere cm....

— $$21600 \times 4 = 86400.$$

— Cioè m....

— ... 864.

— Mi pare, caro Pierino, che tu ti possa accontentare

d'un orologio che ha 864 m. di diametro. Che se poi tu ne volessi uno che indicasse altrettanto chiaramente i tuoi minuti *terzi* (di grado), il suo *diametro* dovrebb' essere di m. ...

— $$864 \times 60 = 51800.$$

— Cioè, di quasi km. ...

— ... 52

— ... che è la distanza da Milano a Chiasso!

Pierino ha rinunciato ai suoi minuti *terzi*.

Ed io profitto della conversazione avuta con lui, per dirvi in confidenza che, per le figure geometriche d'uso comune, anche i *secondi* (di grado) sono praticamente *trascurabili*.

13. — Allora, facciamone a meno — propone Fiacchetti.

Bada però — gli dico sorridendo — che, se diventerai *astronomo*, ti converrà tener conto anche dei *decimi di secondo* e scrivere, ad es.,

$$4^\circ\ 25'\ 19'',\ 7$$

per indicare:

4 *gradi*, 25 *minuti*, 19 *secondi* e 7/10 *di secondo*.

— Non farò mai l'astronomo! — mormora Fiacchetti.

— Ma i calcoli che stiamo facendo coi *gradi, minuti e secondi* ti addestrano a fare qualunque calcolo con ***sistemi di misura non decimali***, cioè in cui le *unità secondarie* non sono *frazioni decimali* dell' *unità principale*. Tali sono, ad es., *le ore, i minuti ed i secondi*. E, se invece dell'astronomo farai l' industriale od il commerciante, e venderai o comprerai in Inghilterra, non ti dispiacerà di aver imparato a fare i tuoi calcoli in *lire sterline, scellini e denari*.

14. — Per ultimo, calcoliamo *il rapporto di due angoli*, ad es.

$$36^\circ\ 39'\ 31'' : 68^\circ\ 4'\ 49''.$$

In *secondi*, il primo angolo è

$$[(36 \times 60) + 39]\ 60 + 31 = 131{\cdot}971$$

ed il secondo

$$[(68 \times 60) + 4]\ 60 + 49 = 245{\cdot}089$$

e quindi *il rapporto* cercato è

$$131{\cdot}971 : 245{\cdot}089$$

cioè

$$7 : 13.$$

DOMANDE

1. — Di che *specie* è un angolo di 50° ? di 100° ? di 150° ? di 200° ? di 300° ?

2. — Trascurando *i giri completi*, che *specie* di angolo rimane da un angolo di 490° ? di 500° ? di 600° ? di 810° ? di 900° ? di 1000°
(Si *divida* per 360° e si badi soltanto al *resto*.)

3. — Quanti *secondi* in un *grado* ?

4. — Quanti *minuti* in un *giro* ?

5. — Quanti *secondi* in un *giro* ?

6. — Qual è *il complemento* di 53° ? di 37° ?

7. — Qual è *il supplemento* di 100° ? di 80° ?

8. — Qual è *il complemento* di 69° 49′ 50″ ?

9. — Qual è *il supplemento* di 129° 9′ 10″ ?

10. — Che angolo descrive la lancetta dei *minuti* in *un minuto* ? in *un secondo* ?
(In *un minuto*, che parte di giro ? quanti gradi ?
In *un secondo*, che parte dell'angolo di poc' anzi ? che parte di grado ? quanti minuti di grado ?)

11. — Che angolo descrive la lancetta delle *ore* in *un' ora* ? in *un minuto* ? in *un secondo* ?
(In *un'ora*, che parte di giro ? quanti gradi ?
In *un minuto*, che parte dell'angolo di poc'anzi ? che parte di grado ? quanti minuti di grado ?

In *un secondo*, che parte dell'angolo misurato or ora ? che parte di minuto di grado ? quanti secondi di grado ?)

12. — Di che specie è *la metà di un angolo ottuso* ?
(Ogni angolo *ottuso* è *minore* di 180° e quindi la sua *metà* è *minore* di . . . e perciò è . . .)

13. — Di che specie è *il doppio di un angolo acuto* ?
(La domanda è insidiosa. C' è da scommettere che Sventatelli, rammentando la questione di poc'anzi, risponde: *ottuso*.
Ed invece bisogna rispondere: *convesso*.
E si può soggiungere: secondochè l'angolo acuto è *minore* o *eguale* o *maggiore* di 45°, che è la metà di 90°, *il suo doppio* è . . . o . . . o . . .)

Esercizi

Calcolare:

1. 95° 36′ 39″ + 59° 58′ 57″ + 24° 24′ 24″

2. 57° 57′ 57″ — 26° 25′ 24″

3. 69° 18′ 17″ — 56° 43′ 21″

(Bisogna trasformare uno dei 18′ in 60″ ed aggiungerli ai 17″, per poter sottrarre i 21″.
Poi, bisogna trasformare uno dei 69° in 60′ ed aggiungerli ai 17 rimasti dei 18, per sottrarre i 43′.
Infine, dai 68° rimasti si sottraggono i 56°.)

4. 5 volte 9° 33′ 21″

5. 1/7 di 85° 25′ 24″

6. 2/3 di 45° 48′ 51″

(Poichè manifestamente l'angolo dato è divisibile per 3, prima si *divida* per 3 e poi si *moltiplichi* per 2.)

7. 3/5 di 47° 48′ 49″

(Poichè l'angolo dato non è divisibile per 5, prima si dovrebbe *moltiplicare* per 3 e poi *dividere* per 5. Ma, purchè si prosegua il calcolo sino ai *decimi di secondo*, si giunge al medesimo risultato anche *invertendo l'ordine* delle *due operazioni*.)

8. — il rapporto irriducibile degli angoli

19° 29′ 39″ e 32° 29′ 25″.

LATITUDINI E DISTANZE GEOGRAFICHE

1. — Imaginate di tagliare a fette la Terra, come se fosse un cocomero, cioè con tagli passanti per il suo ***asse.***

Ogni taglio determina (press'a poco) una ***semicirconferenza,*** che ha per ***diametro*** l'***asse*** e per ***estremi*** i ***due poli.***

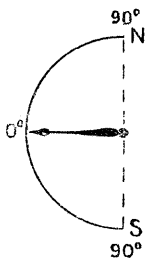
Per ogni ***punto*** della ***superficie terrestre*** (che non sia uno dei due poli) passa ***una*** di codeste ***semicirconferenze.***

La si chiama: ***meridiano*** di quel ***punto.***

2. — Le ***semicirconferenze*** di cui vi sto parlando sono ***i meridiani geografici.***

Invece, allorchè si dice che ***il metro astronomico*** è ***la quarantamilionesima parte*** del ***meridiano terrestre,*** s'intende che questo sia un'intera ***circonferenza.***

Sicchè, a scanso di equivoci, ogni ***meridiano geografico*** è (press'a poco) m. 20 000 000, cioè km. 20 000.



3. — Poichè avete la fantasia vivace, imaginate che una enorme lancetta da orologio abbia il suo perno nel ***centro*** della Terra e che, essendo da principio ***perpendicolare*** all'***asse terrestre,*** essa si muova nel ***piano*** di un ***meridiano***, sino ad indicare uno dei due ***poli.***

Ad ogni ***angolo*** di ***un grado*** descritto da codesta lancetta, la sua punta percorre ***un arco di meridiano,*** che i geografi chiamano: ***grado di latitudine.***

4. — Abbiamo supposto che la lancetta compia ***un angolo retto,*** cioè 90°.

Sicchè: ogni ***grado di latitudine*** è 1/90 di ***mezzo meridiano geografico,*** cioè di km. 10 000.

Quindi, la sua lunghezza è km.

$$10{\cdot}000 : 90 = 1000 : 9 = 111,(1).$$

5. — Naturalmente, ogni ***minuto*** (primo) ***di latitudine*** è 1/60 di ***grado di latitudine.***

Quindi, la sua ***lunghezza*** è m.

$$111{\cdot}111,(1) : 60 = 1851,(851).$$

6. — Il ***minuto di latitudine*** si chiama anche: ***miglio geografico*** o ***marino*** (o ***nodo***).

Quindi: con errore per eccesso, minore di 15 cm., ***il miglio geografico*** è m. 1852.

7. — ***Il piano perpendicolare all'asse*** della Terra, taglia la superficie di questa lungo una ***circonferenza,*** che si chiama ***equatore*** e che separa l'***emisfero boreale*** o ***settentrionale*** (in cui noi abitiamo) dall'***emisfero australe*** o ***meridionale.***

8. — ***L'equatore*** incontra ogni ***meridiano*** nel suo ***punto medio,*** cui i geografi assegnano la ***latitudine*** 0°. A partire da esso, vengono contati i 90° di ***latitudine boreale*** sino al ***polo Nord*** ed i 90° di ***latitudine australe*** sino al ***polo Sud.***

Quindi, ogni indicazione di ***latitudine*** dev'essere accompagnata da una delle due lettere: N (nord) o S (sud).

Ad es., la latitudine di *Madrid* è 40° 25′ N e la latitudine di *Buenos-Ayres* è 34° 37′ S.

9. — Il ***secondo di latitudine*** è 1/60 di ***miglio,*** cioè: poco più di 30 m.

Quindi, nell'indicare la ***latitudine*** di una ***città,*** ci si può accontentare dei ***gradi*** e dei ***minuti***: altrimenti, bisognerebbe indicare ***latitudini diverse*** per due lati opposti di una ***medesima piazza!***

10. — Tuttavia, geografi ed astronomi dicono, ad es., che:

la latitudine di *Bruxelles* è 50° 51′ 11″ N
e la latitudine di *Roma* è 41° 53′ 59″ N.

Ma essi intendono parlare degli ***edifici*** in cui risiedono gli ***osservatorî astronomici*** di Bruxelles e di Roma (collegio Romano).

E quindi, volendo parlare di quelle due ***città,*** noi diciamo (con ***approssimazione*** al ***mezzo minuto,*** per ***difetto*** o per ***eccesso*** che:

la latitudine di *Bruxelles* è 50° 51′ N
e la latitudine di *Roma* è 41° 54′ N.

11. — ***Pietrogrado*** ed ***Alessandria d'Egitto*** stanno, press'a poco, sullo ***stesso meridiano.***

La latitudine di Pietrogrado è	59° 57′ N
e quella di Alessandria d'Egitto è	31° 12′ N
con una ***differenza*** di	28° 45′
cioè di $(28 \times 60) + 45 = 1725$	

minuti di latitudine o ***miglia geografiche.***

5. — Ora imaginate di tagliare a fette la Terra, come se fosse una mortadella, cioè con tagli *perpendicolari* al suo *asse*.

Ogni taglio determina (press'a poco) una *circonferenza*, che ha il suo *centro* sull'*asse*.

Una di codeste *circonferenze* è l'*equatore*. Ciascun'altra giace in un piano *parallelo* all'*equatore* e perciò la si chiama brevemente: ***parallelo***.

6. — Ogni *latitudine*, diversa da 0° (equatore) e diversa da 90° (poli), determina un *parallelo* ed inversamente.

Ogni *longitudine* determina un *meridiano* ed inversamente.

Sicchè: *una latitudine* ed *una longitudine* determinano *un parallelo* ed *un meridiano*, e perciò determinano *il punto* della *superficie terrestre* in cui essi si tagliano.

7. — *La latitudine* e *la longitudine* di *un punto* della superficie terrestre si chiamano ***le coordinate geografiche*** di quel punto.

Ad es., *le coordinate geografiche* di *Parigi* sono

48° 59′ 49″ N e 2° 20′ 14″ E

cioè: l'osservatorio astronomico di Parigi si trova nel *punto* in cui si incontrano *il parallelo* di *latitudine nord* 48° 59′ 49″ ed *il meridiano* di *longitudine est* 2° 20′ 14″ rispetto al meridiano di *Greenwich*.

8. — Muovendo dall'equatore verso ciascuno dei poli, *diminuisce* la *lunghezza* del *parallelo* e quindi, su di esso, *diminuisce* la *lunghezza* del *grado di longitudine*.

Soltanto per avere un'idea di questa variazione, ecco alcuni risultati dei calcoli di ***Bessel***.

Grado di longitudine alla latitudine	0° =	km. 111,306
. . . . .	10° =	» 109,627
. . . . .	20° =	» 104,635
. . . . .	30° =	» 96,475
. . . . .	40° =	» 85,384
. . . . .	50° =	» 71,687
. . . . .	60° =	» 55,793
. . . . .	70° =	» 38,182
. . . . .	80° =	» 19,291
. . . . .	85° =	» 9,733

9. — ***Il mezzogiorno vero di un luogo è l'istante in cui il Sole***

(nella sua *rotazione apparente* intorno alla Terra) ***passa sul meridiano di quel luogo.***

Il *mezzogiorno vero* è *lo stesso* per tutti i punti di uno *stesso meridiano*.

Frattanto, nel *meridiano opposto* è *la mezzanotte vera*.

Fra 12 *ore*, accadrà il contrario.

10. — In 12 *ore*, il *mezzogiorno vero* si *sposta* di 180° di *longitudine*.

Quindi, in *un'ora*, esso si *sposta* (verso *occidente*) di

$$180^\circ : 12 = 15^\circ$$

di *longitudine*.

Inversamente: per *spostarsi* di 1° di *longitudine*, esso *impiega* 1/15 di *ora*, cioè

$$60_m : 15 = 4_m$$

e quindi per *spostarsi* di 1′ di *longitudine* (che è 1/60 di grado), esso *impiega* (1/60 di 4_m, cioè) 4_s.

11. — Ad es., *le longitudini estreme dell'Europa* sono:

Estremo del Golfo del Cara	68° 5′ E
Capo Dunmore in Irlanda	10° 25′ W
Fra essi intercedono	78° 30′

Perciò, affinchè *il mezzogiorno vero* si *sposti* dal primo al secondo luogo devono trascorrere

$$(78 \times 4)_m + (30 \times 4)_s = 312_m + 120_s = 514_m = 5_h\ 14_m.$$

Si conclude che:

la massima differenza oraria in ***Europa*** è $5_h\ 14_m$.

12. — Il fare che gli orologi segnassero *il mezzogiorno vero* di ciascun luogo, recava gravi inconvenienti, anche nell'interno di un medesimo Stato.

Ad es., così facendo, quando l'orologio di Ventimiglia segnava le 12_h, quello di Roma segnava le $12_h\ 22_m$ e quello di Otranto le $12_h\ 47_m$.

Perciò, ogni Stato regolò gli orologi pubblici (e quindi la separazione fra due giorni consecutivi) secondo *il mezzogiorno della capitale*.

13 — Ma le sempre più diffuse e frequenti comunicazioni (fer-

roviarie e telegrafiche) fecero sorgere fra Stato e Stato quei medesimi inconvenienti che prima esistevano fra città e città d'un medesimo Stato.

Ad es., quando Roma segnava le 12^h, invece Parigi segnava le 11^h 20^m e Pietrogrado le 13^h 11^m.

Perciò, in sèguito ad accordi internazionali, si addivenne alla istituzione dei ***fusi orari***.

14. — ***Il primo fuso orario*** è la parte di superficie terrestre che rimane compresa fra i meridiani 7° 30′ E e 7° 30′ W (sempre rispetto al meridiano di Greenwich).

Quindi, la sua ***ampiezza*** è 15° di ***longitudine*** e perciò la ***differenza oraria*** dei due meridiani estremi è ***un'ora***.

Identica ***ampiezza*** hanno gli altri ***fusi***, sicchè ***la superficie terrestre*** viene decomposta in 24 ***fusi consecutivi***, i quali vengono ***contati*** da ***occidente*** ad ***oriente***, a partire da quello che ha per linea ***mediana*** il ***meridiano di Greenwich***.

15. — Il ***mezzogiorno vero*** della ***mediana*** di un ***fuso*** dovrebb'essere il ***mezzogiorno convenzionale*** per ***tutti i luoghi*** compresi ***entro quel fuso***.

Nell'***istante*** in cui nel fuso I è l'***una*** (dopo mezzanotte), nel fuso II sono le ***due***, nel fuso III sono le ***tre***, ecc.

16. — Gli Stati, che si estendono in ***due fusi*** o più, hanno adottato ***l'ora*** di ***un solo fuso***.

Attualmente, l'ora del ***fuso I*** è ***l'ora legale*** dell'***Inghilterra***, della ***Francia***, del ***Belgio***, dell'***Olanda*** e della ***Spagna***;

l'ora del ***fuso II*** è ***l'ora legale*** dell'***Italia*** (dal primo di novembre del 1893) con la ***Libia***, della ***Svizzera***, della ***Danimarca***, della ***Svezia***, della ***Norvegia***, della ***Germania***, dell'***Austria***, dell'***Ungheria***, e della ***Serbia***;

la ***Bulgaria*** e la ***Rumenia*** hanno ***l'ora legale*** del ***fuso III***, la ***Colonia Eritrea*** e la ***Somalia Italiana*** del ***fuso VI***, il ***Giappone*** del ***fuso X***, ecc.

Problemi

I. — Calcolare ***la massima differenza oraria***:

1. — in ***Africa***, sapendo ch'essa si estende fra il Capo Hafùn (51° 28′ E) ed il Capo Verde (17° 33′ W).

(Nel caso dell'Africa, come già in quello dell'Europa, i gradi e minuti di longitudine che ***intercedono*** fra le due longitudini estreme, una ***orientale*** e l'altra ***occidentale***, sono forniti dalla ***somma*** di queste.)

Risposta: 4_m 36_s.

2. — in ***America***, sapendo ch'essa si estende fra la Punta di Guia (leggi: ***Ghia***) in Brasile (34° 44′ W) ed il Capo Principe di Galles (leggi: ***Gols***) nell'Alasca (160° W).

(Nel caso dell'America, invece, i gradi e minuti di longitudine che ***intercedono*** fra le longitudini estreme, entrambe ***orientali***, sono forniti dalla ***differenza*** di queste.)

Risposta: 8_h 57_m 4_s.

3. — in ***Australia***, sapendo ch'essa si estende fra il Capo Byron (153° 16′ E) ed il Capo Nord Ovest (113° 5′ E).

Risposta: 2_h 40_m 44_s.

4 — in ***Asia***, sapendo ch'essa si estende fra il Capo Orientale (170° W) ed il Capo Baba nel Mare Egeo (26° E).

(Si badi che, rispetto al ***meridiano opposto a Greenwich*** che l'attraversa, l'Asia si estende da (180°—170°) E a (180°-26°) W, cioè da 10° E a 154° W.

Dopo ciò, si procede come per l'Europa e per l'Africa.)

Risposta: 10_h 56_m.

II. — Quando avevo la vostra età, le ***longitudini*** venivano riferite al ***meridiano*** dell'***Isola del Ferro*** (la più occidentale delle Canarie).

In un mio vecchio quaderno di scuola, trovo indicate le seguenti ***longitudini orientali***:

Ancona	28° 51′ 5″	Napoli	29° 35′ 11″
Bologna	26° 40′ 59″	Palermo	28° 41′ 14″
Firenze	26° 35′ 6″	Roma	27° 46′ 21″
Genova	24° 15′ 5″	Torino	23° 1′ 33″
Milano	24° 31′ 14″	Venezia	27° 40′ 9″

Calcolate:

1. — rispetto a Roma, le longitudini E di Ancona, Napoli e Palermo, e le longitudini W delle altre città nominate.

2. — l'ora vera in ciascuna di quelle città, nell'istante in cui a Roma è mezzogiorno.

(Per avere il numero più approssimato di secondi di ora, bisogna dividere per 15 i secondi di grado ed osservare se il doppio del resto è minore o maggiore di 15.)

3. — le longitudini di quelle città, rispetto al meridiano di Greenwich, sapendo che l'Isola del Ferro è a 17° 40′ W di Greenwich.

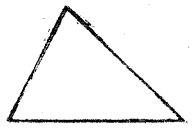
§ 3. — La somma degli angoli di un triangolo

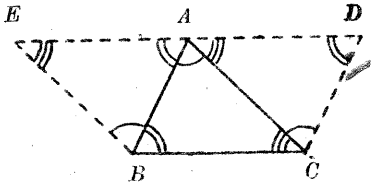
1. — Ogni vertice di un triangolo è vertice di *due angoli*: l'uno *convesso* e l'altro *concavo*.

Ma, abitualmente, ci si occupa soltanto degli angoli *convessi*.

E perciò si dice che:

ogni triangolo ha tre angoli.





2. — Qualunque sia il triangolo ABC, possiamo completare i parallelogrammi $ABCD$ e $BCAE$.

La diagonale AC del primo, lo scinde nei due triangoli eguali ABC e CDA.

La diagonale AB del secondo, lo scinde nei due triangoli eguali ABC e BAE.

Sicchè, i tre triangoli ABC, CDA e BAE sono tutti *eguali* ed in essi risultano *eguali* fra loro i tre angoli segnati allo stesso modo:

tre con *un archetto*, tre con *due archetti* e tre con *tre archetti*.

Perciò, *la somma dei tre angoli* del triangolo ABC è *eguale* alla *somma* dei *tre angoli* di vertice A, perchè anch'essi sono segnati:

uno con *un archetto*, un altro con *due archetti* ed un terzo con *tre archetti*.

Poichè *la somma dei tre angoli* di vertice A è *un angolo piatto*, anche *la somma dei tre angoli* del triangolo ABC è *un angolo piatto*.

3. — Risulta così dimostrato che:

in ogni triangolo, la somma dei tre angoli è eguale ad un angolo piatto.

4. — Quindi:

se si conoscono le ampiezze di *due angoli* di un *triangolo*, basta *toglierne la somma* da 180°, per ottenere l'ampiezza del *terzo angolo*.

Ad es., se due angoli di un triangolo sono 75° e 55° allora il terzo angolo è

$$180^\circ - (75^\circ + 55^\circ) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ.$$

5. — Risulta che:

in ogni triangolo, la somma di due angoli è sempre minore di un angolo piatto.

E perciò:

se un angolo di un triangolo è retto od ottuso, ciascuno degli altri due è acuto.

Sicchè:

in ogni triangolo vi sono almeno due angoli acuti.

6. — Un triangolo si dice:

rettangolo, se ha *un angolo retto*.
ottusangolo, se ha *un angolo ottuso*.
acutangolo, se ha *i tre angoli acuti*.

Nell'es. numerico di poc'anzi, il triangolo era *acutangolo*.

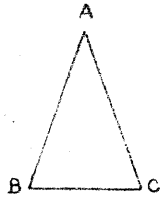
7. — Per quanto precede:

in ogni triangolo rettangolo, i due angoli acuti sono fra loro complementari.

Ad es., se un angolo acuto di un triangolo rettangolo è 54°, allora l'altro angolo acuto è

$$90^\circ - 54^\circ = 36^\circ.$$

8. — Si dice che un *triangolo* è *isoscele* quando ha (almeno) *due lati eguali.*



9. — Se il lato AB è *eguale* al lato AC, si suol dire che il triangolo ABC ha:

per *vertice* il vertice A comune ai due lati eguali,

per *angolo al vertice* quello di vertice A,

per *base* il terzo lato BC

e per *angoli alla base* quei due che hanno i vertici negli estremi B e C della base.

10. — Se ABC è un *triangolo isoscele* col vertice in A, si imagini di staccarlo dal foglio e di *ribaltarlo*, in modo che l'*angolo al vertice* ritorni nella posizione primitiva, ma con *lo scambio dei lati eguali* AB ed AC.

Così facendo, tutto il triangolo ritorna apparentemente nella posizione primitiva, ma con *lo scambio degli angoli alla base*, che perciò sono *eguali.*

11. Dunque:

in ogni triangolo isoscele, gli angoli alla base sono fra loro eguali.

Inoltre, non potendo essere entrambi retti, nè entrambi ottusi:

gli angoli alla base d'ogni triangolo isoscele sono acuti.

12. — Si calcoli l'ampiezza dell'*angolo al vertice* di un triangolo *isoscele*, sapendo che *uno* degli *angoli alla base* è 63°.

L'angolo cercato è

$$180^\circ - (63^\circ \times 2) = 180^\circ - 126^\circ = 54^\circ.$$

13. — Inversamente: si calcoli l'ampiezza di *ciascuno* degli *angoli alla base* di un triangolo *isoscele*, sapendo che *l'angolo al vertice* è 54°.

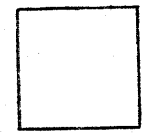
Ciascuno dei due angoli cercati è

$$(180^\circ - 54^\circ) : 2 = 126^\circ : 2 = 63^\circ.$$

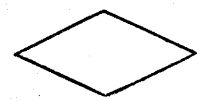
14. — Un *poligono* si dice:

equilatero, quando ha ***tutti i lati eguali,***
equiangolo, quando ha ***tutti gli angoli eguali,***
regolare, quand'è ***equilatero*** ed ***equiangolo.***

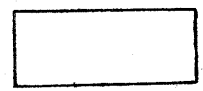
15. — Ad es., fra i *quadrangoli* sapete che:



ogni *quadrato* è equilatero ed equiangolo, e quindi è *regolare.*

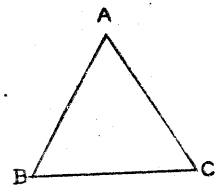


Ma ogni *rombo*, che *non* sia un *quadrato*, è *equilatero* senz'essere equiangolo.



Ed ogni *rettangolo*, che *non* sia un *quadrato*, è *equiangolo* senz'essere equilatero.

16. — Se di un *triangolo equilatero* ABC ho confrontato dapprima soltanto i due lati AB ed AC, trovandoli *eguali*, ho acquistato il diritto di affermare che ABC è *isoscele* col *vertice* in A e di ricavarne la *eguaglianza* dei *due angoli alla base*, cioè di vertici B e C.



Ma, se poi m'accorgo che CA è *eguale* a CB, acquisto anche il diritto di affermare che CAB è *isoscele* col *vertice* in C e di ricavarne la *eguaglianza* dei nuovi *due angoli alla base*, cioè di vertici A e B.

In conclusione, il triangolo ABC ha i *tre angoli eguali.*

17. — Dunque:

ogni triangolo equilatero è anche equiangolo, e quindi è regolare.

18. — Segue che:

ciascun angolo di ogni triangolo equilatero è

$$180^\circ : 3 = 60^\circ.$$

DOMANDE

Di che specie (acutangolo, rettangolo, ottusangolo) è un triangolo, del quale due angoli sono:

1. — 50° e 32°? 2. — 48° e 42°? 3. — 46° e 52°?

Di che specie è un triangolo isoscele, del quale un angolo alla base è:

4. — 70°? 5. — 45°? 6. — 35°?

7. — Di quanti gradi sono gli angoli di un triangolo, se il secondo supera di 5° il primo ed è superato di 5° dal terzo?
(Il secondo è 60°, il primo è $60^\circ - 5^\circ$ ed il terzo è $60^\circ + 5^\circ$).

8. — Se il secondo supera di 19° il primo ed è superato di 19° dal terzo?

Esercizi

1. — Calcolare il terzo angolo di un triangolo, di cui due angoli sono $87^\circ\ 58'\ 59''$ e $72^\circ\ 41'\ 42''$.

2. — Calcolare l'altro angolo acuto di un triangolo rettangolo, di cui un angolo è $62^\circ\ 32'\ 33''$.

3. — Calcolare l'angolo al vertice di un triangolo isoscele, di cui uno degli angoli alla base è $65^\circ\ 35'\ 36''$.

4. — Calcolare ciascuno degli angoli alla base di un triangolo isoscele, di cui l'angolo al vertice è $104^\circ\ 44'\ 46''$.

Problemi

1. — In un triangolo, un angolo è $99^\circ\ 15'\ 16''$ ed un altro angolo è 1/4 del primo.
Si calcoli il terzo angolo.

2. — In un triangolo, un angolo è $87^\circ\ 51'\ 52''$ ed un altro angolo è 7/8 del primo.

Si calcoli il terzo angolo.
(Per calcolare il secondo angolo, si può moltiplicare il primo per 7 e dividere il prodotto per 8.
In altro modo, poichè $52''$ è divisibile per 4, intanto si divide il primo angolo per 4. Poi, il numero dei secondi risultando pari, si divide il quoto per 2. Ottenuto così 1/8 del primo angolo, lo si moltiplica per 7 e si ottiene il secondo.
Ma quanti angoli, eguali ad 1/8 del primo, occorrono per comporre: il primo? il secondo? la loro somma? la quale perciò, senza bisogno di calcolare il secondo angolo, si può ottenere sùbito, moltiplicando per 15 un ottavo del primo.
Meglio ancora, poichè

$$15/8 = 2 - 1/8$$

la somma dei primi due angoli si può ottenere, togliendo 1/8 del primo angolo dal doppio di esso).

3. — Calcolare i due angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che uno di essi è 7/11 dell'altro.
(Quanti angoli, eguali ad 1/11 del secondo angolo cercato, occorrono per comporre: il primo? il secondo? la loro somma, cioè 90°? Quindi, «$90^\circ : 18$» è 1/11 del secondo angolo).

4. — Calcolare gli angoli di un triangolo isoscele, sapendo che l'angolo al vertice è la metà di ciascuno degli angoli alla base.
(Quanti angoli, eguali all'angolo al vertice, occorrono per comporre: ciascuno degli angoli alla base? la somma dei due angoli alla base? la somma dei tre angoli del triangolo, cioè 180°?)

5. — Calcolare gli angoli di un triangolo isoscele, sapendo che l'angolo al vertice è 1/4 di ciascuno degli angoli alla base.

6. — Calcolare gli angoli di un triangolo isoscele, sapendo che l'angolo al vertice è 2/7 di ciascuno degli angoli alla base.
(Quanti angoli, eguali ad 1/7 d'uno degli angoli alla base, occorrono per comporre la somma dei tre angoli del triangolo?).

7. — Calcolare gli angoli di un triangolo, sapendo che due di essi sono: l'uno 5/24 e l'altro 7/24 del terzo.
(Quanti angoli, eguali ad 1/24 del terzo, occorrono per comporre: il primo? il secondo? il terzo? la loro somma, cioè 180°?)

8. Calcolare i tre angoli di un triangolo, sapendo che due di essi sono: l'uno 2/7 e l'altro 9/13 del terzo.
(Ridotte le due frazioni al minimo denominatore comune, il problema diventa simile al precedente).

9. — Calcolare gli angoli di un triangolo, sapendo che il secondo è 5/11 del terzo e che il primo è 4/5 del secondo.

(Qual parte del terzo è il primo? Con altri numeri, si ritorna così al problema 7).

10. — Calcolare gli angoli di un triangolo, sapendo che il secondo è 4/5 del terzo e che il primo è 3/17 della somma degli altri due.

(Quanti angoli, eguali ad 1/5 del terzo, occorrono per comporre la somma del secondo e del terzo?

Quindi, il primo angolo è 3/17 di 9/5 del terzo, cioè: qual parte del terzo?

Con altri numeri, si ritorna così al problema 8).

11. — Calcolare gli angoli acuti di un triangolo rettangolo, sapendo che uno di essi supera l'altro di 20°.

(La loro somma, che dev'essere 90°, supera di 20° il doppio del minore.

E perciò, di quanti gradi è: il doppio del minore? il minore?

L'altro si può calcolare in due modi).

12. — Calcolare gli angoli di un triangolo isoscele, sapendo che uno degli angoli alla base supera di 30° l'angolo al vertice.

(Di quanti gradi: la somma dei due angoli alla base supera il doppio dell'angolo al vertice? la somma dei tre angoli, che dev'essere 180°, supera il triplo dell'angolo al vertice?

E perciò, di quanti gradi è: il triplo dell'angolo al vertice? l'angolo al vertice? ciascuno degli angoli alla base?).

13. — Calcolare gli angoli di un triangolo, sapendo che il secondo supera il primo di 13° ed il terzo supera il secondo di 19°.

(Di quanti gradi: il terzo supera il primo? la somma del secondo e del terzo supera il doppio del primo?

Di altrettanti gradi, la somma dei tre angoli, cioè 180°, deve superare il triplo del primo.

E perciò, di quanti gradi è: il triplo del primo? il primo?)

14. — Calcolare gli angoli di un triangolo, sapendo che il secondo è eguale al primo diminuito di 1° e che il terzo supera di 1° i 6/7 del primo.

(La somma dei tre angoli non cambia, aggiungendo 1° al secondo angolo e togliendo 1° al terzo angolo. Così facendo, invece del triangolo proposto, si verrebbe ad avere un triangolo isoscele, in cui l'angolo al vertice sarebbe i 6/7 di ciascuno degli angoli alla base.

Calcolati gli angoli di questo triangolo isoscele, come nel problema 6, i tre angoli cercati sono: uno degli angoli alla base, l'altro angolo alla base diminuito di 1° e l'angolo al vertice aumentato di 1°).

15. — Calcolare gli angoli di un triangolo, sapendo che il secondo supera di 11° il doppio del primo e che il terzo supera di 7° il triplo del primo.

(Di quanti gradi la somma del secondo e del terzo supera 2+3 volte il primo?

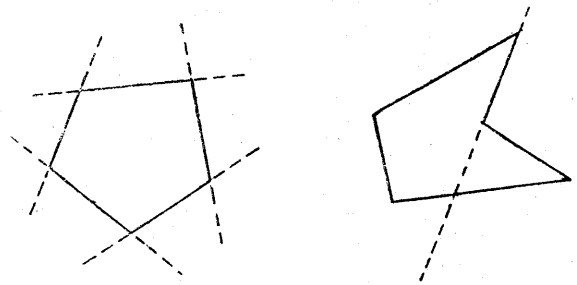
Di altrettanti gradi, la somma dei tre angoli, cioè 180°, supera 1+2+3 volte il primo.

Calcolato il primo, basta rileggere l'enunciato del problema, per trovare gli altri).

§ 4. — Angoli di poligoni

1. — I *triangoli*, i *quadrangoli*, i *pentagoni*, gli *esagoni*, ecc. sono tutti poligoni.

Ogni poligono ha tanti lati, quanti sono i vertici.



2. — Un poligono si dice *convesso* quando *ciascun suo lato* si può *prolungare*, fin che si vuole e da ambo le parti, senza tagliare *alcun altro lato* del poligono.

Altrimenti, il poligono si dice *concavo*.

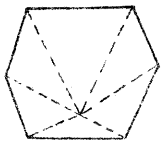
3. — Mi occuperò soltanto di *poligoni convessi*, chiamandoli brevemente *poligoni*.

4. — Ogni vertice di un poligono è vertice di *due angoli*: uno *convesso* e l'altro *concavo*.

Ma, abitualmente, ci si occupa soltanto degli angoli *convessi*.

E perciò, si dice che:

ogni poligono ha tanti angoli, quanti sono i vertici (e cioè quanto sono *i lati*).



5. — Congiungiamo *un punto interno ad un poligono* con *ciascuno* de' suoi *vertici*.

Così facendo, il *poligono* si scinde in *tanti triangoli* quanti sono *i lati del poligono*.

Come sapete, *la somma degli angoli* di *ciascuno* di questi *triangoli è un angolo piatto*.

Quindi, *la somma degli angoli* di *tutti* di questi *triangoli* è *tanti angoli piatti* quanti sono questi triangoli, cioè quanti sono *i lati del poligono*.

Ma *il punto interno*, che abbiamo segnato da principio, risulta *vertice* di *un angolo* di *ciascun triangolo*. E *la somma degli angoli* di cui sto parlando è *un giro*, cioè *due angoli piatti*.

Sicchè: *la somma degli altri due angoli* di *ciascun triangolo* (che è *eguale* alla *somma degli angoli del poligono*) è tanti *angoli piatti* quant'è *il numero dei lati diminuito di 2*.

6. — Risulta così dimostrato che:

la somma degli angoli di un poligono è tanti angoli piatti, quant'è il numero dei lati diminuito di 2.

7. — Quindi, *la somma degli angoli*:

di un *quadrangolo* è 2 angoli piatti, cioè

$$180^\circ \times 2 = 360^\circ$$

di un *pentangolo* è 3 angoli piatti, cioè

$$180^\circ \times 3 = 540^\circ$$

di un *esagono* è 4 angoli piatti, cioè

$$180^\circ \times 4 = 720^\circ$$

ecc., di un *poligono* di 100 *lati* è 98 *angoli piatti*, ecc.

8. — Nella *dimostrazione* di poc'anzi, abbiamo *sottinteso* che il poligono avesse almeno 4 lati.

Ma la *regola* è *vera* anche se i lati sono 3.

Infatti, $3 - 2 = 1$

e voi sapete che:

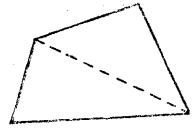
la somma degli angoli di un triangolo è 1 angolo piatto.

9. — Allora, — osserva Sventatelli — la dimostrazione per i *poligoni* rende *inutile* quella per i soli *triangoli*.

— No, perchè la dimostrazione di poc'anzi presuppone che *si sappia* quant'è *la somma degli angoli* d'un *triangolo*.

10. — Io, invece, — confessa Fiacchetti — ho capito bene la dimostrazione per il *triangolo*. Ma quella per il *poligono* mi è rimasta un po' confusa.

— La rileggerai tranquillamente a casa e ti riuscirà chiara. Ma, per contentarti, eccoti una dimostrazione più semplice, per il caso particolare del *quadrangolo*.



La *somma degli angoli* del *quadrangolo* è eguale alla *somma* degli *angoli* dei *due triangoli* in cui lo scinde una sua *diagonale*. E perciò, la detta somma è 2 *angoli piatti*, cioè *un giro*.

11. — Hai capito? — domando a Fiacchetti.

— Si, signore.

— Ed allora, soffermiamoci un po' a discorrere di *quadrangoli*. Che ampiezza ha *ciascun angolo* di un quadrangolo *equiangolo*?

— Un *quarto* di *giro*.

— Cioè?

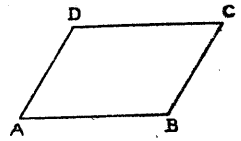
— Un angolo *retto*.

— E quindi, il quadrangolo è ...?

— ... un *rettangolo.*

— Benissimo. Tu sapevi che ogni *rettangolo* è un quadrangolo *equiangolo.* Inversamente, ora hai appreso che:

ogni quadrangolo equiangolo è un rettangolo.



12. — Adesso vieni a disegnare alla lavagna un *parallelogramma,* che non sia un rettangolo, e chiamalo *ABCD.*

Fiacchetti eseguisce.

— Segna una delle due *diagonali,* ad es. *BD.* Rammenti come risultano i triangoli *ABD* e *BCD*?

— Eguali.

— E precisamente: se tu imagini di staccare il triangolo *BCD* e di girarlo in modo da farlo *coincidere* col (cioè: *sovrapporre esattamente* al) triangolo *ABD,* dove andrà a stare l'angolo di vertice *C*?

— Verrà a *coincidere* con l'angolo di vertice *A.*

— Sicchè, nel parallelogramma *ABCD,* i due angoli di vertici *A* e *C* sono fra loro *eguali.* Similmente, se invece ti avessi fatto segnare la diagonale *AC,* avresti concluso che gli angoli di vertici *B* e *D* sono fra loro *eguali.* Rammenta dunque che:

in ogni parallelogramma, ciascun angolo è eguale al suo opposto.

13. — Ora propongo a Pierino di calcolare gli altri angoli di un *parallelogramma,* sapendo che uno di essi è 70°.

Egli ragiona così:

— Anche l'angolo opposto è 70° e perciò la *somma* di quei *due* angoli è

$$70^\circ \times 2 = 140^\circ.$$

Quindi, poichè la *somma* dei *quattro* angoli dev'essere 360°, si conclude che la *somma* degli *altri due* è

$$360^\circ - 140^\circ = 220^\circ$$

e che *ciascuno* di essi è

$$220^\circ : 2 = 110^\circ.$$

— Il risultato è giusto, — gli dico — ma lo si ottiene più rapidamente, così:

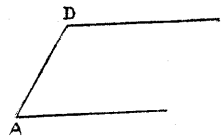
$$180^\circ - 70^\circ = 110^\circ.$$

— Qualunque sia l'angolo dato? — chiede Pierino, sorpreso che mi sia bastata *una* operazione, invece di *tre*

— Certamente. Infatti: *la somma di due angoli consecutivi* di un *parallelogramma,* ciascuno dei quali è eguale al suo opposto, dev'essere *la metà della somma dei quattro angoli,* cioè la metà di due angoli piatti, cioè *un angolo piatto.* E perciò:

in ogni parallelogramma, due angoli consecutivi sono fra loro supplementari;

e quindi in ogni *parallelogramma obliquo* cioè *non rettangolo,* vi sono due angoli *acuti* (opposti ed eguali) e due angoli *ottusi* (opposti ed eguali).



14. — Frattanto, Fiacchetti è rimasto alla lavagna, davanti al suo *parallelogramma.*

Ne profitto, per fargli cancellare il lato *BC*

Poi gli domando:

— Come sono fra loro *i due angoli* di vertici *A* e *D*?

— Non saprei — risponde prudentemente.

— Eppure, lo dovresti sapere: non erano *due angoli consecutivi* di un *parallelogramma*?

Silenzio.

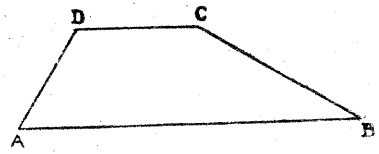
— Che cosa ne dice Pierino?

— Che sono *supplementari.*

— Hai capito, Fiacchetti?

— Sì, signore.

— Ed allora, completa la figura in modo che diventi un *trapezio*, che chiameremo *ABCD*.



Fiacchetti eseguisce.

— Rammenti come si chiamano i suoi due lati paralleli *AB* e *DC*?

— Sono *le due basi* del trapezio.

— E gli altri due lati, *AD* e *BC*?

— Non rammento.

— Sono *i due lati concorrenti* del trapezio (perchè, prolungandoli, concorrono in un punto). Ora sapresti dirmi come sono fra loro *i due angoli* di vertici *B* e *C*?

— Suppongo che siano *supplementari.*

— Perchè lo *supponi* e perchè non ne sei *certo*?

— Lo *suppongo*, perchè anche gli angoli di vertici *A* e *D* sono supplementari. Ma non ne sono *certo*, perchè la figura « non è eguale dalle due parti ».

— Vuoi dire che non è ***simmetrica***, perchè i due lati *concorrenti AD* e *BC* non sono egualmente ***inclinati*** sulle *basi*? E, quindi, non sei *certo* che quanto abbiamo detto a proposito di *AD* debba valere anche per *BC*. È così?

— Non sapevo esprimermi, ma volevo dire così.

— Ebbene, lodo la tua prudenza. Ma tu stesso dissiperai il tuo dubbio, rispondendo alle mie domande. Quant'è *la somma degli angoli* d'ogni *quadrangolo*?

— Due angoli piatti.

Ora, se *due* di essi sono *supplementari*, cioè se la loro somma è...

— ...un angolo piatto,...

— ...allora quant'è la somma degli *altri due*?

— Un angolo piatto.

— E perciò, anch'essi... sono fra loro...

— ...*supplementari.*

— Vedi, che l'hai detto tu! Ed ora, lo *supponi* soltanto o ne sei *certo*?

— Ne sono *certo.*

— Possiamo dunque concludere che:

in ogni trapezio, ciascuno dei lati concorrenti forma, con le due basi, due angoli supplementari.

15. — Quindi, ad es., se una base di un trapezio forma coi due lati concorrenti un angolo di 65° ed uno di 55°, che angoli formerà con essi l'altra base?

I due angoli cercati sono:

$$180^\circ - 65^\circ = 115^\circ \qquad \text{e} \qquad 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ.$$

16. — Per compito di casa, avevo dato da calcolare ***l'angolo*** (cioè: uno qualunque degli angoli eguali) di un poligono *equiangolo* di 48 lati.

Quasi tutti avevano eseguito il calcolo esattamente, ma soltanto Pierino aveva indicato tutte le operazioni prima di eseguirle ed aveva fatto poi le opportune semplificazioni, così:

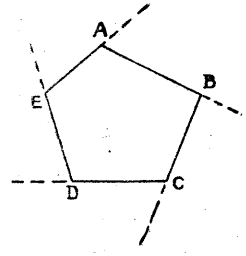
$$\frac{180^\circ\ (48-2)}{48} = \frac{15^\circ \times 46}{4} = \frac{15^\circ \times 23}{2} = \frac{345^\circ}{2} = 172^\circ 30'.$$

— Va bene? — mi chiese, mentre guardavo il suo quaderno.

— Va benissimo — risposi. — Ed anzi, il tuo lavoro è il migliore di quanti ho visto.

— Vengo a rifarlo alla lavagna?

— Non sùbito. Prima desidero insegnarvi qualche altra proprietà dei poligoni.



17. — Ora disegno un *poligono convesso*, ad es. *ABCDE*, e poi *prolungo* il lato *AB* dalla parte di *B*, il lato *BC* dalla parte di *C*, il lato *CD* dalla parte

di D, il lato DE dalla parte di E ed il lato EA dalla parte di A.

Ho costruito così quelli che si chiamano: gli angoli ***esterni*** del poligono.

Per contrapposto, ove siano a temere equivoci, quelli che solitamente si chiamano «angoli del poligono» si diranno: ***interni***.

Sicchè:

ogni angolo esterno di un poligono è il supplemento dell'angolo interno, ad esso adiacente.

18. — Quindi: *la somma* degli angoli *interni ed esterni* insieme, è tanti *angoli piatti*, quant'è *il numero dei lati*.

Ma *la somma* dei soli angoli *interni* è tanti *angoli piatti*, quant'è *il numero dei lati diminuito di 2*.

E perciò, *la somma* dei soli angoli *esterni* dev'essere *2 angoli piatti*.

19. — Risulta così dimostrato che:

in ogni poligono, la somma degli angoli esterni è un giro.

E non si dimentichi che qui si parla soltanto di poligoni *convessi*.

20. — Ma allora, — dice Pierino, che teme di non aver capito — *la somma* degli angoli *esterni* è *la stessa* qualunque sia *il numero dei lati*?

— Precisamente. Ed il ragionamento che ho fatto, e che rileggerai, dovrebbe bastare a convincertene.

Ma poichè, pur parlando di un poligono qualunque, ho disegnato un *pentagono*, dimmi quant'è *la somma* de' suoi angoli *interni ed esterni*, insieme?

— 5 angoli piatti.

— E dei soli angoli *interni*?

— «5 — 2», cioè 3, angoli piatti.

— E quindi: quant'è *la somma* dei soli angoli *esterni* di un pentagono?

— «5 — 3», cioè 2, angoli piatti.

— Cioè: *un giro*. E, se invece avessi disegnato un poligono di 100 lati, quanto sarebbe stata *la somma* de' suoi angoli *interni ed esterni*, insieme?

— 100 angoli piatti.

— E dei soli angoli *interni*?

— 98 angoli piatti.

— E quindi: quant'è *la somma* dei soli angoli *esterni* di un poligono di 100 lati?

— «100 — 98», cioè 2, angoli piatti.

— Cioè: *un giro*. Ora, sei persuaso?

— Sì, signore.

21. — Ora, Pierino, vieni a rifare alla lavagna il compito di casa.

Poi ch'ebbe finito, commentai:

— Ti ripeto che hai fatto benissimo. Ma, ora, puoi far meglio.

— E come?

— Anche nel tuo *poligono equiangolo* di 48 lati, la somma degli angoli *esterni* è 360°. Quant'è, dunque, il suo angolo *esterno* (cioè: uno qualunque degli angoli esterni eguali)?

— È $360° : 48 = 15° : 2 = 7° 30'$.

— E, quindi, quant'è l'angolo *interno*?

— È $180° - 7° 30' = 172° 30'$.

— Sicchè:

in ogni poligono equiangolo, l'angolo esterno è il quoto di 360° per il numero dei lati, e l'angolo interno si ottiene poi quale supplemento dell'angolo esterno.

22. — E così avete avuto un esempio che «chi più sa, meglio fa».

Ma il procedimento ora seguìto, oltre al merito d'essere più rapido, ha quello ben maggiore d'essere *invertibile*.

Supponete, infatti, di aver dimenticato *il numero dei lati* del *poligono equiangolo* di cui ci siamo occupati, ma di aver annotato che il suo *angolo interno* è 172° 30′.

Invertendo il procedimento di poc'anzi, l'angolo *esterno* è

$$180^\circ - 172^\circ\ 30' = 7^\circ\ 30'$$

e quindi *il numero dei lati* è

$$360^\circ : 7^\circ\ 30' = 360^\circ : \frac{15^\circ}{2} = \frac{360^\circ \times 2}{15^\circ} = 24 \times 2 = 48.$$

23. — Dunque:

il numero dei lati di un poligono equiangolo è il quoto di 360° per il supplemento del suo angolo interno.

— E se la divisione non riesce esatta? — domanda Pierino.

— Se il quoto non è un numero naturale, non esiste alcun poligono equiangolo con quell'angolo interno.

DOMANDE

1. — Di che specie è il quarto angolo di un quadrangolo, di cui tre angoli sono 115°, 85°, 70°?

2. — Se uno di due angoli consecutivi di un parallelogramma è 50°, quant'è l'altro?

3. — Se uno degli angoli, che le basi di un trapezio formano con uno dei lati concorrenti, è 75°, quant'è l'altro?

4. — Quant'è la somma degli angoli (interni) di un ottagono? di un decagono? di un poligono di 12 lati? di 102 lati?
(Si pensi la somma domandata, prima in angoli piatti e poi in gradi).

5. — Quanti lati ha un poligono, in cui la somma degli angoli (interni) è 5 angoli piatti? 7 angoli piatti? 1980°? 2700°?

6. — Quant'è l'angolo esterno di un poligono equiangolo di 12 lati? di 15 lati? di 18 lati? di 20 lati? di 24 lati? di 30 lati? di 36 lati? di 60 lati? di 72 lati? di 720 lati?

7. — Quant'è l'angolo (interno) di un pentagono equiangolo? di un esagono equiangolo? di un ottagono equiangolo? di un decagono equiangolo?
(Si risponda, operando mentalmente in due modi: dividendo la somma degli angoli interni per il loro numero, ovvero calcolando il supplemento dell'angolo esterno).

8. — Quanti lati ha un poligono (convesso) equiangolo, in cui l'angolo esterno è 1°? 2°? 3°? 4°? 5°? 6°? 8°? 9°?

9. — Quanti lati ha un poligono equiangolo, in cui l'angolo (interno) è 170°? 168°? 165°? 160°?

10. — È possibile che un poligono convesso abbia più di tre angoli (interni) acuti?
(Se avesse 4 angoli interni acuti, avrebbe altrettanti angoli estern ottusi. Com'è, rispetto al giro, la somma di 4 angoli ottusi?)

Esercizi

1. — Calcolare un angolo di un parallelogramma, sapendo che uno degli angoli consecutivi all'angolo cercato è 116° 6′ 17″.

2. — Calcolare gli angoli che una base di un trapezio forma coi due lati concorrenti, sapendo che questi formano con l'altra base gli angoli:

148° 18′ 9″ e 128° 18′ 29″.

3. — Calcolare il quarto angolo di un quadrangolo, di cui tre angoli sono:

93° 4′ 36″ 89° 59′ 29″ 88° 58′ 28″.

4. — Calcolare successivamente l'angolo esterno e l'angolo interno d'un poligono equiangolo di lati 16, 32, 64, 128, 256.
(Per l'ultimo, si calcolino anche i decimi di secondo).

5. — Calcolare il numero dei lati di un poligono equiangolo, il cui angolo (interno) è 165° 36′.
(Si calcoli l'angolo esterno adiacente, prima in gradi e minuti, poi in gradi e frazione irriducibile di grado, poi in frazione impropria di grado, e lo si assuma quale divisore di 360°. Il quoto è il numero cercato).

6. — Calcolare il numero dei lati di un poligono equiangolo, di cui rammento che l'angolo è 175° 15′ ovvero 176° 15′.

Supponete, infatti, di aver dimenticato *il numero dei lati* del *poligono equiangolo* di cui ci siamo occupati, ma di aver annotato che il suo *angolo interno* è 172° 30′.

Invertendo il procedimento di poc'anzi, l'angolo *esterno* è

$$180° - 172° 30' = 7° 30'$$

e quindi *il numero dei lati* è

$$360° : 7° 30' = 360° : \frac{15°}{2} = \frac{360° \times 2}{15°} = 24 \times 2 = 48.$$

23. — Dunque:

il numero dei lati di un poligono equiangolo è il quoto di 360° per il supplemento del suo angolo interno.

— E se la divisione non riesce esatta? — domanda Pierino.

— Se il quoto non è un numero naturale, non esiste alcun poligono equiangolo con quell'angolo interno.

DOMANDE

1. — Di che specie è il quarto angolo di un quadrangolo, di cui tre angoli sono 115°, 85°, 70°?

2. — Se uno di due angoli consecutivi di un parallelogramma è 50°, quant'è l'altro?

3. — Se uno degli angoli, che le basi di un trapezio formano con uno dei lati concorrenti, è 75°, quant'è l'altro?

4. — Quant'è la somma degli angoli (interni) di un ottagono? di un decagono? di un poligono di 12 lati? di 102 lati?
(Si pensi la somma domandata, prima in angoli piatti e poi in gradi).

5. — Quanti lati ha un poligono, in cui la somma degli angoli (interni) è 5 angoli piatti? 7 angoli piatti? 1980°? 2700°?

6. — Quant'è l'angolo esterno di un poligono equiangolo di 12 lati? di 15 lati? di 18 lati? di 20 lati? di 24 lati? di 30 lati? di 36 lati? di 60 lati? di 72 lati? di 720 lati?

7. — Quant'è l'angolo (interno) di un pentagono equiangolo? di un esagono equiangolo? di un ottagono equiangolo? di un decagono equiangolo?
(Si risponda, operando mentalmente in due modi: dividendo la somma degli angoli interni per il loro numero, ovvero calcolando il supplemento dell'angolo esterno).

8. — Quanti lati ha un poligono (convesso) equiangolo, in cui l'angolo esterno è 1°? 2°? 3°? 4°? 5°? 6°? 8°? 9°?

9. — Quanti lati ha un poligono equiangolo, in cui l'angolo (interno) è 170°? 168°? 165°? 160°?

10. — È possibile che un poligono convesso abbia più di tre angoli (interni) acuti?
(Se avesse 4 angoli interni acuti, avrebbe altrettanti angoli estern ottusi. Com'è, rispetto al giro, la somma di 4 angoli ottusi?)

Esercizi

1. — Calcolare un angolo di un parallelogramma, sapendo che uno degli angoli consecutivi all'angolo cercato è 116° 6′ 17″.

2. — Calcolare gli angoli che una base di un trapezio forma coi due lati concorrenti, sapendo che questi formano con l'altra base gli angoli:

148° 18′ 9″ e 128° 18′ 29″.

3. — Calcolare il quarto angolo di un quadrangolo, di cui tre angoli sono:

93° 4′ 36″ 89° 59′ 29″ 88° 58′ 28″.

4. — Calcolare successivamente l'angolo esterno e l'angolo interno d'un poligono equiangolo di lati 16, 32, 64, 128, 256.
(Per l'ultimo, si calcolino anche i decimi di secondo).

5. — Calcolare il numero dei lati di un poligono equiangolo, il cui angolo (interno) è 165° 36′.
(Si calcoli l'angolo esterno adiacente, prima in gradi e minuti, poi in gradi e frazione irriducibile di grado, poi in frazione impropria di grado, e lo si assuma quale divisore di 360°. Il quoto è il numero cercato).

6. — Calcolare il numero dei lati di un poligono equiangolo, di cui rammento che l'angolo è 175° 15′ ovvero 176° 15′.

(Si operi con ciascuno dei due angoli, come nell'Esercizio precedente. Uno solo dei due quoti è un numero naturale e quindi esso soltanto risolve la questione).

7. — Calcolare il numero dei lati di un poligono equiangolo, il cui angolo è 175° 33′ 20″.

(Si calcoli l'angolo esterno, lo si trasformi in numero intero di secondi e lo si assuma quale divisore di 360° trasformati in secondi. Per le semplificazioni successive, è preferibile indicare la seconda trasformazione, senza eseguirla).

Problemi

I. — Calcolare gli angoli di un quadrangolo, sapendo che, nell'ordine crescente delle loro ampiezze:

1. — il secondo, il terzo ed il quarto sono il doppio, il triplo, il quadruplo del primo.

(Di quanti angoli, eguali al primo, si compone la loro somma?)

2. — ciascuno, a cominciare dal secondo, è il doppio del precedente.

3. — ciascuno, a cominciare dal secondo, è il triplo del precedente.

4. — e diminuendo ciascuno di 6°, ognuno, sino al terzo, diventa 3/4 del successivo.

(Dopo aver diminuito di 6° ciascuno dei quattro angoli: quale frazione del quarto angolo è diventato ciascuno degli altri?

quanti sessantaquattresimi del quarto angolo è diventato ciascuno di essi? è diventata la loro somma?

di quanti gradi è diventata la loro somma? per che numero bisogna dividerla, affinchè il quoto, in gradi minuti e secondi, dia 1/64 del quarto angolo?

quali sono i quattro numeri per ciascuno dei quali bisogna moltiplicare 1/64 del quarto angolo, per ottenere i quattro angoli?

Per ultimo, a ciascuno di questi si aggiunga 6° e si verifichi se la somma è 360°).

II. — Calcolare gli angoli di un pentagono, sapendo che, nell'ordine crescente delle loro ampiezze:

1. — il secondo, il terzo, il quarto ed il quinto sono 2, 3, 4, 5 volte il primo.

2. — ed aggiungendo 16° a ciascuno di essi, ognuno, a cominciare dal secondo, diventa il doppio del precedente.

RIASSUNTO

Capitolo I. — I numeri razionali

1. — Ciascuna frazione indica il quoto de' suoi due termini, anche se il primo non è divisibile (esattamente) per il secondo (che dev'essere diverso da zero).

2. — Si dice ordinaria ogni frazione, i cui due termini (numeratore e denominatore) sono numeri naturali.

3. — Ogni frazione ordinaria si dice propria od impropria, secondochè il suo numeratore è o non è minore del suo denominatore.

4. — Tra le frazioni proprie vi sono le unità frazionarie (o parti aliquote), cioè le frazioni aventi per numeratore 1 e per denominatore un numero diverso da 1.

5. — Tra le frazioni improprie vi sono le frazioni apparenti, cioè le frazioni il cui numeratore è divisibile (esattamente) per il denominatore.

6. — Ogni frazione apparente si può ridurre a numero naturale (eseguendo la divisione del numeratore per il denominatore).

7. — Inversamente: — ogni numero naturale si può trasformare in frazione apparente, con un denominatore qualunque (il corrispondente numeratore è il prodotto del numero naturale per il denominatore).

8. — Ogni frazione impropria (che non sia apparente) si può trasformare in numero misto, cioè nella somma di un numero naturale (che si chiama la sua parte intera) e di una frazione propria (che si chiama la sua parte frazionaria).

La sua parte intera è il quoziente della divisione del numeratore per il denominatore della frazione impropria, mentre la sua parte frazionaria (necessariamente propria) ha per numeratore il resto di tale divisione e per denominatore quello stesso della frazione trasformata.

9. — Inversamente: — ogni numero misto è trasformabile in frazione impropria (il denominatore è quello stesso della parte frazionaria; il numeratore si ottiene moltiplicando la parte intera per il denominatore e poi aggiungendo al prodotto il numeratore della parte frazionaria).

10. — Si chiama numero razionale ogni frazione ordinaria ed ogni altra scrittura che si possa trasformare in frazione ordinaria.

Perciò, sono numeri razionali anche i numeri naturali ed i numeri misti.

11. — Se ambo i termini di una frazione vengono moltiplicati per uno stesso numero (diverso da 1) o vengono divisi per un loro divisore comune (diverso da 1), la frazione cambia soltanto di forma.

12. — Ogni frazione ordinaria si dice riducibile o irriducibile, secondochè i suoi due termini hanno o non hanno qualche divisore comune (diverso da 1), cioè: secondochè essi non sono o sono primi fra loro.

13. — Semplificare una frazione (riducibile) significa dividerne ambo i termini per un loro divisore comune (diverso da 1).

Così facendo, i nuovi suoi termini risultano rispettivamente minori dei termini dati.

14. — Si riduce una frazione ordinaria ai minimi termini, trasformandola in frazione irriducibile.

A tale scopo, si può semplificarla successivamente, ovvero si possono dividere separatamente i suoi due termini per il loro massimo divisore comune.

15. — Allorchè il risultato di un calcolo è un numero razionale, occorrendo lo si deve trasformare in modo da ottenere un numero naturale ovvero una frazione propria irriducibile ovvero un numero misto con la parte frazionaria irriducibile.

16. — La successione delle frazioni eguali ad una frazione data (nell'ordine crescente di ciascuno de' suoi due termini) si ricava dalla frazione irriducibile eguale alla frazione data, moltiplicandone ambo i termini per i numeri naturali, a cominciare da 1.

17. — Una frazione può assumere un nuovo denominatore prestabilito, allorchè questo è divisibile per il denominatore della frazione irriducibile eguale a quella da trasformare.

Nel caso favorevole e supposto che la frazione da trasformare sia già ridotta ai minimi termini:

per calcolare il nuovo numeratore, si divide il nuovo denominatore per quello dato e poi si moltiplica il numeratore dato per il quoto ottenuto.

18. — Il minimo denominatore comune di quante e quali si vogliano frazioni irriducibili è il minimo multiplo comune dei loro denominatori.

19. — Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, allora una di esse è minore o eguale o maggiore dell'altra, secondochè il numeratore della prima è minore o eguale o maggiore del numeratore della seconda.

20. — Segue che: — se due frazioni hanno denominatori diversi, allora una di esse è minore o eguale o maggiore dell' altra, secondochè il prodotto del primo numeratore per il secondo denominatore è minore o eguale o maggiore del prodotto del secondo numeratore per il primo denominatore.

21. — Segue inoltre che:

meratore la differenza tra il denominatore ed il numeratore della frazione data.

9. — La differenza tra un numero naturale, maggiore di 1, ed una frazione propria è il numero misto che ha per parte intera il numero naturale diminuito di 1 e per parte frazionaria il complemento della frazione.

10. — Risultano valide per tutti i numeri razionali le seguenti proprietà, già note soltanto per i numeri naturali:

l'addizione è sempre eseguibile, è commutativa ed è associativa;

la sottrazione è inversa dell'addizione e questa è inversa di quella;

aggiungendo o togliendo uno stesso numero al sottraendo e al sottrattore, la differenza non cambia;

se ad un primo numero si deve successivamente aggiungerne un secondo e toglierne un terzo, è lecito di invertire l'ordine delle due operazioni (purchè il terzo numero non sia maggiore del primo);

è indifferente che da un numero si sottraggano successivamente parecchi numeri, ovvero che da esso si sottragga la loro somma;

una somma di differenze è eguale alla differenza tra la somma dei sottraendi e la somma dei sottrattori.

11. — Aggiungendo (o togliendo) uno stesso numero ad ambo i termini di una frazione diversa da 1, essa si avvicina ad 1 (od allontana da 1), rimanendo propria od impropria.

Capitolo III. — Moltiplicazione e divisione

1. — Per moltiplicare una frazione per un numero naturale (od un numero naturale per una frazione), basta moltiplicare per esso il numeratore (lasciando invariato il denominatore).

In particolare: —il prodotto di una frazione per il suo denominatore è eguale al suo numeratore.

2. — Il prodotto di quante si vogliano frazioni è quella frazione che ha per numeratore il prodotto dei numeratori e per denominatore il prodotto dei denominatori.

Se tra i fattori vi è qualche numero naturale, lo si trascrive tra i fattori del numeratore.

3. — Risultano valide per tutti i numeri razionali le seguenti proprietà, già note soltanto per i numeri naturali:

se il moltiplicatore è un numero naturale non minore di 2, il prodotto è eguale alla somma di tanti addendi eguali al moltiplicando, quanti ne indica il moltiplicatore;

se uno dei due fattori è 1, il prodotto è eguale all'altro;

se uno dei due fattori è 0, anche il prodotto è 0;

la moltiplicazione è sempre eseguibile, è commutativa ed è associativa;

la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione ed alla sottrazione.

4. — Se tra i fattori di un prodotto vi è qualche numero misto, giova trasformarlo in frazione impropria (a meno che ve ne sia uno solo e si preferisca moltiplicare separatamente la sua parte intera e la sua parte frazionaria per il prodotto di tutti gli altri fattori, già calcolato in forma irriducibile).

5. — Allorchè si moltiplicano fra loro due numeri razionali (il primo dei quali diverso da zero), il prodotto risulta maggiore o minore del moltiplicando, secondochè il moltiplicatore è maggiore o minore di 1.

6. — Se due frazioni sono diverse, allora la frazione, che ha per numeratore la somma dei loro numeratori e per denominatore la somma dei loro denominatori, è compresa tra le due frazioni date (cioè: è maggiore della minore e minore della maggiore).

Sicchè: non vi sono numeri razionali consecutivi (cioè: tra i quali non sia compreso alcun numero razionale).

7. — Due numeri razionali si dicono fra loro reciproci, allorchè il loro prodotto è 1.

Lo zero è il solo numero razionale che non abbia reciproco.

8. — Si ottiene il reciproco di una frazione, scambiando tra loro il numeratore ed il denominatore.

9. — In particolare: — il reciproco di un'unità frazionaria è il suo denominatore.

Inversamente: — il reciproco di un numero naturale è l'unità frazionaria, che ha per denominatore quel numero naturale.

10. — Si ottiene il reciproco di un numero misto, trasformandolo anzitutto in frazione impropria.

11. — Per dividere una frazione per un numero naturale, basta moltiplicare per esso il denominatore (lasciando invariato il numeratore).

Ma, quando si possa, è preferibile dividere per esso il numeratore (lasciando invariato il denominatore).

12. — Il quoto di due numeri razionali (il secondo dei quali diverso da zero) è eguale al prodotto del primo per il reciproco del secondo.

13. — In particolare: — il quoto di due frazioni aventi lo stesso denominatore è eguale al quoto dei loro numeratori.

14. — Risultano valide per tutti i numeri razionali le seguenti proprietà, già note soltanto per i numeri naturali:

la divisione è inversa della moltiplicazione e questa è inversa di quella;

un quoto non cambia, allorchè il dividendo e il divisore vengono moltiplicati o divisi per uno stesso numero (diverso da zero);

se un primo numero si deve successivamente moltiplicare per un secondo e dividere per un terzo, è lecito invertire l'ordine delle due operazioni;

è indifferente che un numero si divida successivamente per parecchi numeri, ovvero che lo si divida per il loro prodotto;

un prodotto di quoti è eguale al quoto del prodotto dei dividendi e del prodotto dei divisori;

la divisione è distributiva rispetto all'addizione ed alla sottrazione.

15. — Se il dividendo o il divisore o ciascuno di essi è un numero misto, anzitutto giova trasformarlo in frazione impropria.

A meno che si tratti di dividere un numero misto per un numero naturale e che la parte intera di quello sia divisibile per questo: nel qual caso, è preferibile dividere separatamente le due parti del numero misto e poi addizionare i due quoti.

16. — Supposto il divisore diverso da zero:

anche *il quoto* di due numeri razionali è *sempre* un numero razionale.

E fu appunto per far diventare *sempre eseguibile* anche *la divisione* (esatta), che furono inventati i numeri *razionali.*

Capitolo IV. — Frazioni decimali e numeri decimali

1. — Si chiama frazione decimale ogni frazione ordinaria, che abbia per denominatore una potenza di 10.

2. — Se due frazioni decimali hanno denominatori diversi, allora il maggiore di essi è il minimo denominatore comune delle due frazioni.

3. — Si chiama numero decimale la scrittura abbreviata di una frazione decimale, consistente nel solo numeratore, fra le cui cifre (eventualmente precedute da alcuni zeri) viene inserita una virgola, in modo che alla destra di questa rimangano tante cifre quanti erano gli zeri del denominatore.

4. — In ogni numero decimale, la virgola lascia a sinistra la parte intera, a destra la parte decimale.

Dalla virgola verso destra, le cifre decimali designano ordinatamente: decimi, centesimi, millesimi, ecc.

5.—Un numero decimale non cambia, scrivendo quanti si vogliano zeri a destra della sua parte decimale.

Inversamente: — se in un numero decimale vi sono zeri finali, è lecito cancellarne quanti si vogliano.

6. — Per addizionare o sottrarre numeri decimali, si scrivono questi in righe successive, in modo che le virgole risultino in colonna. Poi si addizionano o sottraggono, come se non vi fossero le virgole e come se i posti vuoti fossero occupati da altrettanti zeri. Per ultimo, si inserisce una virgola tra le cifre della somma o della differenza, in colonna con le virgole dei numeri dati.

7. — Si moltiplica o si divide un numero decimale per una potenza di 10, spostando la virgola verso destra o verso sinistra, di tante cifre quant'è l'esponente della potenza di 10 (e, quando occorre, completando la scrittura con zeri).

8. — La moltiplicazione di due numeri decimali si eseguisce come se in essi non vi fossero le virgole. Poi, si inserisce una virgola nel prodotto, in modo che le sue cifre decimali risultino tante, quante sono insieme quelle dei due fattori.

9. — La divisione di un numero naturale o decimale, per un numero naturale o decimale, presenta una grande varietà di casi: che il testo chiarisce con esempi, mentre una regola ingombrante non farebbe che oscurarli.

Capitolo V. — Numeri decimali finiti od accorciati

1. — Per accorciare un numero decimale:

si sceglie l'approssimazione per difetto, cioè si cancellano senz'altro le cifre decimali in soprannumero, allorchè la prima di queste è minore di 5;

altrimenti (cioè: se la prima cifra che si sta per trascurare non è minore di 5), si sceglie l'approssimazione per eccesso, cioè si cancellano le cifre decimali in soprannumero, ma si aggiunge 1 all'ultima cifra che si conserva.

2. — Allorchè si interrompe una divisione, con quoziente decimale e resto diverso da zero, si sceglie l'approssimazione per difetto o per eccesso, secondochè il doppio del resto è o non è minore del divisore (in questo confronto, il resto e il divisore vanno considerati come numeri naturali).

3. — D'ora in poi, i numeri che abbiamo detto decimali, senz'altro, saranno detti: decimali finiti.

4. — Tra le frazioni ordinarie irriducibili, le sole che siano trasformabili in frazioni decimali (e quindi in numeri decimali finiti) sono quelle il cui denominatore non ha alcun divisore primo, che sia diverso da 2 e da 5.

5. — Il peso specifico di un solido o liquido omogeneo è il peso in grammi di un suo centimetro cubo.

Il peso specifico di un aeriforme omogeneo è il peso in grammi di un suo decimetro cubo.

Capitolo VI. — Numeri decimali periodici e loro generatrici

1. — Si genera un numero decimale periodico, allorchè si divide il numeratore di una frazione irriducibile per il suo denominatore, se questo è divisibile per qualche numero primo diverso da 2 e da 5.

Tale frazione si chiama la generatrice del numero decimale periodico.

Ogni frazione eguale a questa è una generatrice di quel numero decimale periodico.

2. — Si chiama periodo la successione di cifre che ricomparirebbe senza fine, proseguendo la detta divisione.

Si chiama antiperiodo la successione di cifre che talvolta sta fra la virgola ed il periodo.

Secondochè vi è o non vi è antiperiodo, il numero decimale periodico si dice misto o semplice.

3. — Un numero decimale periodico è misto o semplice, secondochè il denominatore della sua generatrice è o non è divisibile per 2 o per 5.

4. — Le sole scritture, che non sono numeri decimali periodici, pur avendone l'apparenza, sono quelle in cui sarebbe indicato il periodo 9. Invero, tali scritture non hanno generatrice.

5. — Una generatrice di un numero decimale periodico semplice, la cui parte intera sia zero, è la frazione che ha per numeratore il periodo ed il cui denominatore si forma, scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Riducendola ai minimi termini, si ottiene la generatrice.

6. — Per trovare una generatrice di un numero decimale periodico misto, la cui parte intera sia zero, si scrivono di sèguito l'antiperiodo ed il periodo, si calcola la differenza tra questo numero e l'antiperiodo, e la si assume quale numeratore di una frazione, il cui denominatore si forma, scrivendo tanti 9 quante sono le cifre del periodo e poi tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Riducendola ai minimi termini, si ottiene la generatrice.

7. — La generatrice di un numero decimale periodico, semplice o misto, la cui parte intera sia diversa da zero, è eguale alla somma della sua parte intera e della generatrice del numero che si ricava da quello dato, scrivendo zero al posto della sua parte intera.

8. — In altro modo: — ogni numero decimale periodico misto è eguale alla somma del numero decimale finito, che si ottiene trascurando il periodo, e del numero decimale periodico misto, che si ottiene scrivendo uno 0 al posto d'ogni cifra della parte intera e dell'antiperiodo. Una generatrice di quest' ultimo è la frazione che ha per numeratore il periodo ed il cui denominatore si forma come nella regola 6.

9. — Riassumendo: — ogni numero razionale è trasformabile in numero decimale, finito o periodico.

Inversamente: — ogni numero decimale, finito o periodico, è razionale.

Capitolo VII. — Potenze di numeri razionali

1. — Anche se la base è un numero razionale:

ogni potenza con esponente zero (e base diversa da zero) vale 1,

ogni potenza con esponente 1 è eguale alla base,

ogni potenza, con esponente non minore di 2, è il prodotto di tanti fattori eguali alla base, quanti ne indica l'esponente (che si sottintende essere ancora un numero naturale).

2. — Ed ancora:

il prodotto od il quoto di potenze, con una stessa base, è eguale a quella potenza, con la stessa base, che ha per esponente la somma o la differenza degli esponenti;

il prodotto od il quoto di potenze, con uno stesso esponente, è eguale a quella potenza, con lo stesso esponente, che ha per base il prodotto od il quoto delle basi;

ogni potenza di potenza è eguale a quella potenza,

con la base primitiva, che ha per esponente il prodotto degli esponenti.

3. — Per elevare a potenza una frazione, basta elevarne ambo i termini a potenza, con quell' esponente.

4. — Ogni potenza (ad esponente naturale) di un numero razionale è un numero razionale.

Ed essa è un numero naturale od una frazione non apparente, secondochè la base è un numero naturale od una frazione non apparente.

5. — Il numero delle cifre decimali di ogni potenza di un numero decimale finito è il prodotto del numero delle cifre decimali della base per l'esponente.

6. — Le potenze di un numero razionale (diverso da 0 e da 1) crescono o decrescono insieme con l'esponente, secondochè la base è maggiore o minore di 1.

7. — Risultano valide per tutti i numeri razionali le seguenti proprietà, già note soltanto per i numeri naturali:

il quadrato della somma o della differenza di due numeri è eguale alla somma dei loro quadrati, aumentata o diminuita del loro doppio prodotto;

il prodotto della somma di due numeri per la loro differenza è eguale alla differenza dei loro quadrati.

Ed inversamente: — la differenza dei quadrati di due numeri è eguale al prodotto della somma delle basi per la loro differenza.

Capitolo VIII. — Rapporti e proporzioni

1. — Il rapporto di due lunghezze già misurate (e similmente: di due aree, di due volumi, di due pesi, di due valori, ecc.) è il quoto dei due numeri che le misurano rispetto ad una stessa unità.

Esso è indipendente dalla scelta dell'unità di misura.

2. — Allorchè il quoto indicato di due numeri si chiama loro rapporto, il dividendo e il divisore si chiamano: antecedente e conseguente. Entrambi si chiamano: termini.

3. — Invertire un rapporto significa scambiare fra loro i suoi due termini.

Così facendo, si ottiene il suo reciproco.

4. — Ogni eguaglianza di due rapporti si chiama anche: proporzione.

In ogni proporzione, secondochè un antecedente è minore o maggiore del suo conseguente, anche l'altro antecedente è minore o maggiore del suo conseguente.

5. — Quattro numeri ordinati formano una proporzione, allorchè il prodotto dei medi è eguale al prodotto degli estremi.

6. — Segue che: — per calcolare un estremo di una proporzione, basta dividere il prodotto dei medi per l'altro estremo.

Similmente: — per calcolare un medio di una proporzione, basta dividere il prodotto degli estremi per l'altro medio.

7. — Il quarto termine di una proporzione si chiama: il quarto proporzionale dopo i primi tre.

8. — Una proporzione, che ha i medi eguali, si dice: continua.

In tal caso, ciascuno dei due medi si chiama: il medio proporzionale fra i due estremi. Ed il quarto termine si chiama: il terzo proporzionale dopo i primi due (sottintendendo che il terzo termine è eguale al secondo).

9. — Da una proporzione se ne ricava un'altra:

scambiando fra loro gli estremi, ovvero i medi, ovvero i medi ed anche gli estremi;

scambiando fra loro i due rapporti.

10. — Data una proporzione, è indifferente fare lo scambio dei due rapporti, e poi quello dei medi ed anche degli estremi, ovvero far subito la inversione di ciascuno dei due rapporti.

A questa trasformazione si accenna con la parola: « invertendo ».

11. — Da una proporzione se ne ricava un'altra:

aggiungendo a ciascun antecedente il suo conseguente,

togliendo a ciascun antecedente il suo conseguente.

Accenniamo alla prima di queste trasformazioni con la parola « addizionando » ed alla seconda con la parola « sottraendo ».

Naturalmente, la seconda è eseguibile sol quando ogni antecedente sia maggiore del suo conseguente. E quest'avvertenza vale anche per la trasformazione seguente.

12. — In ogni proporzione:

la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.

Accenniamo a questa trasformazione con la frase: « addizionando e sottraendo ».

13. — In ogni proporzione:

la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come uno qualunque degli antecedenti sta al suo conseguente.

Capitolo IX. — Proporzionalità

1. — Due numeri si dicono direttamente proporzionali ad altri due numeri, allorchè, nell'ordine dato, essi formano una proporzione.

In tal caso, il primo di essi è eguale al prodotto del secondo per il rapporto degli altri due.

Questa è « la regola del tre, semplice ».

2. — Due numeri si dicono inversamente proporzionali ad altri due numeri, allorchè, nell' ordine dato, il rapporto di una coppia è eguale al rapporto inverso dell'altra coppia.

In tal caso, il primo è eguale la prodotto del secondo per il rapporto inverso degli altri due.

Questa è « la regola del tre, inverso ».

3. — Se due numeri sono direttamente proporzionali ad alcune coppie di numeri ed inversamente proporzionali ad altre coppie di numeri, allora il primo numero è eguale al prodotto del secondo per i rapporti diretti delle coppie direttamente proporzionali e per i rapporti inversi delle coppie inversamente proporzionali.

Questa è « la regola del tre, composto ».

4. — E lo stesso si dice quando, invece di ciascuna coppia di numeri, si pensano due lunghezze o due aree o due volumi o due pesi o due valori ecc., ch'essi (due numeri) misurino rispetto ad una stessa unità.

5. — Due successioni di numeri si dicono direttamente proporzionali (fra loro), quando il rapporto dei primi due numeri è eguale al rapporto dei secondi, dei terzi, ecc.; cioè: quando due numeri qualunque della prima sono direttamente proporzionali ai due numeri corrispondenti della seconda.

6. — Moltiplicando una successione di numeri per un numero, si ottiene una successione direttamente proporzionale a quella.

Due successioni, direttamente proporzionali ad una terza, sono direttamente proporzionali fra loro.

7. — Per scindere un numero in parti direttamente proporzionali ad alcuni numeri dati, si divide quello per la somma di questi e poi si moltiplica il quoto per ciascuno dei numeri dati.

Questa è « la regola di partizione semplice ».

8. — Due successioni di numeri si dicono inversamente proporzionali (fra loro), quando ciascuna di esse è direttamente proporzionale alla successione dei reciproci dell'altra.

9. — Due successioni, inversamente proporzionali ad una terza, sono direttamente proporzionali fra loro.

10. — Scindere un numero in parti direttamente proporzionali ad alcune successioni di numeri è lo stesso che scinderlo in parti direttamente proporzionali alla successione dei prodotti dei primi, dei secondi, dei terzi, ecc. numeri delle successioni date.

Questa è « la regola di partizione composta ».

11. — Scindere un numero in parti inversamente proporzionali ad alcune successioni di numeri è lo stesso che scinderlo in parti direttamente proporzionali alle successioni dei reciproci dei numeri delle successioni date.

Questa è « la regola di partizione inversa ».

12. — Regola diretta di miscuglio:

per calcolare il valore unitario di un miscuglio, basta dividere il suo valore (cioè: la somma dei valori delle merci mescolate) per la sua quantità (cioè: per la somma delle quantità delle merci mescolate);

per calcolare il peso specifico di una miscela, basta dividere il suo peso (cioè: la somma dei pesi dei corpi mescolati) per il suo volume (cioè: per la somma dei volumi dei corpi mescolati);

per calcolare il titolo di una lega nobile, ottenuta mediante fusione di altre leghe, basta dividere il peso del suo fino (cioè: la somma dei fini, oro puro od argento puro, delle leghe componenti) per il suo peso (cioè: per la somma dei pesi delle leghe componenti).

13. — Regola inversa di miscuglio:

il rapporto delle quantità di due merci, di cui la prima abbia il minor valore unitario ed il cui miscuglio debba avere un valore unitario prefissato (necessariamente intermedio fra gli altri due), è eguale al rapporto che ha per antecedente la differenza tra il valore unitario maggiore e l'intermedio, ed ha per consequente la differenza tra il valore unitario intermedio ed il minore.

Si rilegga una prima volta, cambiandovi: « quantità » in « volumi », « merci » in « corpi », e « valore unitario » in « peso specifico ».

Si rilegga una seconda volta, cambiandovi: « quantità » in « pesi », « merci » in « leghe nobili », e « valore unitario » in « in titolo ».

Capitolo X. — Ampiezze angolari

1. — Si chiama angolo (razionale) ogni frazione (propria od impropria) di giro.

Poichè due angoli sono due frazioni di giro, per confrontare o addizionare o sottrarre due angoli, basta confrontare o addizionare o sottrarre le corrispondenti frazioni.

2. — Il mezzo giro si chiama angolo piatto.

Ogni angolo, minore di un angolo piatto, si dice convesso.

Ogni angolo, maggiore di un angolo piatto e minore di un giro, si dice concavo.

3. — Il mezzo angolo piatto si chiama angolo retto.

Ogni angolo, minore di un angolo retto, si dice acuto.

Ogni angolo, maggiore di un angolo retto e minore di un angolo piatto, si dice ottuso.

4. — Due angoli si dicono fra loro:

complementari, quando la loro somma è un angolo retto,

supplementari, quando la loro somma è un angolo piatto.

5. — Il grado è 1/90 di angolo retto.

Il minuto (primo) è 1/60 di grado.

Il (minuto) secondo è 1/60 di minuto.

Mentre nei calcoli abituali i secondi sono trascurabili, nei calcoli astronomici si tiene conto anche dei decimi di secondo.

6. — Su ciascun meridiano, a partire dal suo punto medio (situato sull'equatore) si contano 90° di latitudine

boreale, sino al polo Nord, e 90° di latitudine australe, sino al polo Sud.

Il miglio geografico o marino (o nodo) è un minuto di grado di latitudine.

Con lieve errore per eccesso, esso è m. 1852.

Se due città stanno su uno stesso meridiano, la loro distanza geografica (in miglia e frazione di miglia) è eguale alla differenza ovvero alla somma delle loro latitudini (in minuti e frazioni di minuto), secondochè queste sono omonime (cioè: entrambe boreali od entrambe australi) ovvero eteronime (cioè: l'una boreale e l'altra australe).

7. — A partire dal meridiano di Greenwich, si contano nei due versi opposti 180° di longitudine orientale e 180° di longitudine occidentale.

8. — Ogni punto della superficie terrestre, diverso dai poli, risulta determinato dalla sua latitudine e dalla sua longitudine, che insieme si chiamano le sue coordinate geografiche.

9. — Il suo mezzogiorno vero è l'istante in cui il Sole (nella sua rotazione apparente intorno alla Terra) passa sul meridiano di quel luogo.

Ma, per convenzione internazionale, si imagina che la superficie terrestre sia composta di 24 fusi orari, ciascuno dell'ampiezza di 15° di longitudine e numerati da occidente ad oriente, a cominciare da quello che è dimezzato dal meridiano di Greenwich. E ad ogni fuso orario viene attribuita l'ora del meridiano che lo dimezza.

In questo modo, allorchè nel primo fuso è l'una (dopo la mezzanotte), nel secondo fuso sono le due, nel terzo sono le tre, ecc.

L'Italia appartiene al secondo fuso orario.

10. — In ogni triangolo, la somma dei tre angoli è eguale ad un angolo piatto.

Questa proprietà consente di calcolare l'ampiezza di

un angolo di un triangolo, quando si conoscono le ampiezze degli altri due.

11. — Risulta che:

in ogni triangolo, la somma di due angoli è sempre minore di un angolo piatto;

in ogni triangolo vi sono almeno due angoli acuti.

12. — Un triangolo si dice:

rettangolo, se ha un angolo retto;

ottusangolo, se ha un angolo ottuso;

acutangolo, se ha i tre angoli acuti.

In ogni triangolo rettangolo, i due angoli acuti sono fra loro complementari.

13. — Si dice che un triangolo è isoscele quando ha due lati eguali.

In ogni triangolo isoscele, gli angoli alla base sono eguali.

Questa proprietà consente di calcolare l'ampiezza dell'angolo al vertice d'un triangolo isoscele, conoscendo quella d'uno degli angoli alla base; ed inversamente.

14. — Ogni poligono ha tanti angoli quanti sono i vertici, cioè quanti sono i lati.

Un poligono si dice:

equilatero, quando ha tutti i lati eguali;

equiangolo, quando ha tutti gli angoli eguali;

regolare, quand'è equilatero ed equiangolo.

15. — Un quadrangolo può essere regolare (quadrato); ma può essere equilatero (rombo), senz'essere equiangolo; e può essere equiangolo (rettangolo), senz'essere equilatero.

16. — Invece: ogni triangolo equilatero è anche equiangolo, e quindi è regolare.

Ciascun angolo di ogni triangolo equilatero è 60°.

17. — La somma degli angoli (interni) di un poligono è tanti angoli piatti, quant'è il numero dei lati diminuito di 2.

18. — In particolare:

la somma degli angoli di ogni quadrangolo è un giro,

ogni quadrangolo equiangolo è un rettangolo,

in ogni parallelogramma, ciascun angolo è eguale al suo opposto ed è il supplemento di un suo consecutivo,

in ogni trapezio, ciascuno dei lati concorrenti forma, con le due basi, due angoli supplementari.

19. — La somma degli angoli esterni d'un poligono (convesso) è un giro.

Quindi:

in ogni poligono equiangolo, l'angolo esterno è il quoto di 360° per il numero dei lati, e l'angolo interno si ottiene poi quale supplemento dell'angolo esterno.

20. — Inversamente:

il numero dei lati di un poligono equiangolo è il quoto di 360° per il supplemento del suo angolo interno.

(Se il quoto non è un numero naturale, non esiste alcun poligono equiangolo con quell'angolo interno).

FINE.

INDICE

CAP. I. — **I numeri razionali.**

1. — Le frazioni ordinarie ed i numeri misti Pag. 3
2. — Semplificazione delle frazioni . . » 13
I compagni di viaggio . . . . » 21
Assi, sesterzi e denari . . . . » 22
3. — Riduzione di frazioni al minimo denominatore comune . . . . . » 23
4. — Confronto di numeri razionali . . » 29

CAP. II. — **Addizione e sottrazione.**

1. — Somma . . . . . » 36
La vendita delle mezze uova . . . » 41
Un indovinello greco . . . . » 42
2. — Differenza . . . . . » 43
Talenti, mine, sicli, dracme ed oboli . » 52
Tre indovinelli greci . . . . . » 54
Tre testamenti . . . . . » 55
Un muratore e un apprendista . . » 56
Osservazione . . . . . » 57

CAP. III. — **Moltiplicazione e divisione.**

1. — Prodotto e quoto di un numero razionale per un numero naturale. . . . » 59
2. — Prodotto di numeri razionali. . . » 64
Osservazione . . . . . » 73
3. — Applicazioni . . . . . » 74
Domanda bizzarra . . . . . » 78
La spartizione dei 17 cammelli . . » 79
Un testamento a sorpresa . . . » 80
Il prosciugamento di uno stagno . . » 81
4. — Quoto di numeri razionali . . . » 82
Problemi stradali . . . . . » 86
Altri tre indovinelli greci . . . » 87
Vicende di giuoco . . . . . » 89
Vicende commerciali . . . . . » 90
5. — Frazioni composte . . . . . » 92

CAP. IV. — **Frazioni decimali e numeri decimali.**

1. — Le frazioni decimali . . . . . » 94
2. — I numeri decimali . . . . . » 96
3. — Le quattro operazioni . . . . . » 102
Il preventivo per un salotto . . . » 117
Problemi geometrici . . . . . » 119

CAP. V. — **Decimali finiti od accorciati.**

1. — Le frazioni ordinarie trasformabili in decimali . . . . . Pag. 122
2. — Approssimazioni . . . . . » 125
Pesi specifici . . . . . » 135

CAP. VI. — **Numeri decimali periodici e loro generatrici.**

1. — I numeri decimali periodici semplici . » 142
2. — I numeri decimali periodici misti. . » 152
3. — Periodicità convenzionali:
Le ore del giorno . . . . . » 161
I giorni della settimana. . . . . » 164
I cicli dei calendari . . . . » 166

CAP. VII. — **Potenze di numeri razionali** . . . . » 170

CAP. VIII. — **Rapporti e proporzioni.**

1. — Rapporto . . . . . » 178
Pendenze . . . . . » 187
2. — Proporzione . . . . . » 191
Il calcolo di una speranza . . . . » 197
3. — *Trasformazioni* . . . . . » 199

CAP. IX. — **Proporzionalità.**

1. — Proporzionalità diretta . . . . . » 204
Scale termometriche. . . . . » 213
2. — Proporzionalità inversa . . . . . » 214
3. — Proporzionalità composta . . . . » 220
4. — Parti proporzionali . . . . . » 224
Tre testamenti successivi. . . . . » 234

CAP. X. — **Ampiezze angolari.**

1. — Varie specie di angoli . . . . . » 251
Le lancette sovrapposte . . . . . » 255
2. — Gradi, minuti e secondi. . . . . » 257
Latitudini e distanze geografiche . . » 266
Longitudini e differenze orarie . . » 269
3. — Varie specie di angoli . . . . . » 274
4. — Angoli di poligoni . . . . . » 281

RIASSUNTO

I. — *I numeri razionali* . . . . . » 293
II. — *Addizione e sottrazione* . . . . . » 296
III. — *Moltiplicazione e divisione* . . . . » 299
IV. — *Frazioni decimali e numeri decimali* . . » 302
V. — *Decimali finiti od accorciati*. . . . . » 303
VI. — *Numeri decimali periodici e loro generatrici* » 304
VII. — *Potenze di numeri razionali*. . . . . » 306
VIII. — *Rapporti e proporzioni* . . . . . » 307
IX. — *Proporzionalità* . . . . . » 309
X. — *Ampiezze angolari* . . . . . » 311

Edizioni SANDRON — **Letture Amene**

Alcuni volumetti della

Collezione "Giovinezza!"

Menasci (G.). *Annata di gloria in-16* . . . . . — —
— *Poesia marinaresca* . . 5 —
Messina (M.). *I racconti di Cismè in-8* . . . . . 12 —
— — *in-16* 6 50
— *Il galletto rosso e blu* . . 12 —
— *I racconti dell'Avemmaria* 15 —
Monaco - Perissinotto (T.). *Redento e altri racconti* 2 50
Moretti (M.). *Sentimento* . . 8 —
Orsi (A.). *Il libro della Gloria* 5 50
Orsi (F.). *Tallera e Burilli* . 4 —
Orsi (T.). *Virtù ignorate*. . 4 —
Pagani (G.). *Gente alla buona*. — —
Panizzi (V. A.). *Folletti* . . 4 —
Piccioni (A.). *Attraverso la Cina in automobile*. . . . . 3 —
— *Fiorello e Farfallino*. . — —
— *Il tesoro dell'Imalaja*. . — —
Piccioni (A.) *Zoccolino* . . 3 —
— *Pispolino*. . . . . — —
Prunai (G. B.). *Visioni del passato*. Racconti e leggende . . 6 50
Ragusa Moleti (G.). *Acquerelli e macchiette* . . . . . 4 —
— *Miniature parlanti* . . 2 25
Rossi (A.). *L'ultima scoperta* — —
Rostagno (T. A.) *Ta-tà e Ta-tò* 6 —
Ruskin (J.). *Il re del fiume d'oro* 2 90
Sabbadini (G.). *Commedie e drammi per gl'istituti d'educazione* 3 50
Syrett (N.). *La principessa del sogno* . . . . . 6 —
Tartufari (C.). *Ebe*. Romanzo per la gioventù. — —
Termini (F. A.). *Affetti sereni* 6 50
Terzaghi (N.). *Miti e leggende del mondo greco-romano* . 6 80
Thorburn (A.). *Chiudete gli occhi, bambini!...* Racconti di fate. 5 —
— *L'amico mio Papaverino*. Racconti di fate 7 50
Topi (S.). *Nasi lunghi e musi lunghi* . . . . . 3 —
Vanni (M.). *La malattia di Gianpino* . . . . . 4 —
— *Le poesie dei miei bambini* 2 —
— *In vacanza* . . . . . 3 —
Vecchia (A.). *In famiglia* . 2 —
Vertua Gentile (A.). *Coraggio e avanti* 7 50
— *Fiore di siepe* . . . . 8 —
— *Il gallo avventuroso*. Favole e novelle 3 50
— *Per essere garbate* . . 1 50
Vincenti Aspramonti (E.). *Leggende* 3 —
Vitale (Z.). *Amleto*. Racconto per la gioventù . . . . . 3 —
— *Romeo e Giulietta*. Racconto per la gioventù . . . . . 2 —
— *Il re Lear*. Racconto per la gioventù . . . . . — —
Wilde (O.). *Il principe felice*. 4 —

☞ *Chiedere il ricco Catalogo dei libri di lettura amena.*

Per commissioni indirizzare vaglia a **Remo Sandron**, *Editore*. PALERMO