La matematica è un modo di pensare
Insegnamento e pratica didattica nell'opera di Beppo Levi

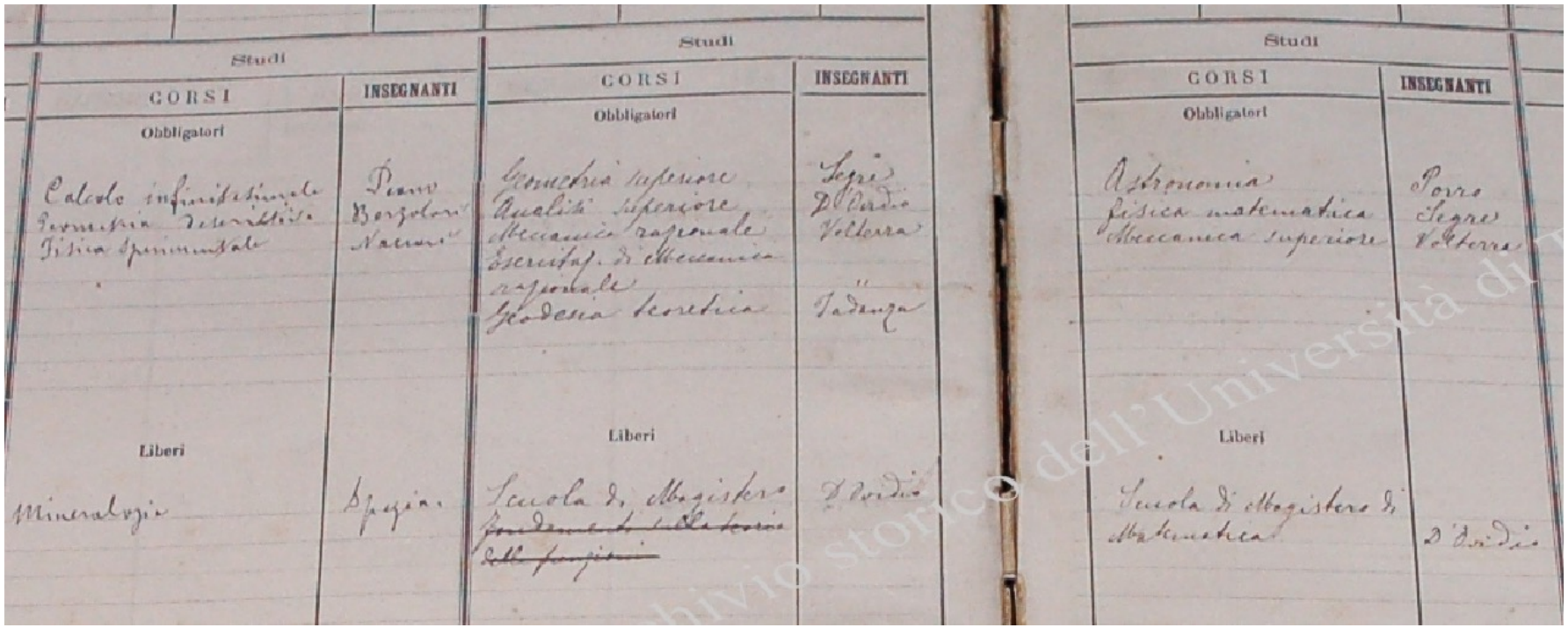
Se un alunno mi ripete una dimostrazione troppo bene io sento il dovere di disturbarlo: egli conosce bene una strada maestra; occorre cacciarlo nei prati perché impari a ritrovare la strada o il viottolo, non importa.
(B. Levi 1908, Opere, p. 624)

Livia Giacardi
Convegno UMI-CIIM
Bari 7 ottobre 2017

Beppo Levi (Torino 1875 – Rosario 1961) diede contributi significativi in vari settori della matematica : geometria algebrica, logica, fondamenti della matematica, analisi, teoria dei numeri, ma si interessò anche di questioni metodologiche e didattiche.

1896 – si laurea a Torino con **Corrado Segre** discutendo una tesi di geometria algebrica.
Influenza di **Giuseppe Peano**
1898 – diploma della **Scuola di Magistero** (Enrico d'Ovidio)

[ASUT. B. Levi, Carriera]



Studi

CORSI	INSEGNANTI
Obbligatori	
Calcolo infinitesimale	Peano
Geometria descrittiva	Borzolani
Fisica sperimentale	Naccari
Liberi	
Mineralogia	Spezia

Studi

CORSI	INSEGNANTI
Obbligatori	
Geometria superiore	Segre
Analisi superiore	D'Ovidio
Meccanica razionale	Volterra
Esercitaz. di Meccanica razionale	"
Geodesia teoretica	Tadanza
Liberi	
Scuola di Magistero	D'Ovidio
~~Fondamenti della Geometria~~	
~~Alle pagine~~	

Studi

CORSI	INSEGNANTI
Obbligatori	
Astronomia	Porro
Fisica matematica	Segre
Meccanica superiore	Volterra
Liberi	
Scuola di Magistero di Matematica	D'Ovidio

Archivio storico dell'Università di

1900-1906 - BL insegna in varie scuole secondarie (Liceo classico, Istituti tecnici, Scuola normale per la formazione delle maestre) in **Sassari, Vercelli, Bobbio, Bari, Piacenza, Torino.** [BL 1946h]

Dicembre 1906 professore di Geometria proiettiva e descrittiva all'Università di **Cagliari**.

1910 – 1928 insegna all'Università di **Parma**.

1918 – preside della Facoltà di Scienze

1919 – fonda l'Istituto matematico e crea la sezione **Mathesis** di insegnanti di matematica:

«…*ora ho fondato qui la Mathesis ed ha subito preso uno sviluppo insperato: e* ***venendo a contatto coi professori secondari mi cresce enormemente la stima per essi a diminuzione per quella poca per gli universitari.***» [BL to Giulio Levi, 17/18 June 1919, in Celli-Mattaliano 2015]

1917 - perde due fratelli, Decio e Eugenio Elia nella Grande Guerra. Con EEL condivideva molte riflessioni sull'insegnamento della matematica [lettere of EEL a BL e di EEL a Giuseppe Lombardo Radice]

1928 – si trasferisce all'Università di **Bologna**
Ingente lavoro nell'ambito dell'**Unione Matematica Italiana** come Tesoriere (1931-1938), membro della Commissione scientifica (1933-1938), e del Comitato editoriale del Bollettino dell'UMI (1929-1938).
Scrive **11 articoli** per il *Bollettino* e recensisce **53 libri** di vari settori della matematica e della fisica.

Luigi Berzolari, presidente dell'UMI scrive di lui:

Mi sembrerebbe un peccato contro l'onestà non dire una parola in suo favore […] ***È persona d'ingegno e di larghissima cultura matematica*** **[**…] *ha sempre letto con cura tutti i lavori mandati per la stampa nel Bollettino, e se di tali lavori qualcuno non contiene errori, è tutto merito del Levi:* ***ti posso assicurare che non troverò mai più una persona così variamente agile, paziente, disinteressata come lui***.
[Archivio UMI , Berzolari a Bompiani, 7 febbraio 1938]

Apprendistato per la sua futura direzione di giornali scientifici

1938 – leggi razziali

CORRIERE DELLA SERA

Le leggi per la difesa della razza
approvate dal Consiglio dei ministri

I matrimoni misti sono proibiti - La definizione di «ebreo», le discriminazioni e l'annotazione allo Stato Civile - L'esclusione dagli impieghi statali, parastatali e di interesse pubblico - Le norme concernenti le scuole elementari e medie e gli insegnanti

BL con l'aiuto di Tullio Levi Civita ottiene da Cortés Pla, preside della Universidad Nacional del Litoral in Rosario (Argentina) l'invito a dirigere l'appena creato Istituto di matematica della Facoltà di scienze . [lettere di BL a T. Levi-Civita].

Novembre 1939 - BL arriva in **Rosario** con la famiglia con visto turistico e rimase là fino alla sua morte.

Corsi specialistici su vari temi di analisi superiore, geometria,
Corsi regolari,
Corsi di epistemologia (**1956, 1958, 1960**) nella *Escuela Normal N.1 Nicolás Avellaneda* per formazione insegnanti.

Dirige due riviste scientifiche :
Publicaciones (1939 -1948),
Mathematicae Notae (1941-1961),
e la collana ***Monografias*** **.**

Es verdad que yo llegaré a Argentina habiendo ***cumplido desde pocos días los sesenta y cuatro años,*** *y también que por mi talla algo inferior a la media, podré no mostrar particular prestancia física, pero* ***mis fuerzas son del todo intactas.*** *[…]* ***la Universidad del Litoral puede contar con el trabajo de un hombre que conoce sus propios deberes y****, por lo menos en este momento, está en el caso de ejecutarlos.* [Pla 1962, XIV]

Beppo llega a casa ***alegre como un chico****, muchas veces después de haber continuado las discusiones iniciadas en el instituto tomando café en una confitería y utilizando a menudo las servilletas de papel para anotaciones.* [L. Levi L. 2000, 66]

18 August 1961 - BL muore Rosario

[Cortes Pla 1962, L. Levi 1998, Coen 1999]

— le **radici epistemologiche** del pensiero di BL sull'insegnamento della matematica:
che cosa è la matematica, quale è il suo ruolo, che cosa è la didattica;

— gli **assunti metodologici e didattici** che hanno ispirato le sue attività**:** relazioni fra deduzione intuizione e esperienza, il ruolo dei problemi, il metodo socratico, la formazione degli insegnanti;

— la **traduzione in pratica della sua visione didattica** nel piccolo libro *Abbaco da 1 a 20. Il primo libro d'aritmetica* (1922);

Le radici epistemologiche del pensiero di BL sull'insegnamento della matematica

Che cosa è la matematica

BL critica :

- **la gente comune** (e certi filosofi come B. Croce) che identificano la matematica con i numeri, le formule, i simboli,
- **i matematici** che la riducono a pura deduzione logica (BL 1908f, 1940c, 106-107; 1941c, R1943e, R1945b, 1954b, 1945c, …).

«Si bien las teorías matemáticas aparentan como el desarrollo unívoco de las implicaciones contenidas en pocas proposiciones iniciales, ***el verdadero espíritu matemático se manifiesta precisamente en el acto de elegir estas preposiciones y en él de elegir, entre esas implicaciones, las valiosas e interesantes.»*** [BL 1940c, 107].

La matematica è spesso confusa con i suoi strumenti.

«la matemática, si bien es una ciencia en el sentido ordinario de las ciencias positivas, es decir, un sistema de conocimientos, […] y si bien ella interesa al ingeniero, al físico, al químico como instrumento poderoso para las aplicaciones, ***más que todo es un modo de pensar, es una filosofía.»*** (BL 1941c, 7).

[BL *Abbaco* , 47-48, BL 1940c, 102, BL 1941e, p. 37, BL 1945c, 5, BL 1954b, 8, ...]

Il ruolo della matematica nell'educazione

La matematica favorisce l'emergere e lo svilupparsi delle facoltà logiche, delle facoltà d'osservazione e di coordinamento.

Le facoltà di coordinamento sono di grande importanza per creare una mentalità aperta ed elastica:

"coordinamento è il ***riconoscere le analogie e le divergenze delle diverse idee,*** *e il conservar vivi, saldi, spontanei i* ***legami fra di esse*** *›* [BL 1908c, Opere 621]

La facoltà logiche sono indispensabili perchè la matematica abbia carattere educativo, ma non sono le sole.

Interazioni fra logica, intuizione ed esperienza.

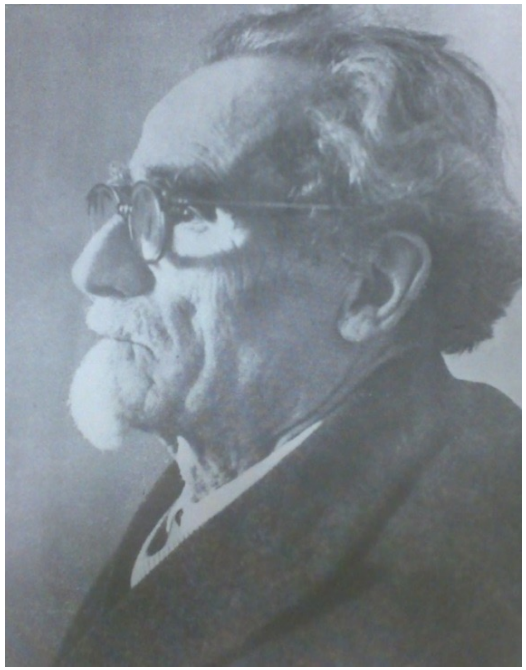
Che cosa è la "didattica"?

BL non credeva nella "didattica" (scienza pedagogica) come una scienza normativa se non per i fanciulli

- L'intelligenza di un bambino è abbastanza distante da quella dell'adulto e l'insegnamento richiede o molta "**capacità di osservazione**" o "**molta esperienza**"; la scienza pedagogica in questo caso può essere un valido aiuto. (BL 1946h, 167).
- Crescendo, la distanza intellettuale diventa piccola per cui l'unico bagaglio didattico dell'insegnante deve essere la propria **cultura personale sia matematica sia in senso più lato.**

"No es posible enseñar a enseñar porque ***toda regla didáctica aplicada rutinariamente según un esquema suprime la libertad de pensamiento en el rofesor y en el alumno ,*** *y hace el primero ridículo en proporción que el segundo es inteligente."* (BL Rec., di Polya, *How to solve it*, 1945b , 240)

Non è possibile descrivere "il buon metodo".(BL Rec., di J. W. A. Young *The Teaching of Mathematics* … 1947a, 67-77).



Assunti metodologici e didattici

◆ Deduzione e intuizione

La deduzione è uno dei principali strumenti della matematica

Gli studenti dovrebbero

- **apprendere le regole della deduzione**,
- **riconoscere quando vengono applicate** in una proposizione
- **acquisire fiducia nella deduzione** attraverso la continua analisi della concatenazione logica delle affermazioni :

«… guai se all'analisi si sostituisce l'abitudine, l'andazzo. Se un alunno mi ripete una dimostrazione troppo bene io sento il dovere di disturbarlo: egli conosce bene una strada maestra; occorre cacciarlo nei prati perché impari a ritrovare la strada o il viottolo, non importa» [BL 1908c, Opere, 624]

L'esaltazione del rigore logico spesso può degenerare e trasformare le classi in «accademie di logica deduttiva».

È inutile la deduzione se non la precede e la completa l'intuizione. La deduzione trasforma i giudizii, ma l'intuizione deve anzitutto formarli. [*Ibidem*, 625]

L'intuizione non deve solo precedere la deduzione, deve pure completarla: perché i nostri giudizi possano assoggettarsi alla deduzione è necessaria una certa rappresentazione simbolica*: potranno essere i simboli dell'analisi matematica, potrà essere una rappresentazione grafica, spesso soltanto una traduzione in parole;* ***e la deduzione ci produce in fine soltanto nuove rappresentazioni simboliche; ad esse occorre che la mente colta impari ad associare nel modo più complesso*** *tutti gli elementi dei giudizi ch'esse rappresentano,* ***tutti i fatti che esse stanno ad affermare. Soltanto quest'associazione complessa è realmente*** **intendere**. [*Ibidem,* 626]

Influenza di Klein

◆ Relazione fra esperienza e intuizione

Testi di «geometria intuitiva» spesso sono « **ibride riduzioni di trattazioni sistematiche deduttive»** ⟶ «propedeutica sperimentale».

L'esperienza ci permette solo di constatare che, nel caso particolare osservato, un certo fatto avviene – o ci pare avvenga;
l'intuizione «non constata, ma astrae, idealizza, distingue, inconsciamente ragiona» [BL 1908c, Opere, 625, cfr. anche BL 1914b, Opere, 675].

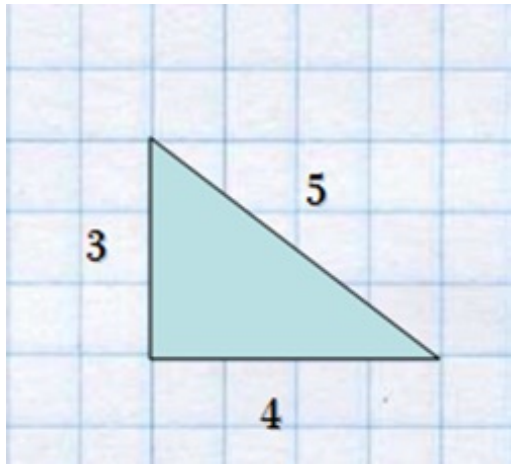
Esempi

- **Il dibattito con Giovanni Vailati nel 1907**

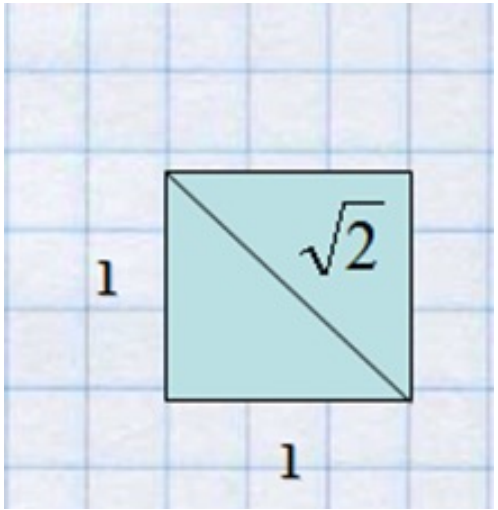
  Vailati :
  Insegnamento sperimentale operativo (soprattutto della geometria): l'uso di semplici strumenti matematici e il ricorso a piccoli esprimenti permettono allo studente di scoprire alcune proprietà delle figure geometriche e stimolano il desiderio di capirne il perché, rendendo l'insegnamento più interessante e attivo [Vailati 1905, 305]

Beppo Levi:

Gli insegnamenti sperimentali sono esclusivamente insegnamenti informativi e possono presentare *«un pericolo gravissimo rispetto all'educazione della mente»*



Es.: la misurazione dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti 3 e 4 cm e quella della diagonale di un quadrato di lato 1 dm:



«con qual diritto imporrai all'alunno ***di non attribuire ai due esperimenti ugual valore di certezza*** *e dal primo vorrai indurre il* ***teorema di Pitagora*** *… mentre dal secondo … non permetterai di concludere nulla di preciso:* ***affermerai arbitrariamente quella misura essere solo approssimata****?»* [BL 1907c, 182]

L'esperienza può divenire strumento didattico solo quando valga a *«suscitare associazioni intellettive sopite o si appoggi ad associazioni di cui perfettamente si conosca il valore»* [BL 1907c, 184]

● **Le diagonali di un rombo** [BL 1908c]

Studenti di un ginnasio sono inviatati dal professore a provare che le diagonali di un rombo disegnato sulla lavagna sono disuguali.

Professore sperimentalista: misurare le diagonali con un filo o con una riga e trarre la conclusione dalle misure.

Beppo Levi:

- domanda mal posta (il quadrato è un particolare rombo)

- *« prendete un rombo, e considerandolo come un* ***quadrangolo snodato, pensate che varii i suoi angoli: mentre una diagonale si accorcia l'altra si allunga»*** (p. 626).

Questo non è un esperimento, è *« la trama d'un ragionamento »* (p. 626).

Osservazione: ruolo diverso degli strumenti

- il quadrangolo snodato è un oggetto dinamico che incorpora **un ben preciso schema d'uso e che consente di esaminare anche le situazioni limite**.

→ **Emma Castelnuovo Software dinamici**

◆ Metodo socratico – importanza di esercizi e problemi

Stimolo per l'intuizione.
Secondo BL esistono alcuni *«schemi che noi abbiamo già disposti nella mente»* e l'insegnante ha il compito di avviare i suoi studenti a riconoscere e a prendere confidenza con questi schemi [BL 1908c, Opere, 625, BL 1947 (2003), 53-54]

- Problemi che permettono allo studente di stabilire connessioni fra differenti concetti in differenti contesti e di trarre vantaggio dall'analogia;
- Esercizi che consentono all'insegnante di fare digressioni o aggiunte per stimolare la curiosità degli allievi;
- Esercizi che richiedono di analizzare un ragionamento allo scopo di abituare gli studenti a trovare lacune o errori.

- rubriche dedicate a esercizi e problemi nell' *Abbaco*
  e nella rivista *Mathematicae Notae*

◆ La formazione degli insegnanti [BL 1909b]

Attività nell'ambito della Mathesis: presidente della sezione sarda e poi creatore e presidente della sezione di Parma.

Tre punti in discussione [Congressi Mathesis 1898, 1909, FNISM 1906]:

- distinzione fra *laurea scientifica* per formare ricercatori e *laurea didattica* per formare insegnanti,
- l'abolizione della tesi di laurea per i futuri insegnanti,
- l'introduzione di corsi di carattere storico, critico e didattico.

→BL è decisamente **contrario ai primi due**:

*"Per l'insegnante secondario **la buona cultura scientifica** è estensione filosofica del pensiero, indica la meta verso cui deve indirizzare le giovani menti, è il mezzo per mantenere il proprio insegnamento a contatto con i bisogni della cultura matematica sempre crescente"* [(BL 1909b, Opere, 733]

L'insegnante deve avere "**facoltà autodidattiche**" che gli consentano di completare e aggiornare il suo bagaglio culturale. (p. 735).

→ Secondo BL, la tesi di laurea è importantissima anche per il futuro insegnante perché costringe lo studente a

- "***uscire dalla falsariga del corso***",
- a fare un **lavoro individuale**,
- a ***"sfogliare qualche libro e qualche periodico",***
- a esercitare il suo **spirito critico** e le sue **attitudini alla discussione** (p. 735).

→ L' introduzione di corsi di storia della scienza e di didattica sarebbero utili, **purchè considerati con la stessa dignità degli altri tradizionali.**

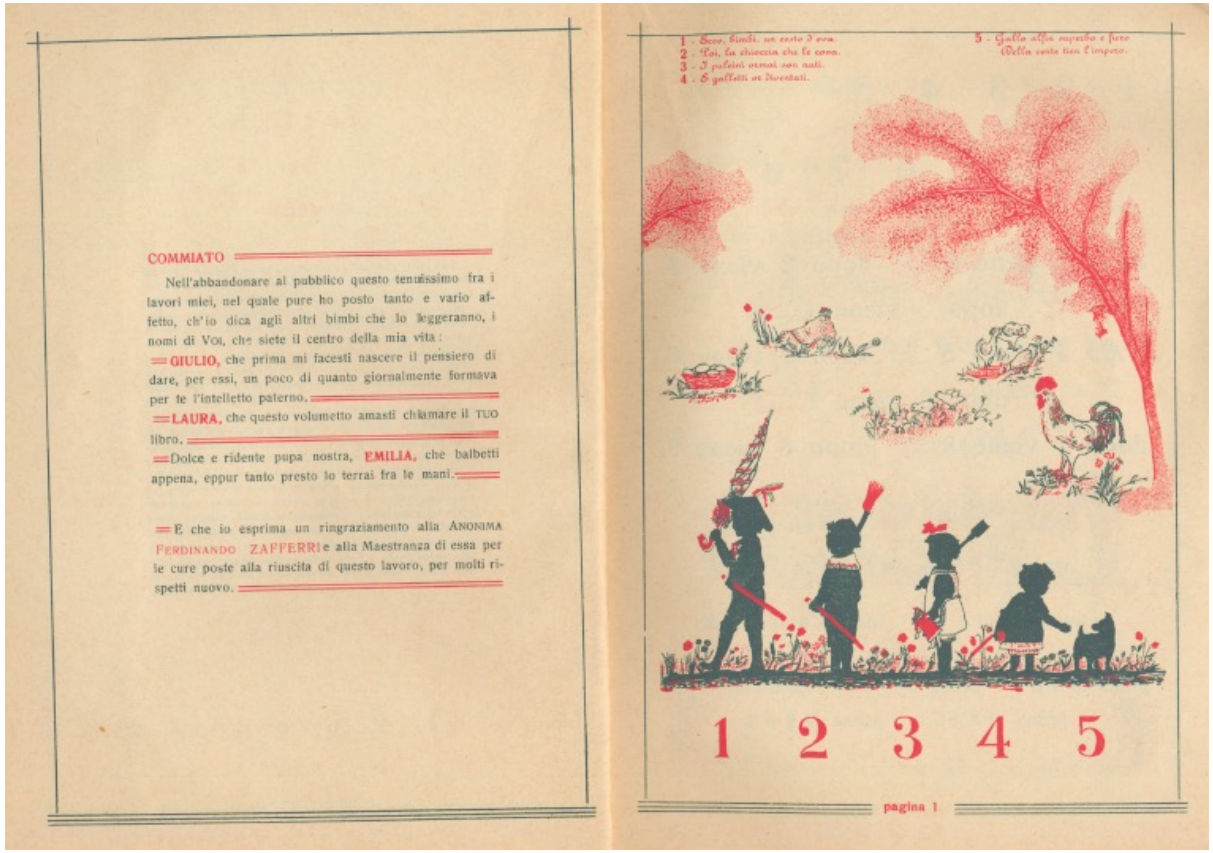
I corsi di carattere didattico dovrebbero modellarsi sui "seminari di Klein" e stabilire contatti fra matematiche elementari e matematiche superiori, (p. 735) e analizzare libri di testo [BMath. 1910, 7]

Analoghe questioni si presentano per la preparazione dei professori e maestri, ed anche più importanti dal punto di vista della scuola. Poichè è l'insegnante che fa la scuola e gli allievi; dalla sua capacità, dalla sua persona certamente più che dalla riforma dei programmi si deve attendere il miglioramento della scuola. Ora l'insegnante deve avere una buona preparazione professionale ed una soda cultura scientifica: e questa cultura scientifica che deve sviluppare in lui la libertà, l'autonomia del pensiero, l'attitudine ad organizzare proprie le idee, non può ottenersi senza una certa specializzazione; ma questa deve tuttavia esser tale da non soffocare in lui il molteplice interesse e la curiosità di spirito che egli deve infondere negli allievi.

(EE Levi 1909, 44)

Abbaco da 1 a 20.

Il primo libro d'aritmetica



COMMIATO

Nell'abbandonare al pubblico questo tenuissimo fra i lavori miei, nel quale pure ho posto tanto e vario affetto, ch'io dica agli altri bimbi che lo leggeranno, i nomi di Voi, che siete il centro della mia vita:

GIULIO, che prima mi facesti nascere il pensiero di dare, per essi, un poco di quanto giornalmente formava per te l'intelletto paterno.

LAURA, che questo volumetto amasti chiamare il TUO libro.

Dolce e ridente pupa nostra, EMILIA, che balbetti appena, eppur tanto presto lo terrai fra le mani.

E che io esprima un ringraziamento alla ANONIMA FERDINANDO ZAPFERRI e alla Maestranza di essa per le cure poste alla riuscita di questo lavoro, per molti rispetti nuovo.

1 - Bacco, bimbi, un cesto d'ova.
2 - Poi, la chioccia che le cova.
3 - I pulcini ormai son nati.
4 - E galletti or diventati.
5 - Gallo allor superbo e fiero
Della corte tien l'impero.

1 2 3 4 5

pagina 1

Illustrazioni di ELLEBI

B. LEVI editore PARMA

Levi è autore, editore e illustratore.

- *Proemio*
- Parte dedicata agli studenti (44 pagine)
- Parte dedicata al maestro (*Illustrazioni didattiche*, 16 pagine)

Nel Proemio BL afferma di voler «rompere» con l'insegnamento tradizionale dell'aritmetica.

Parma, ~ 1922

A chi è rivolto il libro?

Prima di tutto **agli studenti.**
In opposizione al tradizionale insegnamento orale dell'aritmetica, il libretto dovrebbe essere *«l'abecedario dell'aritmetica, allo stesso modo che non si penserebbe di insegnare a leggere senza il sillabario»*. (p. 49).

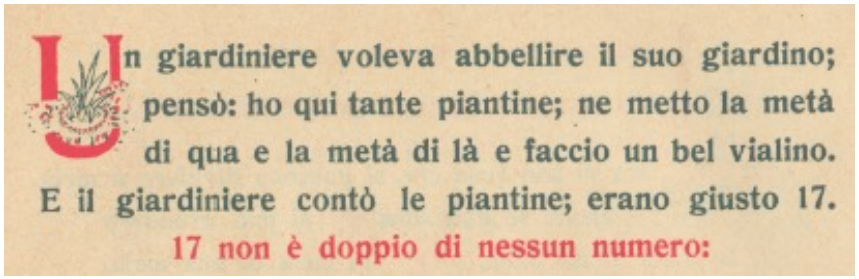
Aspetti grafici

- motivi floreali e faunistici
- immagini familiari
- uso di simmetrie
- caratteri di diverse dimensioni e alternanza del colore (nero e rosso)

"… ritengo inoltre sia parte essenziale l'illustrazione e la forma esteriore delle singole pagine: …, ***sulla simmetria di talune pagine, l'occhio e la mente dell'allievo debbono soffermarsi in quello stato intermedio fra lo studio e il diletto****, …* [BL 1922a, 65]

Aspetti metodologici

- BL usa la "narrazione", (Nemirovsky 1996)
- Fa ricorso a configurazioni geometriche per visualizzare certe proprietà;
- Presta molta attenzione al linguaggio (semplicità e rigore)
- Usa perifrasi verbali ripetute con una comune struttura ("dopo… viene", " il numero dopo …è", …)


Un giardiniere voleva abbellire il suo giardino; pensò: ho qui tante piantine; ne metto la metà di qua e la metà di là e faccio un bel vialino. E il giardiniere contò le piantine; erano giusto 17. 17 non è doppio di nessun numero:

LA TAVOLA DELL'ADDIZIONE

Eccovi un giochetto che vi insegnerà molte cose.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Influenza degli studi sui fondamenti

Il concetto di numero

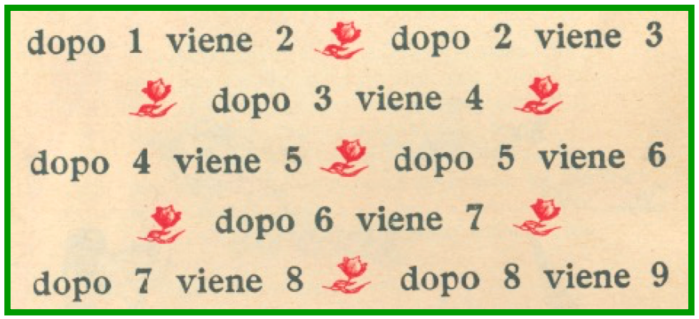
BL non introduce il numero come «***il risultato dell'operazione del contare***», ma come **mezzo** di tale operazione:

*« il **contare** è l'esplicazione di una facoltà particolare della nostra intelligenza, **la facoltà di concepire per successione; e numeri sono gli elementi di una successione** […] **in cui tale facoltà si concreta».***
[BL 1922, 62, BL 1941, 4, …]

BL è **contrario a** presentare i numeri come **raggruppamenti di oggetti** (gettoni, fagioli, etc.) :

«… *non avverrà mai che ad un* ***bambino normale*** *che per acquistare 4 pani egli li confronti ciascuno a ciascuno con 4 sassolini che la mamma provvida gli avrà messo in tasca: egli li conterà coi 4 numeri "1, 2, 3, 4" che egli porta nella sua testa.* (BL 1922a, 62)

I numeri sono introdotti seguendo un approccio **ordinale**, che è frutto della facoltà della mente umana di *concepire per successione*.



Testi per l'infanzia e per le elementari: G. Silvestri 1887, A. Stoppoloni, A. Tomei 1894, A. Vezzani 1905, C. Bevilacqua-Odetti 1907, A. Zaccaria 1907, A.&C. [Andorno e Cathiard] 1914, A. Zaccaria 1915, C. Ciamberlini 1915.
Testi per scuole medie inferiori : V. Amato 1913, E. Bortolotti 1914, A. Padoa 1923
Testi per le scuole normali : F. Del Chicca 1900, L. Predella-Longhi 1910, R. Bettazzi 1922). 8 approccio cardinale, 3 approccio ordinale, 3 entrambi

L'avanzare dell'età

BL introduce l'operatore **+1.**

In "3+1" le due cifre hanno un differente status:
3 è un **numero**,
+1 è un **operatore.**

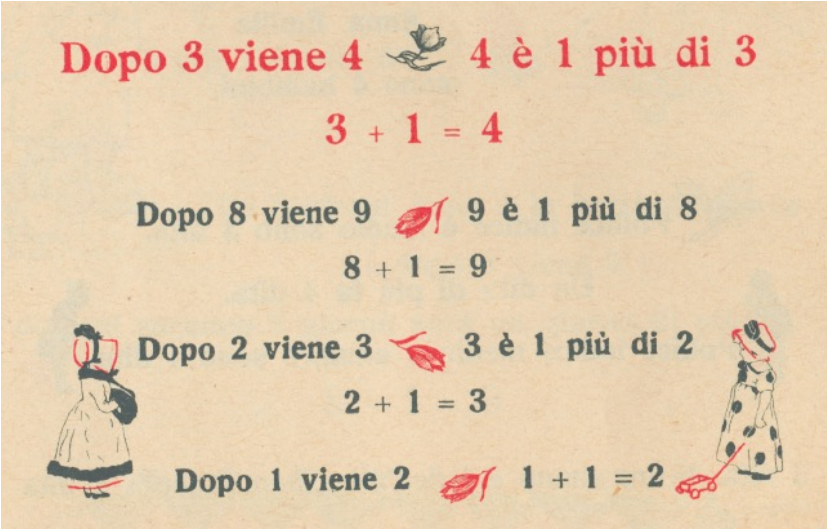
BL usa **differenti locuzioni** per esprimere 3+1 = 4 a parole: 3 più 1 fa 4; 3 più 1 uguale a 4; 3 è uno meno di 4, …

L'operazione di addizione

Definizione induttiva di addizione (Peano)

18. $a, b \in \mathrm{N} . \supset . a + (b + 1) = (a + b) + 1.$

Se a e b sono due numeri naturali e se $a + b$ è un numero, ma $a + (b + 1)$ non è ancora stato definito, allora $(a + b) + 1$ indica il successore di $a + b$.
(Peano 1889, *Definitio* 18, p. 2)



BL sfruttando le locuzioni "dopo 3 viene 4" , "4 è 1 più di 3" arriva alla espressione della somma "3 + 1 = 4".

Lo schema formale utilizzato da BL per il passaggio all'addizione +2, +3, +4, …+10, è:

b+1 viene dopo ***b*** ***a+ (b+1)*** viene dopo ***a+b***

(BL, *Abbaco*, *Illustrazioni didattiche*, 56)

Scopo

Creare schemi di calcolo che si radichino con facilità nelle menti dei fanciulli e li incoraggino a procedere per analogia:

Per analogia dico, e non per forza di memoria; ***nell'analogia s'intende che, se il fanciullo non deve più ripetere esplicitamente lo schema nei singoli casi, egli lo deve costantemente vedere nella propria immaginazione*** *(…).* (BL. *Abbaco*, p. 55)

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto per affrontare e porsi problemi significativi e per ***esplorare e percepire relazioni e strutture che si ritrovano e ricorrono in natura e nelle creazioni dell'uomo.*** (Indicazioni Nazionali 2012, p. 49)

Dialettica tra analogia, modelli, ragionamento

F. Arzarello, *Rappresentare, modellizzare e ragionare*, Scuola estiva UMI-CIIM, Bardonecchia 2016 .

La tavola dell'addizione

Proprietà commutativa

$4 + 3 = 7$

7 è la somma di 4 e 3

dicendo $4 + 3 = 7$ ò fatto un'addizione

E sarà sempre così.

Nel fare la somma di due numeri non importa quale dei due addendi si prenda prima.

LA TAVOLA DELL'ADDIZIONE

Eccovi un giochetto che vi insegnerà molte cose.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Scriviamo su una linea i numeri

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10.

Sotto questa linea scriviamone un'altra coi numeri

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11,

mettendo però il primo 1, un poco in fuori, come vedete nella figura qui di sopra; e così mettiamo 2 sotto *1*, 3 sotto *2*, e così di seguito: sotto *10* resterà scritto 11.

pagina 28

Serve anche per:

- Vedere i doppi
- Trovare le coppie di numeri che hanno una certa somma
- Eseguire le sottrazioni

■ Il doppio

o moltiplicazione per 2

Doppio è una somma di due numeri uguali.

La mosca à 3 zampe per lato;
in tutto à 2 volte 3 zampe:
due volte 3 fa 6.
Le mosche ànno 6 zampe.

Richiamo al concetto intuitivo di simmetria (presente in natura).

NUMERI PARI e NUMERI DISPARI

Il doppio di 1 è 2, il doppio di 2 è 4, il doppio di 3 è 6, il doppio di 4 è 8, il doppio di 5 è 10.

2 4 6 8 0
sono cifre pari.

Il doppio di 6 è 12. il doppio di 7 è 14, il doppio di 8 è 16, il doppio di 9 è 18, il doppio di 10 è 20,

2	4	6	8	10
12	14	16	18	20

sono numeri pari.

22	24	26	28	30
32	34	36	38	40

sono anche numeri pari

Tutti i doppi sono numeri pari.

1 3 5 7 9
sono cifre dispari

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39

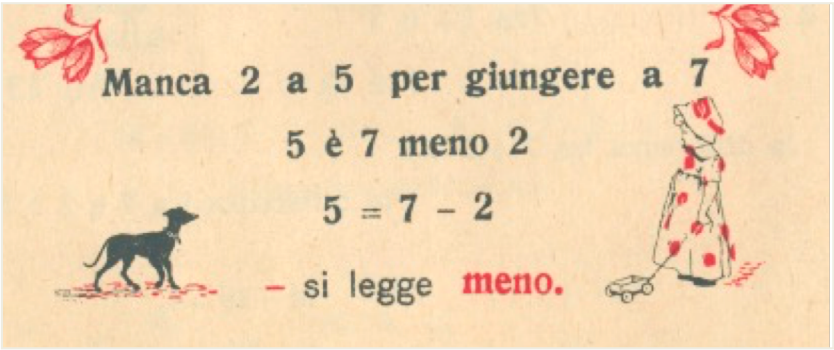
sono numeri dispari.

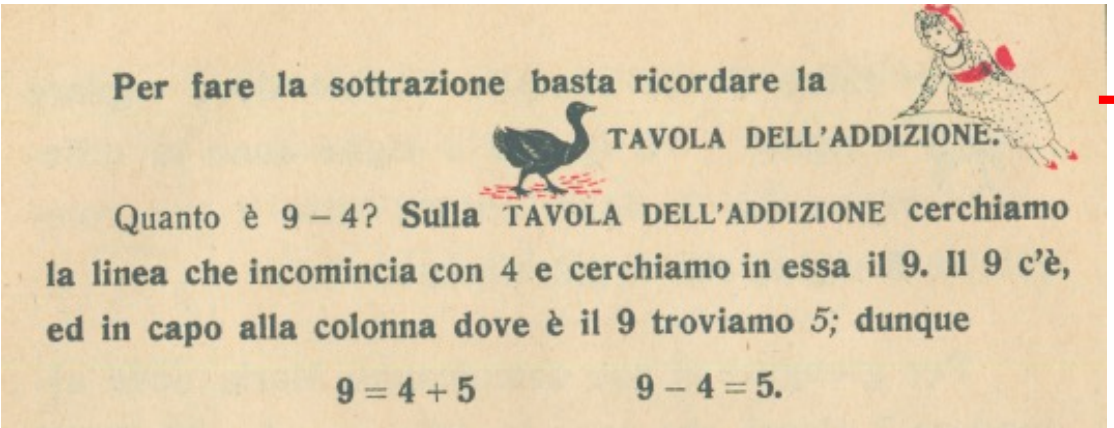
La sottrazione

Operazione inversa dell'addizione

Levi sconsiglia esplicitamente l'uso del *conteggio a ritroso* per introdurre la sottrazione. Propone, invece, di mostrarla come risposta alla domanda:

"quanto manca a … per giungere a …?"





	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Introduce i termini *sottrazione* e *differenza* e mostra come usare la tavola dell'addizione per calcolare le sottrazioni.

■ La metà

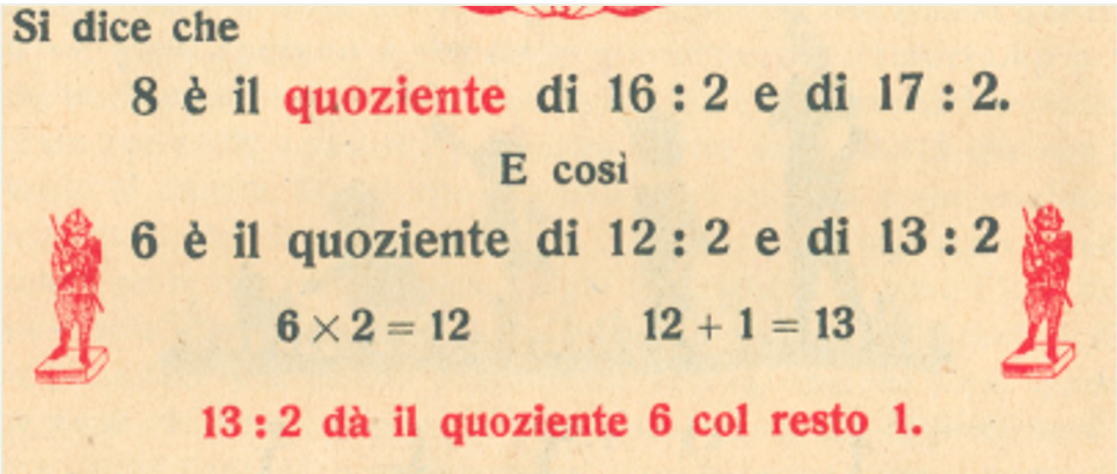
o divisione per 2

Usa di nuovo la simmetria nelle figure per richiamare l'attenzione sul legame tra metà e doppio.

Perciò mostra la divisione per 2 come inverso della moltiplicazione per 2.

I numeri pari hanno la metà,
i numeri dispari non hanno metà.

Introduce la **divisione con resto** così: *se il numero delle cose è dispari, dopo averne messe tante di qua e tante di là, ce ne resterà ancora una, (…) e ci accontenteremo di metterla da parte.*



Confronto con il pedagogista Giuseppe Lombardo Radice

1879-1938

Importanza della successione dei numeri.

G. Lombardo Radice, *Lezioni di didattica* 1913:

«(…) già con il due gli facciamo intravedere tutta quella che sarà per molto tempo la sua matematica, tutte le operazioni fondamentali, cioè i problemi da risolvere.
1 + 1, 2 - 1; 1 x 2, 1 x 1» (pp. 379-380)

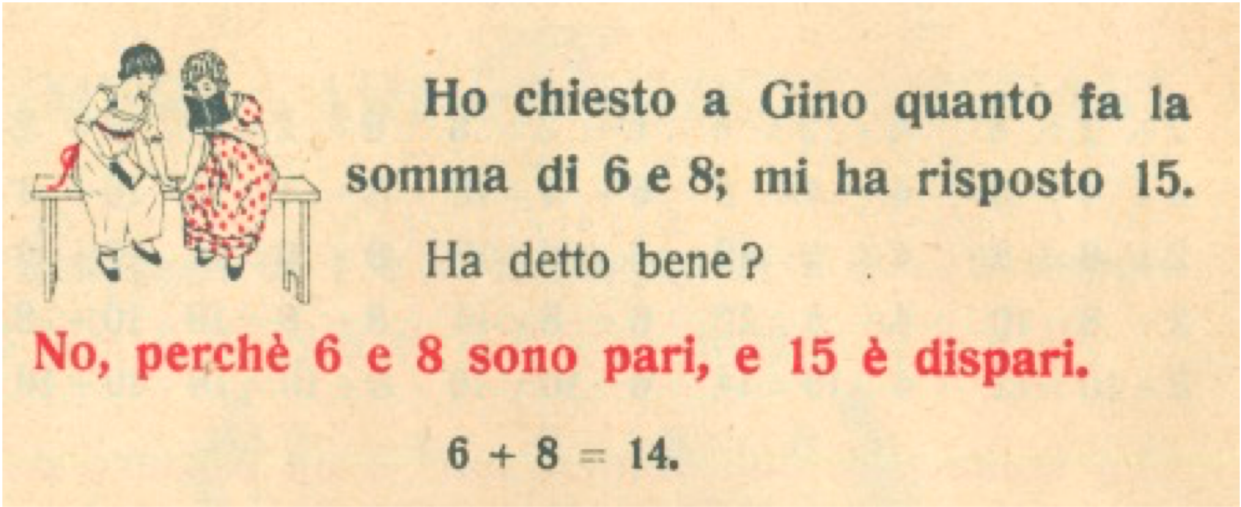
Beppo Levi:

«*L'essenziale è questo:* con uno, con due numeri isolati, non si fa dell'aritmetica*; dell'aritmetica si fa solo colla successione dei numeri»* (BL *Abbaco*, 46)

«la nozione di ***moltiplicazione è bensì quella di una particolare addizione****, ma finché non si possiede altro che l'1 e il 2 essa non è particolare, è bensì l'unica addizione; v'è nessuna differenza, nemmeno di "punto di vista", fra 1+1 e 1×2»* (p. 53).

Differenti tipi di esercizi

- Semplici problemi ispirati alle esperienze quotidiane dei bambini
- Analisi di affermazioni per stabilire se sono corrette o meno
- Esercizi di visualizzazione di un risultato su una tabella (es. quella dell'addizione)
- Esercizi in cui occorre collegare concetti diversi



- Esercizi di calcolo mentale

«Il calcolo mentale non consiste affatto in una pronta memoria [...] *esso consiste anzi essenzialmente nel* ***ridurre al minimo lo sforzo mnemonico mediante l'osservazione ed il ragionamento****.»* (p. 59)

L' *Abbaco* non ebbe fortuna

- La *Commissione centrale* per l'esame di libri di testo diretta da Giuseppe Lombardo Radice [Ascenzi-Sani 2005, 151-161] lo incluse fra i «*libri utili ma* ***non consigliabili*** *come testi per le scuole diurne*» [BUMPI 1924, 2329];
- Tentativi falliti di sperimentare il libro in una scuola elementare a Parma [BL a G. Lombardo Radice, Parma 13 maggio 1925];
- il libro fu pubblicato senza la sponsorizzazione di una casa editrice**;**
- l'approccio metodologico era troppo diverso da quello più diffuso:

Giovanni Papini : "*Ultimamente un dotto matematico ebreo, Beppo Levi, ha stampato un Abbaco nuovo di zecca, nel quale si impara finalmente il vero metodo logico e scientifico per insegnare la numerazione ai bambini. Eccone un saggio: Dopo l'1 viene il 2; dopo il 2 viene il 3; dopo il 3 viene il 4; … dopo il 9 viene il 10 ecc. E dopo Beppo Levi, naturalmente, viene Einstein*" [Giuliotti, Papini, 1923, 51-52].

Tullio Viola, pur considerando *l'Abbaco* un «commovente documento» che testimonia la «cura infinita» che l'autore vi prodigò, è contrario all'approccio da lui adottato: ***«conseguenza di tali principi è la mancanza di riferimento del concetto di numero a quello generale d'insieme».***
[Viola 1961, 516]

Progetto editoriale più ampio di testi

- per la scuola elementare [Coen 1998, 87]

- "fantasia tipografica" con **testi suoi, del fratello E. Elia Levi, testi scolastici** ed anche **"*un periodico di movimento delle idee attinenti alle matematiche*"** [BL to GAL, Parma 17/18 giugno 1919], senza seguito.

Alcune considerazioni finali

■ La visione di BL dell'insegnamento ha al centro l'idea di **libertà e responsabilità del professore** [BL a GLR Parma 13.5.1925, BL a GL, 17/18.6.1919, BL 1946h, …]

- Influenza della formazione scientifica:

Segre (insegnamento come missione, importanza di una solida preparazione scientifica dei futuri insegnanti, ruolo dell'intuizione nell'insegnamento) [BL 1922a, …]

Peano (attenzione al linguaggio, ai fondamenti della matematica, al rigore, lotta alla pseudo-intuizione) [(Bl 1909b, 1922, 1922a,…]

- Influenza dell'insegnamento secondario [BL 1946h]

■ **In Italia**

- **Modeste influenze a livello ufficiale** per quanto riguarda l'insegnamento pre-universitario della matematica (collocazione editoriale della maggior parte dei suoi articoli sull'insegnamento, insuccesso dell'*Abbaco*, fallimento del progetto didattico editoriale, …)

- **Indipendenza di giudizio**
  Riforma Gentile (1923): *«reforma fascista y en muchos aspectos discutible»* [Beppo Levi, 1946h, 171]
  Mancanza di "*libera discussione e di libero sviluppo di tutte le opinioni*" [BL a GLR, 13.5.1925]
  Critica del *numerus clausus*
  [Beppo Levi, 1946h, 171]
  1925 – firma il Manifesto Croce
  "Il Mussolini non capisce altro che l'atto teatralmente violento"
  «Ma quello che è spiacevole è la prova di incultura: se Mussolini ha fondato l'Accademia d'Italia per nominarvi Marinetti, Papini ecc. …» [Momigliano Levi 2016, 273]

In Argentina

- Sviluppo di alcuni aspetti particolari di BL**: la sua vocazione di "disseminatore" del pensiero matematico e il suo ruolo di guida per i giovani** che si affacciavano alla ricerca.
- Approfondimento di temi sull'educazione matematica attraverso nuove letture (Polya, Courant e Robbins, J.W. Young, Dantzig, Giannarelli, …) e attraverso i confronti con l'istruzione in Argentina.

- Realizzazione del **sogno editoriale** condiviso il fratello Eugenio attraverso il suo progetto più ampio e duraturo, *Mathematicæ Notæ*, un ponte fra didattica e ricerca scientifica, un mezzo per divulgare le ricerche in matematica pura e applicata (articoli, recensioni, necrologi, rubriche di problemi, …)

Yo no se cuál es la fuerza que me empuja hacia un afecto humano para la matemática, o no, diré mejor: para el pensamiento matemático; porque la matemática, ciencia constituída, ciencia de especialistas, me interesa mucho menos.
[B.L., 1940c, p.102]

Scritti di Beppo Levi relativi all'insegnamento

[1907, c] B. Levi, *Esperienza e intuizione in rapporto alla propedeutica matematica. Lettera aperta al Prof. Giovanni Vailati*, in Bollettino di Matematica, VI, 10-11-12, pp. 177-186, in *Opere*, vol. II, pp. 541-550.

[1908, c] B. Levi, *Il significato educativo dell'insegnamento della matematica*, in Nuovi Doveri, rivista quindicinale di problemi educativi, Anno II, XVII-XVIII, n. 35-36, pp. 292-295, in *Opere*, vol. II, pp. 621-627.

[1908, f] B. Levi, *Alcune considerazioni sulle idee scientifiche primordiali – Discorso per l'inaugurazione dell'anno accademico 1907-1908 nella R. Università di Cagliari*, Premiata Tipografia Pietro Valdès, Cagliari, in *Opere*, vol. II, pp. 669-722.

[1909, b] B. Levi, *Le Lauree universitarie e la preparazione degli Insegnanti*, in Nuovi Doveri, rivista quindicinale di problemi educativi, Anno III, IV, n. 45, pp. 36-41, in *Opere*, vol. II, pp. 729-738.

[1914, b] B. Levi, *Esperienza e intuizione nel primo insegnamento della matematica*, in G. Lombardo-Radice, *La milizia dell'ideale. Letture sull'educazione proposte agli allievi maestri e agli studiosi*, Francesco Parella Editrice, Napoli, pp. 671-678, in *Opere*, vol. II, pp. 783-790.

[1918] B. Levi, *Riflessioni sopra con i principi della teoria degli aggregati delle funzioni*

[1922, a] B. Levi, *Il primo avviamento all'aritmetica*, in L'Arduo, rivista di Scienza - Filosofia e Storia, (2), Anno II, 2, pp. 61-65, in *Opere*, vol. II, pp. 847-851.

[1923, c] B. Levi, *Sui procedimenti transfiniti* (*Auszug aus einem Briefe an Herrn Hilbert*), Math. Ann., 90, 3/4, pp. 164-173.

[1938, a] B. Levi, *Sull'intuizione geometrica negli elementi di calcolo*, Rendiconti R. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sc. Fis., XLII, pp. 49-58.

[1940, c] B. Levi, *Evolución del pensamiento matemático*, contenuto in «I. Antecedentes de la creación del Instituto, II. Acto de la inauguración oficial del Instituto», Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. de la Universidad del Litoral, II, 5, pp. 100-111.

[1941, c] B. Levi, *Prólogo*, Math. Notæ, 1, 1, pp. 7-8.

[1941, f] B. Levi, *Geometría y experiencia*, Math. Notæ, 1, 2, pp. 63-65.

[1941, h] B. Levi, *El número entero y el intelectualismo*, (conferencia pronunciada el 3 de mayo de 1941 en el salón de actos de la Escuela Normal de profesores «Dr. Nicolas Avellaneda» de Rosario), Asociación cultural de Conferecias de Rosario, Ciclo de caracter general, 1, pp. 3-11.

[1942, a] B. Levi, *Al empezar el segundo año*, Math. Notæ, 2, 1, pp. 1-2.

[1943, f] *Cien años en la historia de la matemática*, Sociedad Científica Argentina, Ciclo de Conferencias Científicas y de Carácter General, Tomo II, Buenos Aires, pp. 57-68.

[1945, c] B. Levi, *Formación matemática*, Revista del Centro de Estudiantes de la Facultad De Ciencias Matemáticas (CEFCM) de la Universidad del Litoral, 19, pp. 1-7.

[1946, h] B. Levi, *Pensamientos y recuerdos. En ocasión de una reunión de profesores de enseñanza media*, in Insula, Año III, 11, Buenos Aires, , pp. 160-172.

[1954, b] B. Levi, *Una breve conversación de una palabra: "Matemática"*, Revista Trapalanda, 6, Setiembre 1954, Rosario, pp. 2-8.

[1955, b] B. Levi, *Algunas reflexiones sobre matemática y filosofía*, Math. Notæ, 14, 3-4, pp. 133-140.

[1958] B. Levi, *Mirando a la evolución histórica de la gnoseología científica*, Math. Notæ, 16, 3-4, pp. 92-100.

Levi B. 1922, *Abbaco da 1 a 20. Il primo libro d'aritmetica*, illustrazioni di ELLEBI, B. Levi editore, Parma.

[RecMN1945, b] G. Polya, *How to solve it. – A new aspect of mathematical Method*, Princeton University Press, 1945, Math. Notæ, 5, pp. 240-242.

[RecMN1947, a] J. W. A. Young, *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática en la escuela primaria y secundaria.* (selección de la obra *The Teaching of Mathematics in the Elementary and Secundary School*). Introducción por el Prof. Emanuel S. Cabrera (cerrado opción por Carlos Luzuriaga). Editorial Losad. Buenos Aires, 1947, Math. Notæ, 7, 1, pp. 76-77

Fonti archivistiche

UMI - Archives, Parte secretata
ASUT – Beppo Levi - Carriera
ASUB – Beppo Levi – Facsicolo personale

Riferimenti bibliografici

Celli A., Mattaliano M. 2015, *Eugenio Elia Levi. Le speranze perdute della matematica italiana*, con un intervento di Paolo Momigliano Levi, Università Commerciale Luigi Bocconi, Centro PRISTEM, Egea, Milano.

Coen S. 1998, *Un abbaco d'antan*, Bollettino U.M.I., La matematica nella Società e nella Cultura, Serie 8, 1-A, pp. 79-96.

Coen S. 1999, *Beppo Levi: una biografia*, *Opere* I, pp. XIII-LIV.

Giacardi L. 1999, *Matematica e humanitas scientifica. Il progetto di rinnovamento della scuola di Giovanni Vailati*, in Bollettino U.M.I., La Matematica nella Società e nella Cultura, Serie 8, 2-A, pp. 317-352.

Giacardi L. 2015, *Per una storia della Unione Matematica Italiana, 1922-1938. Nuovi documenti dall'Archivio*, XX Congresso della UMI, Siena 7-12 settembre 2015, abstract.

Giacardi L. , Raspitzu M. 2017, *Teaching and dissemination of mathematics in Beppo Levi's work. From Italy to Argentina,* in "Dig where you stand" 4. Proceedings of the fourth International Conference on the History of Mathematics Education. Rome: Nuova Cultura, 2017

Giuliotti, Domenico, Papini, Giovanni 1923, *Dizionario dell'Omo Salvatico*. Firenze: Vallecchi.

Levi L. 2000, *Beppo Levi, Italia y Argentina en la vida de un matemático*, Libros del Zorzal, Buenos Aires.

Lombardo Radice G. 1913, *Lezioni di didattica e Ricordi di esperienza magistrale*. pp. 375-391.

Luciano E. 2015, *La diffusione della Logica Peaniana nelle Americhe e il magistero di B. Levi e A. Terracini in Argentina (1938-1948*), in XX Congresso UMI, Siena 7-12 settembre 2015, abstract.

.

Momigliano Levi P. 2016, *Beppo Levi: Vita e Pensiero di un Matematico, Conferenze e Seminari 2015-2016,* Associazione Subalpina Mathesis 2016, Torino, pp. 259-282.

Nastasi P. 1998, *La matematica italiana dal manifesto degli intellettuali fascisti alle leggi razziali*, in Bollettino U.M.I., La matematica nella Società e nella Cultura, Serie 8, 1-A, n.3, pp. 317-345 Plá C. 1962, *Beppo Levi en la Argentina*, Math. Notæ, 18, pp. XIII-XXII.

Rey Pastor J. 1940, *La Matemática italiana en el ultimo medio siglo y la posición del dr. Beppo Levi en ella*, Publicaciones del Instituto de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Matemáticas etc. de la Universidad del Litoral, II, 5, pp. 91-97.

Raspitzu M., 2012-13, *Beppo Levi e l'insegnamento della matematica*, Tesi di laurea, Scuola di Scienze della Natura, Corso di Laurea in Matematica, Università degli studi di Torino, relatore Giacardi L., A.A. 2012/13.

Segre B. 1956, *Relazione per il conferimento del Premio "Antonio Feltrinelli" per la matematica per il 1956, riservato a cittadini italiani, di L. 1.500.000. Commissione: FRANCESCO SEVERI (Presidente), GIULIO KRALL, MODESTO PANETTI, MAURO PICONE, ENRICO PISTOLESI, GIOVANNI SANSONE, BENIAMINO SEGRE (Relatore),* in Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Adunanze Solenni, V, pp. 663-664.

Terracini A. 1963, *Commemorazione del Corrispondente Beppo Levi*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., XXXIV, maggio, pp. 590-606.

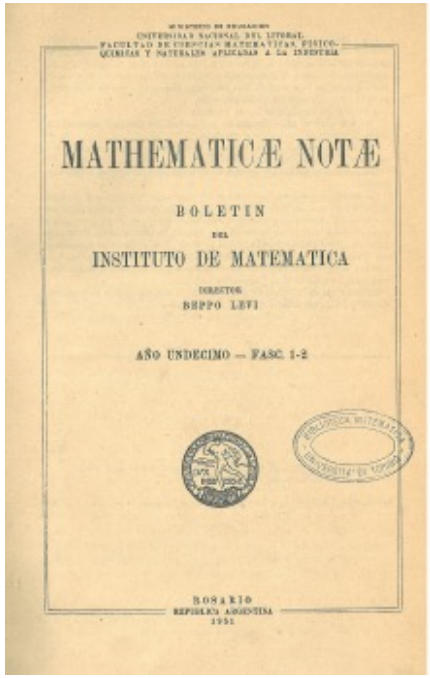
Viola T. 1961, *Beppo Levi*, Bollettino U.M.I., Serie III, XVI, pp. 513-516.

Appendici

La rivista *Mathematicae Notae*

"una hija que tiene siempre hambre"

e la formazione degli studenti universitari



MATHEMATICÆ NOTÆ

BOLETIN

DEL

INSTITUTO DE MATEMATICA

DIRECTOR

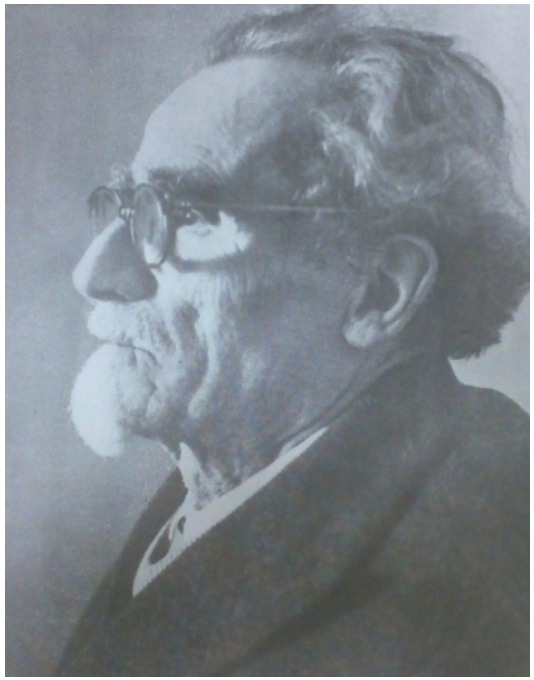
BEPPO LEVI

AÑO UNDECIMO — FASC. 1-2

ROSARIO

REPUBLICA ARGENTINA

1951



Mathematicæ Notæ , periodico dell' Instituto de Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas di Rosario (1941 $\longrightarrow$ oggi).

BL, direttore dell'Istituto, diresse la rivista dal primo numero con l'aiuto Luis A. Santaló fino alla sua morte nel 1961.

BL, *Prólogo* :

«… ante todo a los alumnos de la Facultad a la cual el Instituto está vinculado, pero esperan también encontrar alguna simpatía más allá del recinto de la Facultad, por parte de jóvenes que por primera vez se acercan a esta rama científica tan singular. Digo singular, porque la matemática […] interesa al ingeniero, al químico como instrumento poderoso para las aplicaciones, ***más que todo es un modo de pensar, es una filosofia. […]*** *Las "Mathematicæ Notæ" pretenden, pues, despertar un poco de interés para este pensamiento matemático; y quieren hacerlo en cuanto sea possible de modo ecléctico e indirecto.»* [BL, 1941c, 7].

«… risvegliare interesse verso il pensiero matematico; e intendono farlo, per quanto possibile, in maniera eclettica e indiretta.»

Lo scopo del giornale era duplice:

- formare i giovani e stimolarli alla ricerca
- divulgare le scienze matematiche.

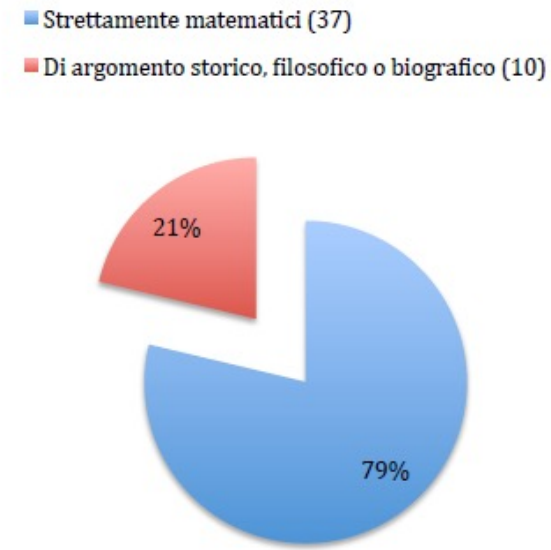
Gratuita per gli studenti
Premi

Internazionalità

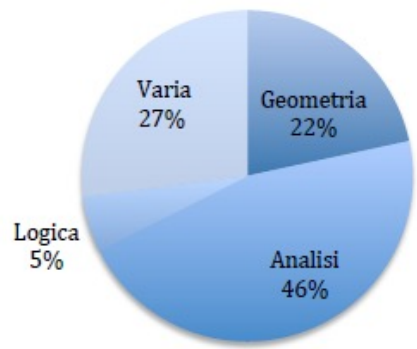
→ Articoli di **47 autori** di varie nazionalità (P. Capelli , M. Cotlar , R. Frucht , G. Fubini , L. Godeaux, B. Gross , T. Mihailescu , P. Pi Calleja, C. Pla , A. E. Sagastume Berra , L. A. Santaló, A. Terracini, G. Valiron, A. Wintner , …; Coen 1999, XXXII)

→ Relazioni con **168 istituti matematici**

→ Scambi con **146 journals** da **31 paesi** .



- BL scrisse **47 articles** (analisi, teoria dei numeri logica e fisica, …)
- Pubblicò **105 recensioni** di testi universitari su vari argomenti di matematica, libri di storia della matematica, testi relativi all'insegnamento della matematica (Young 1947, Giannarelli, Leonardi 1949, Garcia Serrano 1948, Polya 1945, Courant Robbins 1941, Brown 1945, Brown 1946, …).



Rubriche *Ejercicios y problemas, Cuestiones, Flores y hojas,* dedicate a problemi con differenti caratteristiche e obiettivi.

Ejercicios y problemas:

esercizi e problemi relativi a vari campi della matematica (geometria, analisi, teoria dei numeri, algebra e fisica matematica, calcolo delle probabilità).

Le soluzioni corrette erano pubblicate spesso con commenti del direttore contenenti dimostrazioni di proprietà utilizzate, aggiunta di dettagli o precisazioni o proposte di soluzioni alternative

Nei primi 10 volumi compaiono 170 esercizi e problemi.

Mathematicæ Notæ 1,1 1941, p. 34

N.º 2. — Demostrar que entre los triángulos que tienen el mismo perímetro 2p el triángulo equilátero tiene máximo radio del círculo inscripto. Establecer la relación $p^2 \geq 27\ r^2$.

N. DE LA R. En la demostración anterior se ha utilizado el teorema de que el producto de n factores de suma constante es máximo cuando los factores son iguales.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

Mathematicæ Notæ 2,1 1942, p. 40-44

N.º 5 — Dibujar la curva de ecuación $x^2 y - x^2 + y = 0$; determinar alguno de sus elementos notables (puntos de inflexión, puntos de máxima curvatura, asíntotas...); calcular el área comprendida entre la curva y la recta $y = 1$.

Solución. Se trata de una ecuación cúbica. La curva será simétrica respecto el eje de las y por contener únicamente potencias pares de x y por tanto bastará estudiarla sólo para valores positivos de x.

Como la ecuación de la curva se puede escribir

$$x = \pm \sqrt{\frac{y}{1-y}} \qquad (1)$$

se ve que x toma valores reales sólo para $0 \leqq y \leqq 1$; cuando y varía con continuidad en este intervalo, el valo recorre con continuidad el intervalo $0^- \infty$; por tiene una sola rama real (infinita) contenid $0 \leqq y \leqq 1$.

Esta solución es análoga a las enviadas por los Sres. LORENZO O. COPELLO y PEDRO E. ZADUNAISKY, alumnos de la Facultad de Ingeniería de Rosario. Otra solución ha enviado la Srta. MABEL MOLINELLI WELLS de Buenos Aires.

N. de la R. Entre las soluciones enviadas ninguna resuelve la cuestión de hallar los puntos de máxima curvatura. Veamos cómo se pueden hallar. Siendo la expresión general del radio de curvatura

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

SOLUCIONES

Mathematicæ Notæ 2,1 1942, p. 40-44

N.º 5 — Dibujar la curva de ecuación $x^2 y - x^2 + y = 0$; determinar alguno de sus elementos notables (puntos de inflexión, puntos de máxima curvatura, asíntotas...); calcular el área comprendida entre la curva y la recta $y = 1$.

Solución. Se trata de una ecuación cúbica. La curva será simétrica respecto el eje de las y por contener únicamente potencias pares de x y por tanto bastará estudiarla sólo para

Esta solución es análoga a las enviadas por los Sres. LORENZO O. COPELLO y PEDRO E. ZADUNAISKY, alumnos de la Facultad de Ingeniería de Rosario. Otra solución ha enviado la Srta. MABEL MOLINELLI WELLS de Buenos Aires.

N. de la R. Entre las soluciones enviadas ninguna resuelve la cuestión de hallar los puntos de máxima curvatura. Veamos cómo se pueden hallar. Siendo la expresión general del radio de curvatura

$$R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|},$$

Cuestiones:

- Questioni che richiedono conoscenze matematiche più approfondite
- Buona formazione per gli studenti della Facoltà di scienze desiderosi di mettersi alla prova nella ricerca scientifica.

N. 2. in Mathematicæ Notæ 1,1 p. 35

Se llama resto cuadrático de un número entero a con respecto a un entero positivo m (módulo) al resto de la división $a^2:m$. Aplicar estas nociones para demostrar alguna proposición como las siguientes: 1º, si tres números x, y, z realizan la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ hay entre ellos siempre uno par, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5 (nótese que podría el mismo número realizar dos de estas condiciones o las tres); 2º, si dos enteros x, y realizan la relación $24x^2 + 1 = y^2$, uno de ellos es múltiplo de 5.

Flores y hojas ("Fiori e foglie"):
Esercizi di analisi più raffinata come per esempio trovare lacune ed errori all'interno di un ragionamento.

II. Donde está el error del razonamiento siguiente: Dos superficies algebraicas se cortan según una curva; consideremos una función trigonométrica del ángulo de los planos tangentes a las dos superficies en un punto variable de dicha curva, apta a caracterizar dicho ángulo (por ej. la tangente). El valor de esta tangente se vincula algebraicamente con las coordenadas de aquel punto variable; por el teorema fundamental del álgebra, existirá pues uno o más puntos de la curva que realizan el sistema de ecuaciones que se obtiene poniendo esta tangente igual a cero; es decir, que habrá siempre algun punto en el cual las dos superficies se tocan.

- Era soprattutto Levi che preparava i problemi e correggeva le soluzioni inviategli dagli studenti .

Solución. El valor del radio de la circunferencia inscripta a un triángulo de área S vale

$$r = \frac{S}{p} \qquad (1)$$

y por tanto será máximo cuando lo sea S.

Por la fórmula de Heron es $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ y el valor de este radical será máximo cuando lo sea el producto $(p-a)(p-b)(p-c)$ ya que el otro factor p es constante.

Observemos que la suma $(p-a)+(p-b)+(p-c)$ vale lo mismo para cualquier triángulo de perímetro 2p. Ahora bien, sabemos que, para n factores cuya suma es constante, el producto es máximo cuando dichos factores son iguales. Luego, para que el radicando sea máximo debe ser $p-a = p-b = p-c$, de donde $a = b = c$, es decir: el área S es máxima cuando el triángulo es equilátero, y según (1) este triángulo será también aquel para el cual r es máximo.

Pasemos ahora a demostrar que para el triángulo equilátero es

$$p^2 = 27\, r^2$$

en efecto en el triángulo equilátero el centro del circuito inscripto es el punto de encuentro de las alturas y medianas; llamando h a la altura y a al lado se tiene pues

$$r = \frac{1}{3}\, h, \qquad h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a, \qquad a = \frac{2}{3}\, p$$

de donde

$$r = \frac{1}{3\sqrt{3}}\, p, \qquad p^2 = 27\, r^2.$$

Si esto se verifica para los triángulos equiláteros para los cuales r tiene un valor máximo, para otro triángulo cualquiera, r es menor y por tanto se verifica $p^2 > 27\, r^2$, como se quería demostrar.

Esta solución es debida salvo pequeñas modificaciones de forma al Sr. Oscar P. Simian de la Facultad de Ingeniería de Rosario. Otras soluciones del mismo problema han enviado la Srta. Mabel Molinelli Wells del Instituto del Profesorado de Buenos Aires, el Sr. Pedro E. Zadunaisky de la Facultad de Ingeniería de Rosario y el Sr. Modesto González, de San Luis.

Se llama resto cuadrático de un número entero a con respecto a un entero positivo m (módulo) al resto de la división $a^2:m$. Aplicar estas nociones para demostrar alguna proposición como las siguientes: 1º, si tres números x, y, z realizan la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ hay entre ellos siempre uno par, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5 (nótese que podría el mismo número realizar dos de estas condiciones o las tres); 2º, si dos enteros x, y realizan la relación $24x^2 + 1 = y^2$, uno de ellos es múltiplo de 5.

SOLUCIÓN. — Recordemos previamente un conocido teorema relativo a los restos cuadráticos. Sea a un entero cualquiera; si

$$a \equiv \alpha \pmod{m}, \qquad [1]$$

sigue que

$$a^2 \equiv \alpha^2 \pmod{m}. \qquad [2]$$

A cada entero a corresponde otro que le es congruente respecto del módulo m en cualquier intervalo numérico de amplitud m, por ej. en el intervalo $-\frac{m}{2} < x \leq \frac{m}{2}$; por lo tanto se puede convenir de dar a α en la [1] solamente valores de la forma $\pm\beta$, $0 \leq \beta \leq \frac{m}{2}$; y se puede también excluir el 0 si no se quiere considerar los múltiplos de m; pero a valores opuestos de β corresponde el mismo valor para β^2; por lo tanto la [2] demuestra que los restos cuadráticos distintos respecto de un determinado módulo m son en número $\leq \frac{m}{2}$, pudiendo este número ser aun $< \frac{m}{2}$, sea por el hecho que el intervalo $0 < x \leq \frac{m}{2}$ contenga menos de $m:2$ enteros (m impar), sea porque dos enteros de este intervalo tengan cuadrados congruentes respecto de m.

Se tiene luego la siguiente tabla de restos cuadráticos:

mod 2	1
» 3	1
» 4	1
» 5	1 - 1
» 6	1 - 2 3
» 7	1 2 - 3
.....	

Pasaremos ahora a la demostración de las cuestiones planteadas.

1º — Si tres números x, y, z realizan la igualdad $x^2 + y^2 = z^2$ hay entre ellos siempre uno par, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5.

Escribamos la ecuación en la forma

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \qquad [3]$$

El resto del primer miembro respecto a un número m cualquiera tiene que ser cero. Si $m = 2$ ó 3, basta notar que a no ser par o múltiplo de 3 alguno de los números x, y, z, el resto del primer miembro sería

$$1 + 1 - 1 = 1 \neq 0.$$

Para $m = 5$, siempre cuando ninguno de los números x, y, z sea múltiplo de 5, el resto del primer miembro respecto al mod. 5 sería

$$\pm (1 + 1 - 1) = \pm 1 \neq 0 \quad ó \quad \pm (1 + 1 + 1) = \pm 3 \neq 0.$$

Se concluye que si tres números x, y, z realizan la ecuación uno por lo menos de ellos debe ser múltiplo de 2, uno múltiplo de 3 y uno múltiplo de 5; por otra parte se puede excluir que dos de ellos sean múltiplos del mismo número, porque en este caso también el tercero debería ser múltiplo de este número y, después de suprimir el factor común se tendrían números realizando la ecuación. Al contrario pueden dos o también los tres de los factores nombrados pertenecer al mismo término, en cuyo caso, por lo di-

cha no pertenecerán a los restantes. Como ejemplos he aquí tres soluciones que presentan los diferentes casos posibles:

$x = 3$,	$y = 4$,	$z = 5$
12	5	13
20	99	101
15	8	17
60	11	61

Si hubiéramos considerado la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

poniendo 1 en lugar de cada término habríamos obtenido $1 + 1 + 1 - 1 = 2$ de donde habríamos podido concluir que una a lo menos de las incógnitas debe ser divisible por 3. Con respecto a los factores 2 y 5 se concluye análogamente que podrán no ser divisibles por ellos ninguno de los términos; pero si uno es múltiplo de 2 ó de 5 debe serlo también otro.

2º — Si dos enteros x, y realizan la relación $24\ x^2 + 1 = y^2$, uno de ellos es múltiplo de 5.

Se tiene en efecto que

$$24\ x^2 = 25\ x^2 - x^2 \equiv -x^2 \pmod 5\ ;$$

tiene luego que ser $1 \equiv x^2 + y^2 \pmod 5$ y mirando todavía a la tabla de restos cuadráticos se ve que esto sólo ocurre si $x \equiv 0$, ó $y \equiv 0 \pmod 5$. En consecuencia, uno de los números x, y debe ser necesariamente múltiplo de 5. Además el otro número deberá ser tal que su cuadrado sea $\equiv 1 \pmod 5$ y por lo tanto deberá terminar en una de las cifras 1 ó 4.

Un razonamiento análogo se aplica en general a la ecuación

$$(5\,a \pm 1)\ x^2 + (5\,b \pm 1) = y^2$$

donde a, b son enteros cualesquiera.