Lavorare con le mani e con la mente

L'emergere del metodo laboratoriale nell'insegnamento della matematica

Livia Giacardi
Storia delle Matematiche Due
2018-2019

Laboratorio → spazio da offrire agli allievi per poter dare libero sfogo ad attività spontanee e costruttive, individuali e di gruppo.

Friedrich A. Fröbel giardini d'infanzia

Johann H. Pestalozzi metodo intuitivo

Maria Montessori Materiale didattico

Ovide Decroly, promotore della *scuola del lavoro*

Alfred Binet, divulgatore della *scuola attiva*

John Perry (1850-1920), promotore della *Practical Mathematics*

Émile Borel (1871-1956)

Eliakim H. Moore (1862-1932) *Laboratory method in mathematics*

Felix Klein (1849-1925)

Giovanni Vailati (1863-1909), sostenitore in Italia della *scuola come laboratorio*

Emma Castelnuovo (1913-2014), geometria intuitiva

L'idea di offrire agli allievi spazi dove poter esplicare **un'attività spontanea e costruttiva**, coltivare la propria individualità e socializzare, appare di frequente negli studi di pedagogisti, psicologi ed educatori di fine Ottocento, inizi Novecento :

John Dewey, Georg Kerschensteiner, Herbert G. Wells, Ovide Decroly, Adolphe Ferrière, Maria Montessori, …

→ **formazione del fanciullo nei suoi primi anni di vita**

→ i matematici estesero l'idea di laboratorio alla **scuola secondaria:**

J. Perry, E. Borel, E. H. Moore, F. Klein, G. Vailati, …

John Perry (1850-1920)

Professore di meccanica e matematica al *Royal College of Science* di Londra dal 1896.
Perry sostiene che la matematica deve essere insegnata *"come ogni altra scienza … con esperimenti e ragionamenti ispirati al senso comune"*

Practical Mathematics:

«L'idea basilare nel metodo di studio chiamato ***Practical Mathematics*** *è che lo studente dovrebbe familiarizzarsi con le cose prima che gli venga chiesto di ragionare su di esse»* [Perry 1913, 21]

esperimenti, misure effettuate usando la carta millimetrata, raccolta di dati, disegno, metodi grafici, collegamenti con la fisica e altre scienze

Influenza dei metodi usati nei **giardini d'infanzia** (Pestalozzi e Froebel) basati sull'**attività** degli allievi e sull'educazione ***"dell'occhio e della mano"*** [Perry 1901, 27].

Fallimento dell'insegnamento tradizionale nei confronti dello studente medio:

"I metodi accademici di insegnare la matematica funzionano con circa il cinque per cento di tutti gli studenti, *quella piccola minoranza appassionata del ragionamento astratto: falliscono del tutto con lo studente medio"* [Perry 1913, VII]

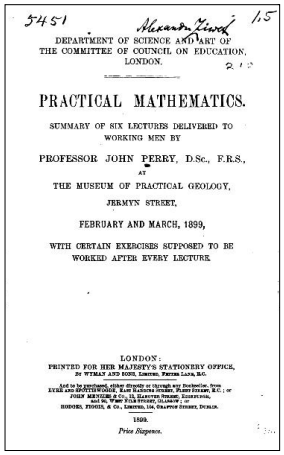
"Noi ora insegniamo a tutti i ragazzi quella che è chiamata filosofia matematica cosicchè possiamo prendere nella nostra rete l'unico semidio, il solo matematico puro e ***facciamo del nostro meglio per rovinare tutti gli altri"*** [Perry 1902, 6]

Cause

- insegnamento per *"compartimenti stagni"*
- tendenza a dare troppa importanza agli aspetti astratti della matematica e alle "regole evita-fatica".

Scopo dell'insegnamento:

"Noi dobbiamo cercare di produrre persone in grado di imparare" [*Report* 1909, 11]


5451

DEPARTMENT OF SCIENCE AND ART OF THE COMMITTEE OF COUNCIL ON EDUCATION, LONDON.

PRACTICAL MATHEMATICS.

SUMMARY OF SIX LECTURES DELIVERED TO WORKING MEN BY

PROFESSOR JOHN PERRY, D.Sc., F.R.S.,

AT

THE MUSEUM OF PRACTICAL GEOLOGY, JERMYN STREET,

FEBRUARY AND MARCH, 1899,

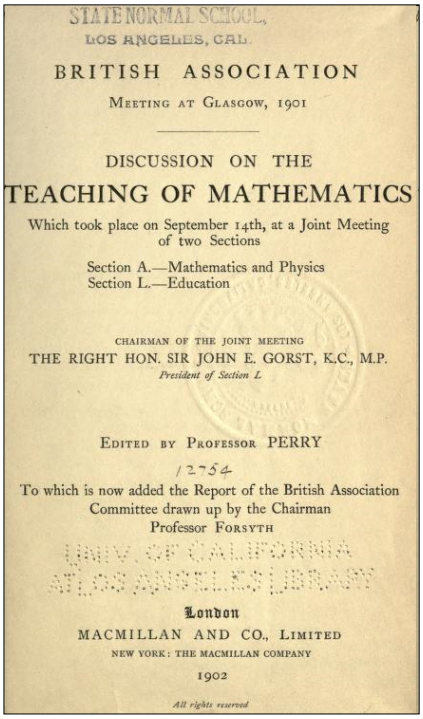
WITH CERTAIN EXERCISES SUPPOSED TO BE WORKED AFTER EVERY LECTURE.

LONDON:
PRINTED FOR HER MAJESTY'S STATIONERY OFFICE,
1899.
Price Sixpence.

1899

Scopi e utilità della matematica

- Produrre profonde emozioni e dare piacere intellettuale.
- Insegnare a pensare in modo logico.
- Offrire le "armi" matematiche nello studio delle scienze fisiche.
- Consentire il superamento degli esami, "il solo aspetto che non è mai stato trascurato e l'unico veramente riconosciuto dagli insegnanti".
- Fornire agli uomini strumenti intellettuali "così facili da usare come le gambe e le braccia".
- Fare in modo che coloro che sono impegnati in una professione di scienza applicata conoscano i principi su cui essa è fondata e secondo cui si è sviluppata … [Perry, 1902, 4-5].


STATE NORMAL SCHOOL,
LOS ANGELES, CAL.

BRITISH ASSOCIATION

MEETING AT GLASGOW, 1901

DISCUSSION ON THE

TEACHING OF MATHEMATICS

Which took place on September 14th, at a Joint Meeting of two Sections

Section A.—Mathematics and Physics
Section L.—Education

CHAIRMAN OF THE JOINT MEETING
THE RIGHT HON. SIR JOHN E. GORST, K.C., M.P.
President of Section L

EDITED BY PROFESSOR PERRY

12754

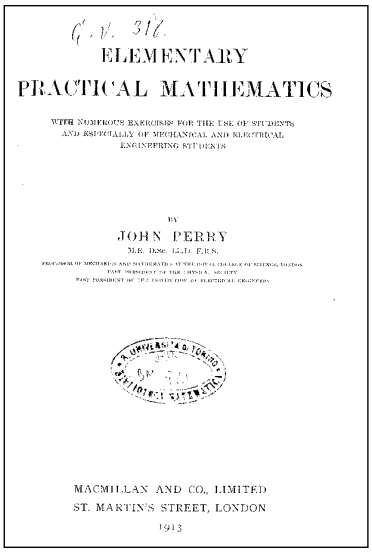
To which is now added the Report of the British Association Committee drawn up by the Chairman Professor FORSYTH

UNIV. OF CALIFORNIA
LOS ANGELES LIBRARY

London
MACMILLAN AND CO., LIMITED
NEW YORK: THE MACMILLAN COMPANY
1902

All rights reserved

1902


ELEMENTARY
PRACTICAL MATHEMATICS
WITH NUMEROUS EXERCISES FOR THE USE OF STUDENTS AND ESPECIALLY OF MECHANICAL AND ELECTRICAL ENGINEERING STUDENTS
BY
JOHN PERRY
M.E. Dsc. LL.D. F.R.S.
MACMILLAN AND CO., LIMITED
ST. MARTIN'S STREET, LONDON
1913

1913

Aritmetica, algebra, geometria, analisi infinitesimale, fisica.

La presentazione riflette un **approccio laboratoriale**:

- si parte in genere da un **problema pratico**;
- **si raccolgono e si interpretano dati numerici**;
- **si usa la carta quadrettata** per tabulare osservazioni, risolvere graficamente equazioni, per rappresentare funzioni, trovare la pendenza della tangente ad una curva,…;
- si insegna a costruire e a usare strumenti matematici
- si stabiliscono collegamenti fra le varie parti della matematica
- si mostra l'utilità della matematica per affrontare problemi della fisica e dell'ingegneria.

indicazioni metodologiche o consigli agli insegnanti [Perry 1913, 21, 25, 32, 51-52]

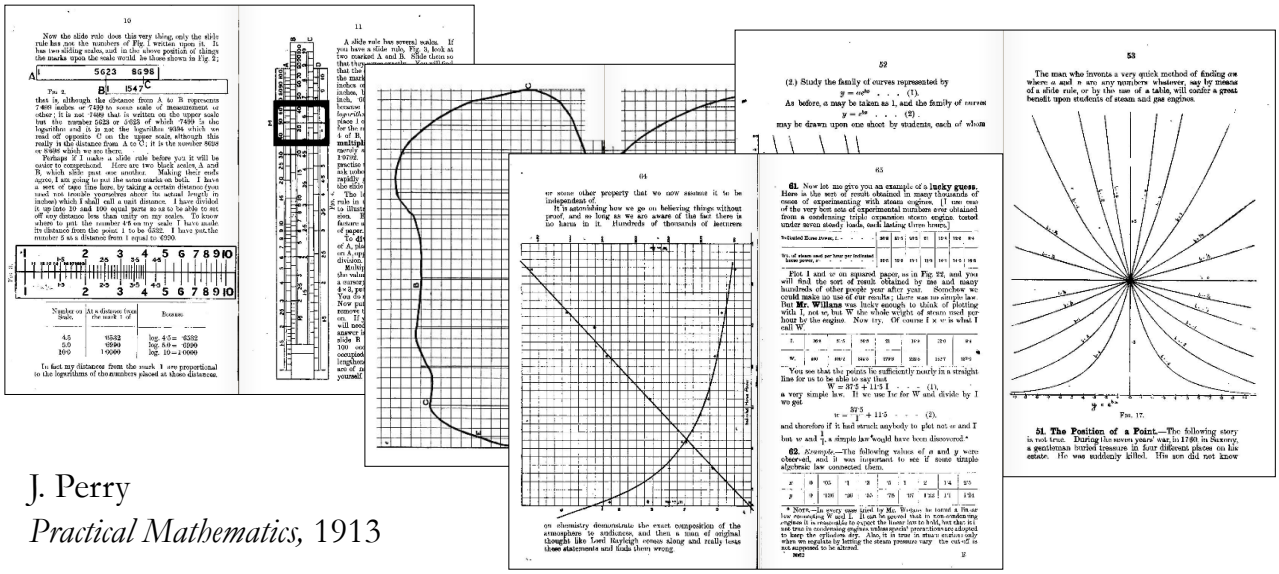
Il metodo della *Practical Mathematics* **può essere utilizzato a tutti i livelli di insegnamento** a patto che la trattazione rimanga legata a fenomeni reali e a problemi concreti.

In aritmetica: più enfasi sui decimali e sulle approssimazioni che sulle frazioni

In algebra: attenzione alla comprensione e alla manipolazione delle formule e alla variazione del valore di espressioni al variare dei valori delle variabili in esse contenute

In geometria:
- Perry critica il metodo euclideo
- Suggerisce che:

- sperimentazioni e misurazioni pratiche con l'uso della carta quadrettata vengano anteposte alla geometria dimostrativa;
- qualche ragionamento deduttivo affianchi la geometria sperimentale;
- si dia più importanza alla geometria solida;
- si utilizzino nozioni di trigonometria nello studio della geometria;
- si presti più attenzione alle applicazioni. [Perry 1902, 102]



J. Perry
Practical Mathematics, 1913

■ **Problem solving**
■ **approccio trasversale alla matematica molto concentrato sulle procedure**.
■ **matematica da "praticare" e non da sistematizzare in una teoria**

Questa la sua originalità, e nello stesso tempo il suo limite.

Influenza del movimento di Perry in Inghilterra

■ maggiore diffusione di metodi pratici nell'insegnamento della matematica ad ogni livello scolare:

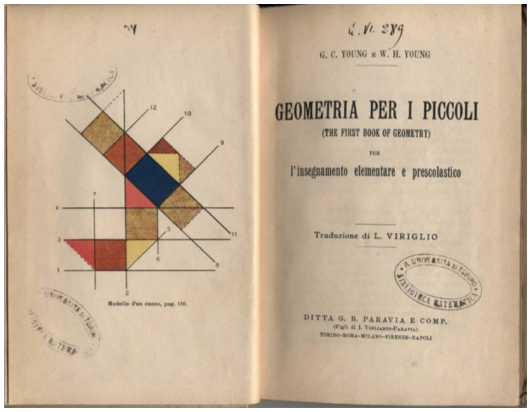
ICM, Cambridge 1912 - Charles Godfrey presentò i risultati di un questionario sull'uso dei metodi pratici: **la rappresentazione grafica di funzioni, e l'uso della carta quadrettata per valutare aree, erano adottati nelle scuole pubbliche inglesi (ragazzi dai 12 ai 18 anni) in una percentuale di oltre il 90 per cento** [Godfrey, 1913].

■ affermazione di alcuni principi basilari :
- maggiore democrazia nell'educazione,
- maggiore considerazione di ciò che serve nella vita reale,
- maggiore attenzione agli aspetti pedagogici.

■ più spazio al lavoro sperimentale nell'**insegnamento della geometria,** comparsa di laboratori in molte scuole e di nuovi libri di testo.

Grace and William Young
A First Book of Geometry
(1905),

tradotto in italiano da Luisa Viriglio su suggerimento del suo professore Corrado Segre.



La scoperta della proprietà geometriche e dei teoremi nasce dalla costruzione e dalla manipolazione di modelli di cart di poliedri regolari o di solidi ottenuti da essi accostandone due o più o troncandoli opportunamnete.

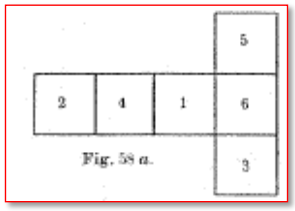


Fig. 58 a.

sviluppo

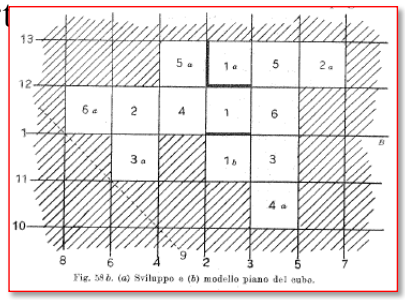
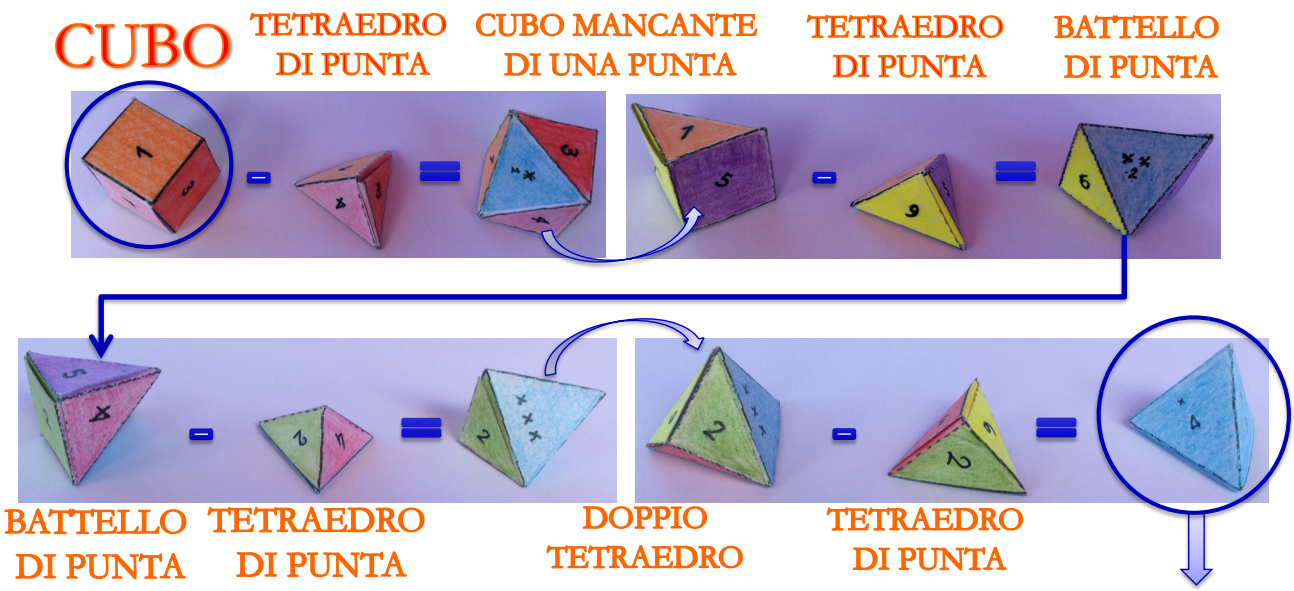


Fig. 58 b. (a) Sviluppo e (b) modello piano del cubo.

«modello piano» con facce da incollare per comporre il solido.



"Di tutti questi solidi che abbiamo ottenuto dal cubo, il ***tetraedro regolare*** *è il primo le cui facce siano tutte congruenti. Vedete pure che in ogni vertice occorre lo stesso numero di facce disposte nello stesso modo. Perciò il tetraedro con quattro facce equilatere, dicesi regolare, è regolare come il cubo."* p. 140

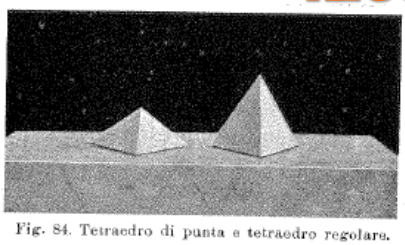
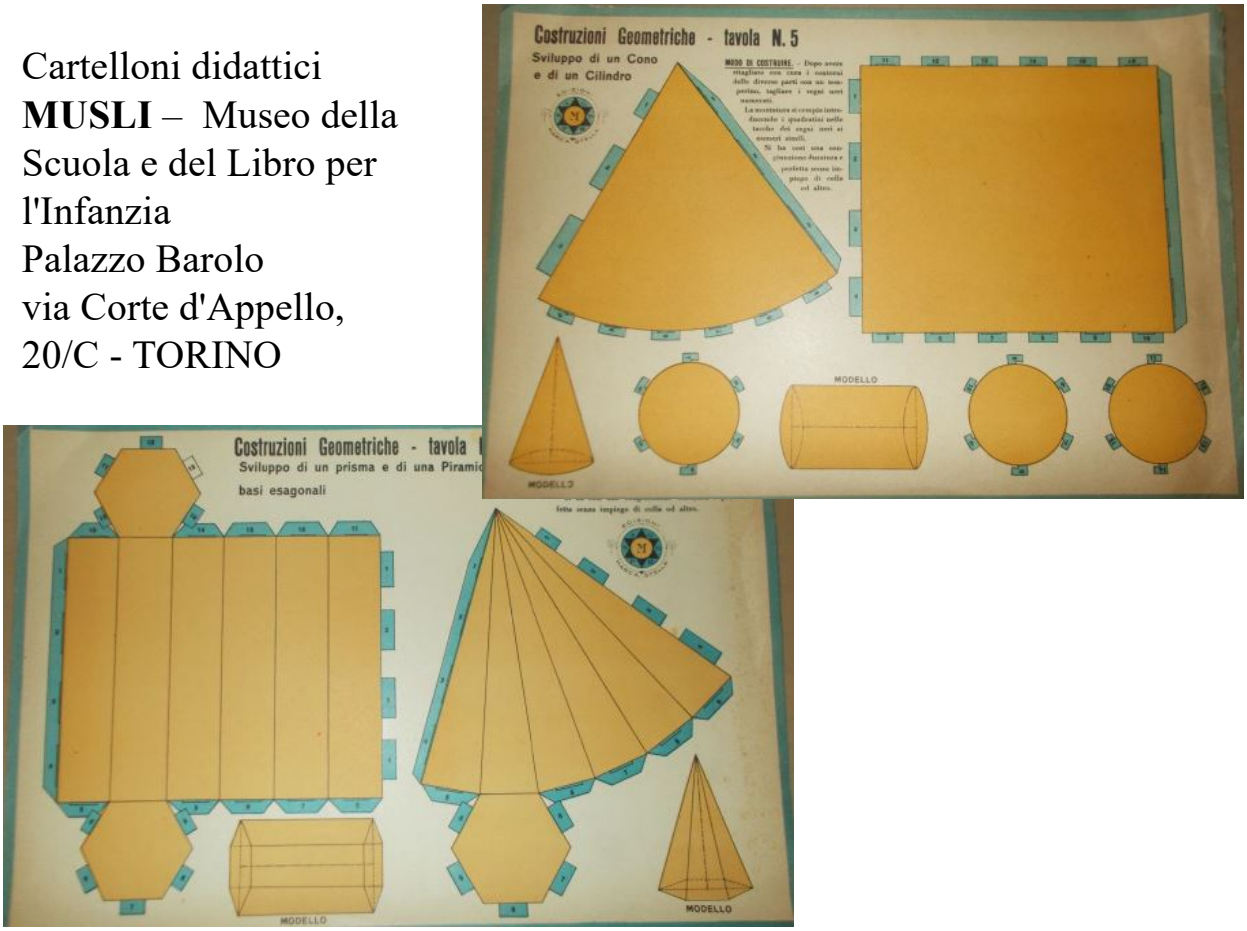


Fig. 84. Tetraedro di punta e tetraedro regolare.

Cartelloni didattici
MUSLI – Museo della Scuola e del Libro per l'Infanzia
Palazzo Barolo
via Corte d'Appello, 20/C - TORINO



La scuola-laboratorio di Giovanni Vailati

Livia Giacardi
Storia delle Matematiche Due
2018-2019

Giovanni Vailati

(Crema 24.4.1863 - Roma 14.5.1909)
matematico, filosofo, educatore
membro della Scuola di Giuseppe Peano.

Laurea in ingegneria presso l'Università di Torino nel **1884** e in matematica nel **1888**.

Dopo aver insegnato per alcuni anni all'Università di Torino,

nel **1899** lasciò Torino per insegnare nelle **scuole secondarie** (Pinerolo, Siracusa, Bari, Como e Firenze).

1905-1909 – è membro della **Commissione Reale** per la riforma delle scuole secondarie

Punto di partenza: limiti e carenze dell'organizzazione scolastica

► verbalismo e apprendimento passivo rendono la scuola "una palestra mnemonica" dove l'allievo è "considerato come un recipiente da riempire" ed è "occupato a imparare (*accipere*) e troppo poco a capire (*concipere*)" [Vailati 1899, S III, 261]

"***Il risultato finale di questo sistema di coltura intensiva****, troppo simile al sistema di nutrizione posto barbaramente in opera nelle campagne della bassa Lombardia per ottenere i prelibati fegati d'oca, si riduce troppo spesso a questo,* ***di far nascere in tutti gli alunni, e spesso nei più intelligenti, una tale ripugnanza a tutto ciò che sa di scuola*** *... da far quasi ritenere una fortuna che nei programmi scolastici si dia tanta parte a ciò che non val la pena di essere saputo".* [Vailati 1906, S III, 293]

► scarsa interazione fra cultura umanistica e scientifica e eccessivo numero di ore dedicate all'insegnamento della lingua e della letteratura italiana :

"L'effetto finale sarebbe quello di favorire e accentuare sempre più la divisione, esistente già in parte anche oggi, delle persone colte in due classi, l'una delle quali scrive e parla bene di quello che non sa e l'altra non sa parlare né scrivere convenientemente di quello che sa; ***da una parte cioè gli artefici della parola armoniosa e vuota, dall'altra gli scienziati dal linguaggio barbaro e dall'animo incolto****".* [Vailati 1900, S III, 263]

► eccessivo affollamento delle classi ed elevato numero di ore che i ragazzi anni trascorrono «inchiodati» ai banchi di scuola

► carenza di strutture a supporto dell'attività didattica, quali **biblioteche e laboratori** e, soprattutto, la mancanza di buoni manuali scolastici, di dizionari, di enciclopedie, di repertori bibliografici, di opere di divulgazione e di edizioni di classici [Vailati 1906]

Radici della visione vailatiana dell' insegnamento della matematica

► conoscenza dei programmi e dell'organizzazione scolastica degli altri paesi europei [Cart 41, *Fondo Vailati*, Milano]

► attenzione ai movimenti di riforma di **F. Klein** in Germania, di **J. Perry** in Inghilterra e di **G. Darboux** in Francia

► Frequentazione di Peano e della sua scuola (rigore, riflessione sul linguaggio, esigenza di democratizzazione del sapere)

► Pragmatismo di Sanders Peirce (lotta contro i problemi privi di senso)

► Istanze positivistiche (*humanitas* scientifica, didattica basata su una conoscenza positiva dell'uomo, il processo conoscitivo procede dai fatti alle astrazioni, valore applicativo del sapere)

► Interesse nei confronti della psicologia

Congressi: Monaco 1896, Parigi 1900, Roma 1905

La Scuola-laboratorio

Manca un'esposizione sistematica

- Recensione di: M. Begey *Del lavoro manuale educativo*,1901 [S III, 264-266]
- *Idee pedagogiche di H. G. Wells*, 1906 [S III, 291-295]

- **Programmi di Matematica** per la Commissione Reale
- **Note metodologiche**

La scuola-laboratorio proposta da Vailati, in Italia ha un significato più ampio che all'estero:

"scuola come laboratorio, come luogo dove all'allievo è dato il mezzo di addestrarsi, sotto la guida e il consiglio dell'insegnante, a ***sperimentare e a risolvere questioni, a ... mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e difficoltà*** *atte a provocare la sua sagacia e coltivare la sua iniziativa"*
[Vailati 1906, S III, 292]

- metodo socratico,
- lavoro manuale e giochi come aiuto all'apprendimento,
- metodo operativo sperimentale,
- visione unitaria della matematica,
- uso della storia della matematica per conseguire l'unità del sapere

■ Metodo Socratico, lavoro manuale e giochi

► il **metodo socratico** permette all'insegnante di guidare i suoi studenti alla scoperta delle verità matematiche, stimolare la riflessione e la ricerca personale;

► introdurre **momenti di gioco** nel processo di apprendimento non diminuisce affatto *"la dignità della scienza matematica"*, anzi ne accresce l'attrazione. [Vailati 1899, 261]

► il **lavoro manuale** può servire a

- *esercitare le varie facoltà di* ***osservazione, di discriminazione, di attenzione, di giudizio***
- e costituisce *un* ***ottimo antidoto contro l'illusione diffusa*** *di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso certe parole.*

[Vailati 1901, S III, 264-266]

► deve cambiare il modo di «interrogare»

"Il peggior modo di assicurarsi del grado di conoscenza che un individuo, e specialmente un bambino, ha di qualche cosa, è quello di ***domandargli che cosa essa è.*** *[…] Su nessun altro punto si presenta, infatti, così stridente il contrasto tra i procedimenti didattici ordinariamente seguiti e la tendenza fondamentale della psicologia moderna a riguardare i concetti generali come dei semplici strumenti (*Denkmittel*), non aventi altro compito che quello di renderci possibile ordinare, classificare, foggiare a determinati scopi, il materiale bruto delle esperienze particolari. In conformità a tale veduta,* ***il non saper applicare un concetto […] equivale a non possedere affatto il concetto stesso e a non averlo ancora acquistato, qualunque sia d'altronde l'abilità che si abbia a ripetere delle parole che pretendano definirlo o spiegarlo****".* [Vailati, 1905, S III, 280]

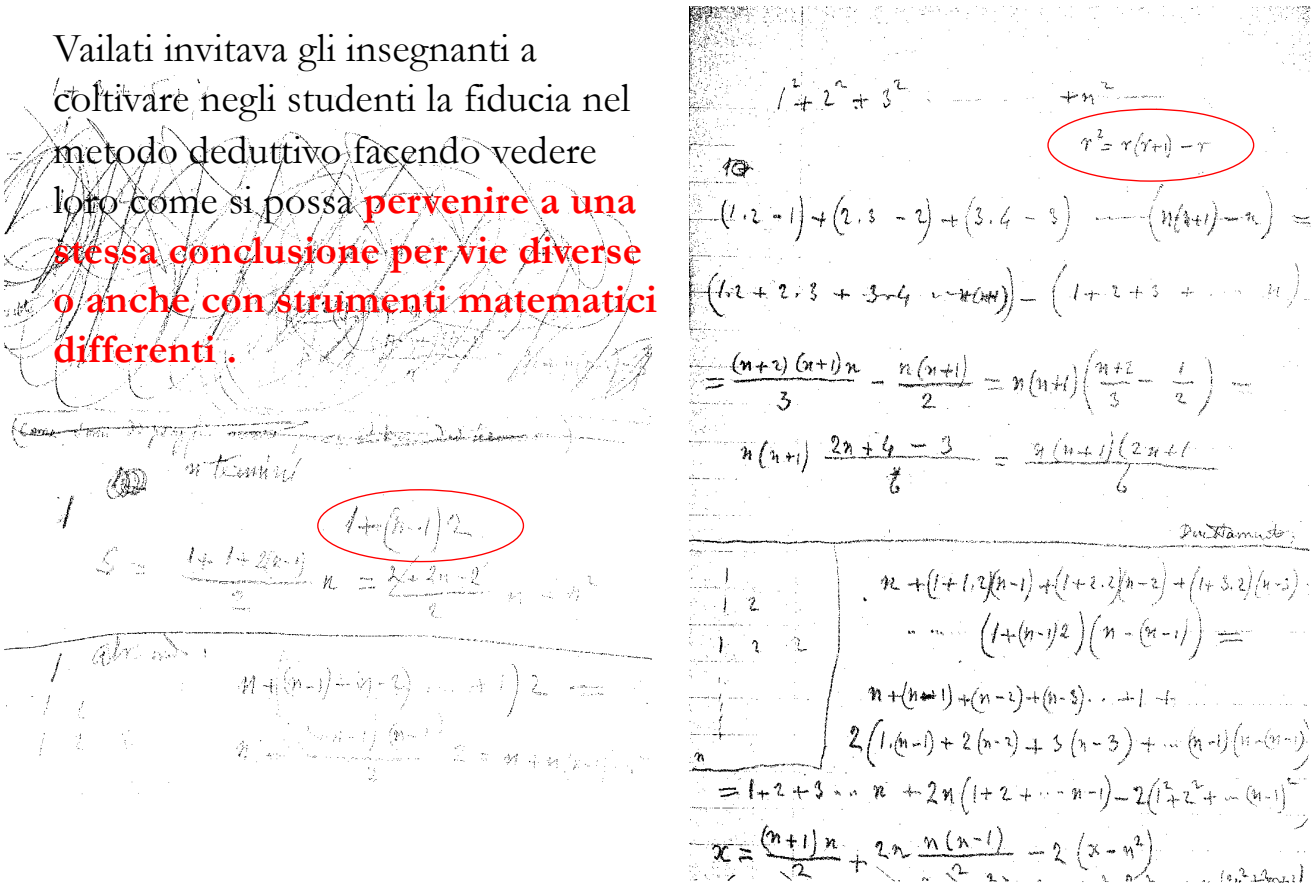
■ Il metodo sperimentale operativo

- dimostrare di *saper fare*, non solo di *saper dire.*

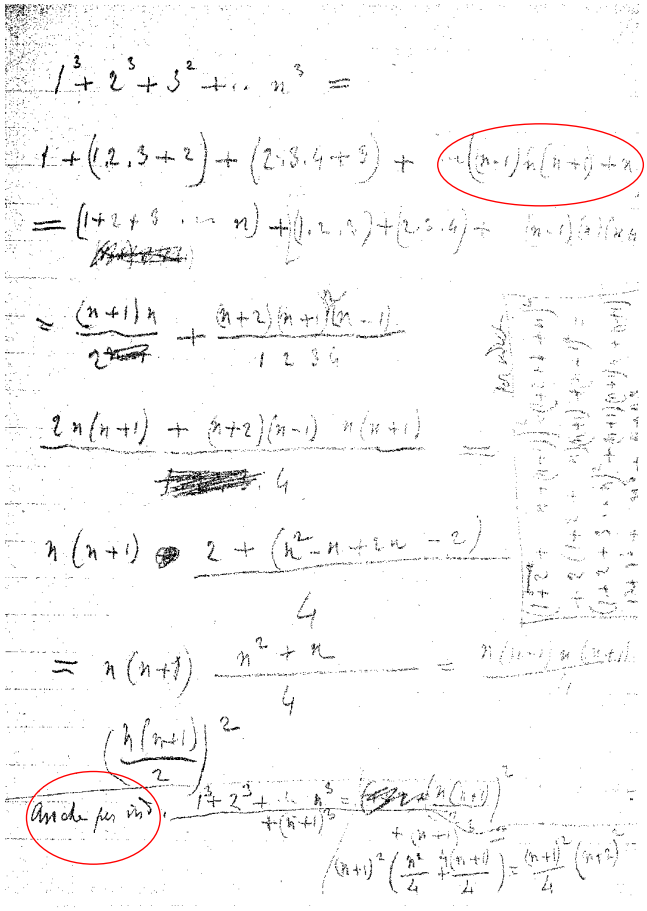
Il disegno, la costruzione delle figure, il ricorso alla carta millimetrica, alla bilancia, ai modelli geometrici possono *"guidare e spingere l'alunno a procurarsi, per via di esperimento …, il più gran numero possibile di cognizioni sul modo di costruire le figure e sulle loro proprietà, …* ***far nascere in lui il desiderio e il bisogno di rendersi ragione del «come» e del «perché» tali proprietà sussistano, e di predisporlo a riguardare come interessante l'apprendimento, o la ricerca di connessioni deduttive tra esse"*** [Vailati 1907, S III, 305]

Matematica "da praticare", ma soprattutto matematica da sistematizzare in una teoria.

Vailati invitava gli insegnanti a coltivare negli studenti la fiducia nel metodo deduttivo facendo vedere loro come si possa **pervenire a una stessa conclusione per vie diverse o anche con strumenti matematici differenti .**



Appunti Lezioni, Istituto Tecnico, Como 1901-1904, *Fondo Vailati*

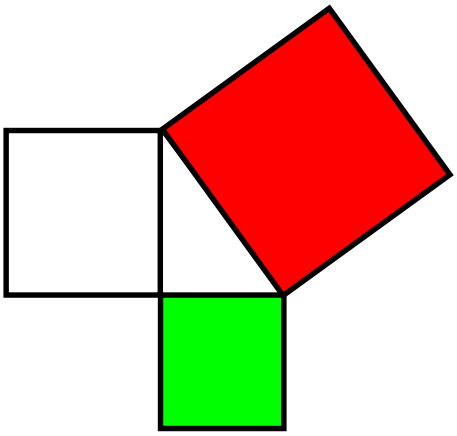


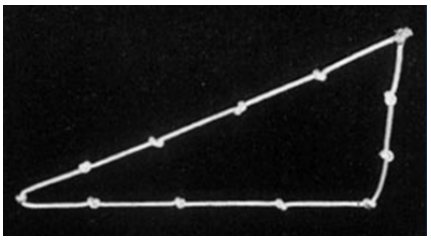
Somma dei cubi dei primi *n* numeri naturali

Quali metodi utilizza Vailati ?

Gli enunciati dei teoremi dovrebbero essere presentati, per quanto possibile come problemi:

"Per esempio, il teorema di Pitagora potrebbe vantaggiosamente esser presentato come una risposta al problema di trovare un ***quadrato la cui area*** *equivalga alla* ***somma delle aree di due quadrati dati,*** *o come una risposta alla domanda di* ***costruire, sul terreno, un angolo retto avendo a disposizione soltanto una corda*** *che si possa dividere per esempio in dodici tratti uguali"*
[Vailati 1910, p. 38]





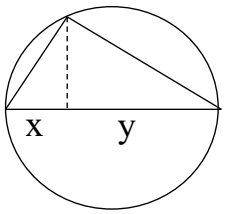
■ L'unità delle matematiche

▶ connessioni fra geometria e algebra

"si deve parlare il più presto possibile non solo di applicazioni dell'algebra alla geometria, ma anche, viceversa di applicazioni della geometria all'algebra", allo scopo di abituare gli allievi ad **affrontare uno stesso problema con vari metodi** [*Fondo Vailati*, Cart. 38] e a scegliere, di volta in volta, quello più conveniente. [Vailati 1910, 57]

*"Si pensi per esempio quanto più facilmente l'alunno riconoscerebbe il senso e la portata di una proposizione come questa: che "**la media geometrica di due numeri non può mai superare la loro media aritmetica",** quando gli si facesse osservare che, in un circolo avente per diametro la somma di due segmenti, la seconda è rappresentata dal **raggio**, e l'altra invece dalla **metà di una corda**"* [Vailati 1909, 487]

$$\frac{x+y}{2} \qquad \sqrt{x \times y}$$



▶ connessioni fra aritmetica e algebra

occorre abituare l'allievo a **tradurre in equazioni gli enunciati** dei problemi e a semplificare tali equazioni applicando le regole che già conosce e successivamente a **ritradurre in parole le condizioni espresse dalle formule** via via ottenute.

Lo scopo è di condurlo a **concepire l'algebra semplicemente come una nuova forma di linguaggio di gran lunga più preciso del linguaggio ordinario** e in grado di ***"ridurre domande o problemi originariamente complicati, a forma tanto semplice da non esigere quasi più alcuno sforzo mentale per la loro risoluzione".*** [Vailati 1910, 40, Vailati a Vacca, EV, 207]

■ Importanza della storia della scienza per conseguire l'unità del sapere

▶ dialogo fra cultura umanistica e scientifica

▶ funzione didattica

- ***spedantizzare*** *l'esposizione* [Vailati a Vacca, 25.5.1901, EV, 187].

- *rendere l'insegnamento più* ***proficuo*** *e nello stesso tempo più* ***gradevole****, più* ***efficace*** *e insieme più* ***attraente***. [Vailati 1897, S II,10]

▶ **ruolo educativo e formativo:**
antidoto contro ogni forma di dogmatismo

L'insegnante può aiutare gli allievi ad accostarsi alla storia della scienza attraverso **letture commentate di passi dei classici**.
Vailati stesso leggeva ai suoi studenti passi tratti dagli *Elementi* di Euclide [*Fondo Vailati*].

Nel 1909 fu pubblicato il progetto di riforma della Commissione Reale

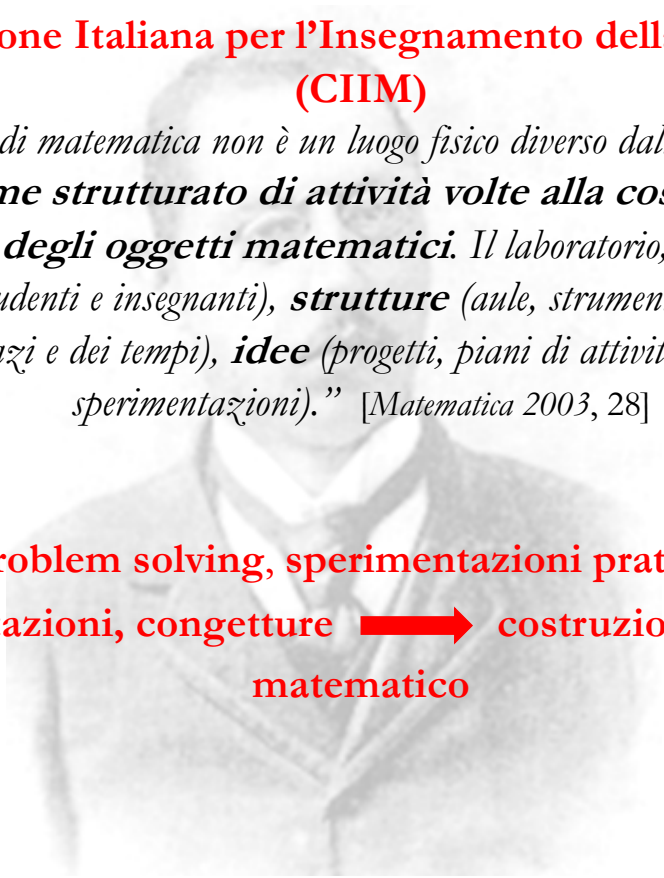
Fattori che impedirono che il laboratorio di matematica proposto da Vailati per la scuola secondaria diventasse una pratica diffusa:

▶ **Nel maggio 1909 Vailati morì**
La riforma proposta dalla Commissione Reale **non fu mai realizzata**
▶ Vailati **non diede mai un'esposizione sistematica delle sue idee**
▶ Non tutti (matematici e insegnanti) condividevano questo approccio (Bollettino della Mathesis, 1908-1910)
▶ Non furono pubblicati libri di testo conformi
▶ La Riforma Gentile (1923) rese le **discipline umanistiche** l'asse culturale della nazione e soprattutto della scuola secondaria.

… negli anni quaranta e cinquanta l'idea di laboratorio di matematica è stata ripresa da Emma Castelnuovo e dai matematici e pedagogisti della CIEAEM

Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica (CIIM)

"Il laboratorio di matematica non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un ***insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici****. Il laboratorio, quindi, coinvolge* ***persone*** *(studenti e insegnanti),* ***strutture*** *(aule, strumenti, organizzazione degli spazi e dei tempi),* ***idee*** *(progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni)."* [*Matematica 2003*, 28]



problem solving, sperimentazioni pratiche, argomentazioni, congetture ➡ costruzione del sapere matematico

Bibliografia essenziale

G. Vailati [EV] *Epistolario 1891-1909*, a cura di G. Lanaro, Torino, Einaudi 1971

G. Vailati [S] *Scritti*, a cura di M. Quaranta, 3 voll., Sala Bolognese (Bo), Forni Editore, 1987

J. Perry, *Discussion on the teaching of mathematics* 1902
http://www.archive.org/stream/discussionontеac00britiala#page/n7/mode/2up

J. Perry, *Practical mathematics* 1899
http://www.archive.org/stream/practicalmathem00britgoog#page/n3/mode/2up

J. Perry, *Elementary practical mathematics* , London, Macmillan and Co. 1913

M. Bartolini Bussi, D. Taimina, M. Isoda, *Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world*, ZDM , 42.1, 1910, pp. 19-31

L. Giacardi, *The emergence of the idea of the mathematics laboratory at the turn of the twentieth century*, in *Dig where you stand* 2, UIED, Caparica 2012, pp. 203-225

M. Price, *The Perry movement in school mathematics*, in M. Price, (ed.) *The Development of the Secondary Curriculum,* London 1986, pp. 103-155.

Matematica 2003, a cura di G. Anichini, F. Arzarello, L. Ciarrapico, O. Robutti, *La matematica per il cittadino. Ciclo secondario*, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri, Lucca 2004 http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/

L. Giacardi 2015, *Models in mathematics teaching in Italy (1850-1950)*, in *Proceedings of Second ESMA Conference, Cagliari,* C. Bruter (ed.), *Mathematics and art III, Paris,* pp. 9-33.

L. Giacardi 2016 *"Lavorare con le mani e con la mente". Il laboratorio di matematica fra Ottocento e Novecento*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 39, 2016, pp. 517-549

L. Giacardi, R. Scoth, *Documenti per la storia dell'insegnamento della matematica in Italia (1859-1923)*, http://www.associazionesubalpinamathesis.it/storia-insegnamento/provvedimenti-legislativi/