

DUE PROPOSTE
DI
ANALISI MATEMATICA

Lorenzo Orio

Introduzione

Il lavoro propone 2 argomenti di analisi matematica trattati in maniera tale da privilegiare l'intuizione e con accorgimenti nuovi.

Il 1° tratta della concavità dei grafici di funzioni reali (di una variabile reale) in prossimità di asintoti verticali e all'infinito: studio della concavità con l'ausilio dei soli limiti (senza il calcolo della derivata seconda).

Il 2° si occupa dei massimi e dei minimi vincolati per una funzione reale di due variabili reali: metodo di sostituzione anche quando il vincolo non è lineare.

(1)

CONCAVITA' DI UNA CURVA

METODO PER DETERMINARE LA CONCAVITA' DI UNA CURVA, GRAFICO DI $y = f(x)$, PER VALORI DI x CHE TENDONO ALL'INFINITO (O IN PROSSIMITA' DI ASINTOTI VERTICALI) SENZA L'USO DELLA DERIVATA SECONDA.

Nello studio di funzioni reali di variabile reale si è soliti utilizzare la derivata seconda (quando esiste...) per determinare la concavità del grafico cartesiano relativo alle funzioni stesse.

Nel caso in cui, però, si voglia conoscere la suddetta concavità (o convessità) per $x \rightarrow \pm\infty$ (se il dominio permette ciò), o in prossimità di eventuali asintoti verticali, si può evitare la derivata seconda.

Infatti, sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale, dotata almeno di derivata seconda, definita, con le sue prime derivate, in un intervallo illimitato (es. $E = (0, +\infty)$ e simili), di cui si sappia che è sempre crescente (decrescente) da un certo valore "in poi" (oppure "prima" di un certo valore) e che il segno della derivata seconda $f''(x)$ si mantenga costante in quell'intervallo, conoscendo solo il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = L$ (oppure $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = L$) si potrebbe deciderne la concavità nell'intervallo suddetto (cioè per $x \rightarrow +\infty$ o per $x \rightarrow -\infty$).

Come è noto il $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ è uguale al coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo relativo al grafico cartesiano di $y = f(x)$ e ciò può chiarire il motivo per cui si può dedurre (anche solo intuitivamente) la concavità della curva per $x \rightarrow \pm\infty$.

Vengono qui di seguito raffigurati gli 8 casi possibili nelle ipotesi in cui L valga zero o infinito, cioè non vi siano asintoti obliqui (né orizzontali).

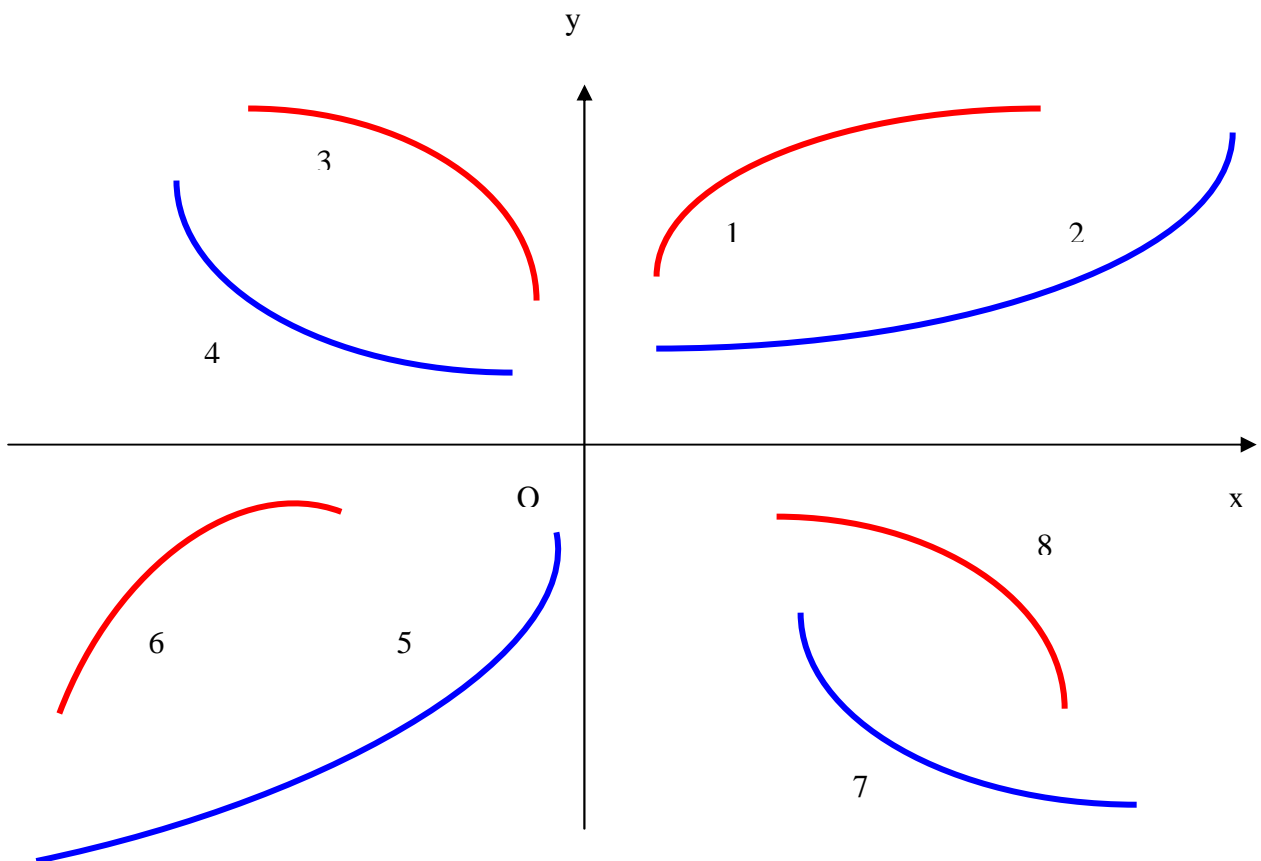
Successivamente si tratteranno anche tutti gli altri casi.

ESEMPLI.

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0^+$ |
| 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0^-$ |
| 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ | $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ |

Figura 1.

(relativa agli esempi di cui sopra)



Analogamente per i casi 5), 6), 7), 8) in cui è $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty$.

Formalizziamo il teorema in un solo caso, poiché, per i rimanenti casi si potrà procedere in modo analogo.

Li riassumeremo tutti alla fine della trattazione.

TEOREMA (“principale”)

Ipotesi:

$f(x)$ possiede derivata prima e seconda.

$$\exists M \in \mathfrak{R}^+ / \forall x > M \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \\ f''(x) \text{ ha segno costante.} \end{cases}$$

Tesi: $f''(x) > 0, \forall x > M$.

Osservazione iniziale. L'ipotesi implica $f'(x) > 0$. Infatti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow f(x)$ crescente (... $\forall x > M$).

Dimostrazione.

Consideriamo un valore x_0 appartenente ad E (dominio di $f(x)$) tale che $x_0 > M$.

L'equazione della retta (t) tangente al grafico della funzione nel punto $P(x_0, f(x_0))$ è la seguente:

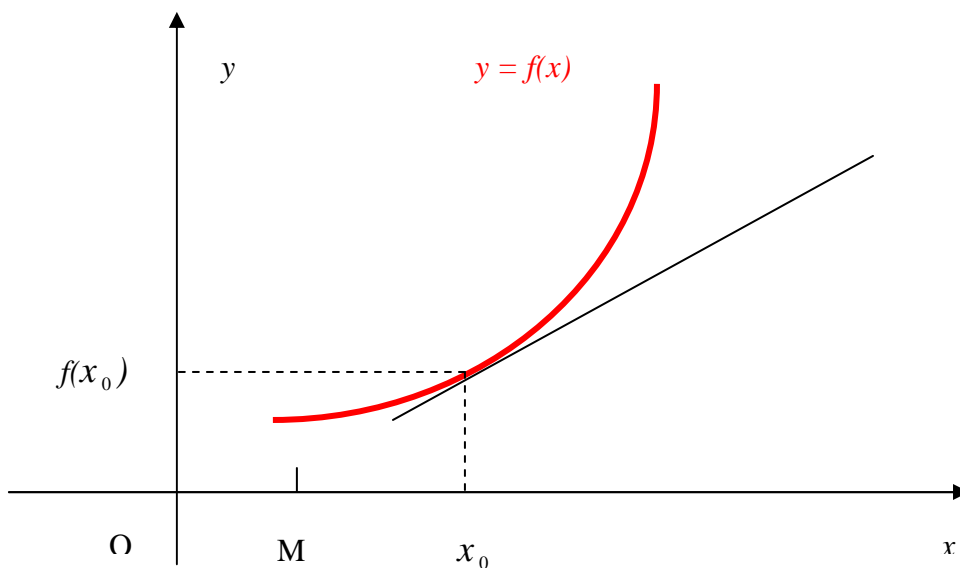
$$(t) \quad y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

La “differenza” fra la funzione $f(x)$ e la retta si potrà quindi scrivere:

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Graficamente (vedi Fig. 2 alla pagina seguente):

Figura 2.



$$\exists x_1 / f(x) - y = (x - x_0) \cdot f'(x_1) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) ,$$

dove si è applicato il teorema di Lagrange alla funzione $y = f(x)$ nell'intervallo (x_0, x) , dove perciò $x_1 \in (x_0, x)$.

Abbiamo quindi supposto, per comodità, che sia $x > x_0$. Quindi:

$$f(x) - y = (x - x_0) \cdot [f'(x_1) - f'(x_0)] , \quad x_0 < x_1 < x .$$

Ma per ipotesi lo stesso teorema (di Lagrange) si può applicare alla $f'(x)$.
Dunque:

$$\exists x_2 / f(x) - y = (x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) f''(x_2) \quad \text{con} \quad x_0 < x_2 < x_1 < x .$$

Sarà:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = +\infty - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x} = \\ &= +\infty - f'(x_0) = +\infty. \quad (\text{Ci sia consentita la notazione!}) \end{aligned}$$

Quindi dovrà pure essere (tenendo formalmente conto della dipendenza di x_1 e x_0 da x):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - x_0) \cdot (x_1 - x_0) \cdot f''(x_2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x_1(x) - x_0(x)) f''(x_2)] = +\infty ,$$

da cui, essendo $x > M > 0$, si deduce $f''(x_2) > 0$ ($x_1 > x_0$) e, poiché $f''(x)$ ha segno costante per ipotesi per $x > M$, si ha $f''(x) > 0$, $\forall x > M$, c.v.d.

(Vedi ad es. Fig. 1, caso 2).

OSSERVAZIONE.

La continuità di $f''(x)$ non è necessaria per la validità del teorema (vedi pure teorema di Darboux : “*La derivata di una funzione dappertutto derivabile in un intervallo, pur non essendo necessariamente continua, gode tuttavia della proprietà delle funzioni continue espressa dal cosiddetto teorema di esistenza degli zeri*”).

Se invece si cambiasse una parte dell’ipotesi del teorema “principale” con $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ e $f''(x) > 0$ per $x > M$, si avrebbe come tesi: $f''(x) < 0$, per $x > M$.

Dimostrazione.

Ripetendo i passaggi effettuati a suo tempo si giunge a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{y}{x} \right) = 0 - f'(x_0) = -f'(x_0)$$

e quindi a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x_1 - x_0) f''(x_2)] = -f'(x_0) < 0 \quad (\text{essendo } f''(x) > 0 \text{ per } x > M \text{ per ipotesi}).$$

Si conclude (riguardo alla $f''(x)$, per il teorema della permanenza del segno) la tesi:

$$f''(x) < 0, \quad \forall x > M, \quad \text{c.v.d.}$$

(Vedi ad es. Fig. 1, caso1).

TABELLA RIASSUNTIVA nei casi $L = 0$, $L = \infty$

Fig. 1

	$x \rightarrow$	$\lim f(x)$	L	Concavità della curva
Caso 1	$+\infty$	$+\infty$	0^+	basso
Caso 2	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	alto
Caso 3	$-\infty$	$+\infty$	0^-	basso
Caso 4	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	alto
Caso 5	$-\infty$	$-\infty$	0^+	alto
Caso 6	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	basso
Caso 7	$+\infty$	$-\infty$	0^-	alto
Caso 8	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	basso

N.B. Per i segni considerare l' "andamento" delle tangenti alla curva: è il modo più intuitivo.

AVVERTENZA IMPORTANTE.

Dal punto di vista didattico è chiaramente sconsigliabile proporre agli studenti una tabella così "fredda" e asettica quale conclusione o riassunto della trattazione effettuata: sarà compito del docente fornire un approccio intuitivo e creativo al problema della concavità di una certa curva.

Analizziamo ancora il caso in cui L sia finito e non nullo (positivo o negativo).

Sappiamo che, detto $y = mx + q$ l'eventuale asintoto obliquo, si avrebbe:

$$m = L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx]$$

Vi sono ancora due possibilità:

A) q è finito (in particolare con $L > 0$. Vedi seguito)

B) q è infinito.

Consideriamo il caso (A). La curva possiede quindi l'asintoto obliquo $y = mx + q$.

In questo caso, per decidere la concavità del grafico di $y = f(x)$ conviene procedere nel modo seguente.

Supponiamo che sia $L > 0$, quindi $f(x)$ crescente sennò avrebbe un asintoto orizzontale oppure tenderebbe a $-\infty$. Si deduce $f'(x) > 0$.

Per decidere la concavità basta considerare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - q]. \quad \text{Se questo è } 0+ \text{ avremo } f''(x) > 0.$$

$$\text{Se questo è } 0- \text{ avremo } f''(x) < 0.$$

Infatti, posto $F(x) = f(x) - mx - q$, $F(x) > 0$, $\forall x > M$, nel caso che il limite di cui sopra sia $0+$, quindi $F(x)$ decresce implicando $F'(x) = f'(x) - m < 0$, da cui $f'(x) < m$.

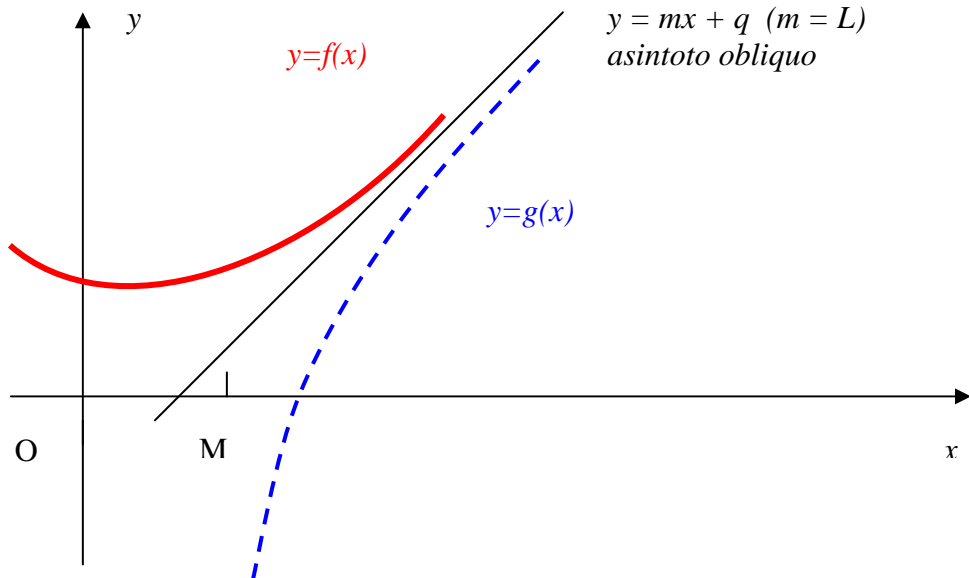
Ma $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = m$, come è noto, quindi $f'(x)$ cresce.

Si deduce quindi la tesi $f''(x) > 0$.

Analogamente per lo $0-$, c.v.d.

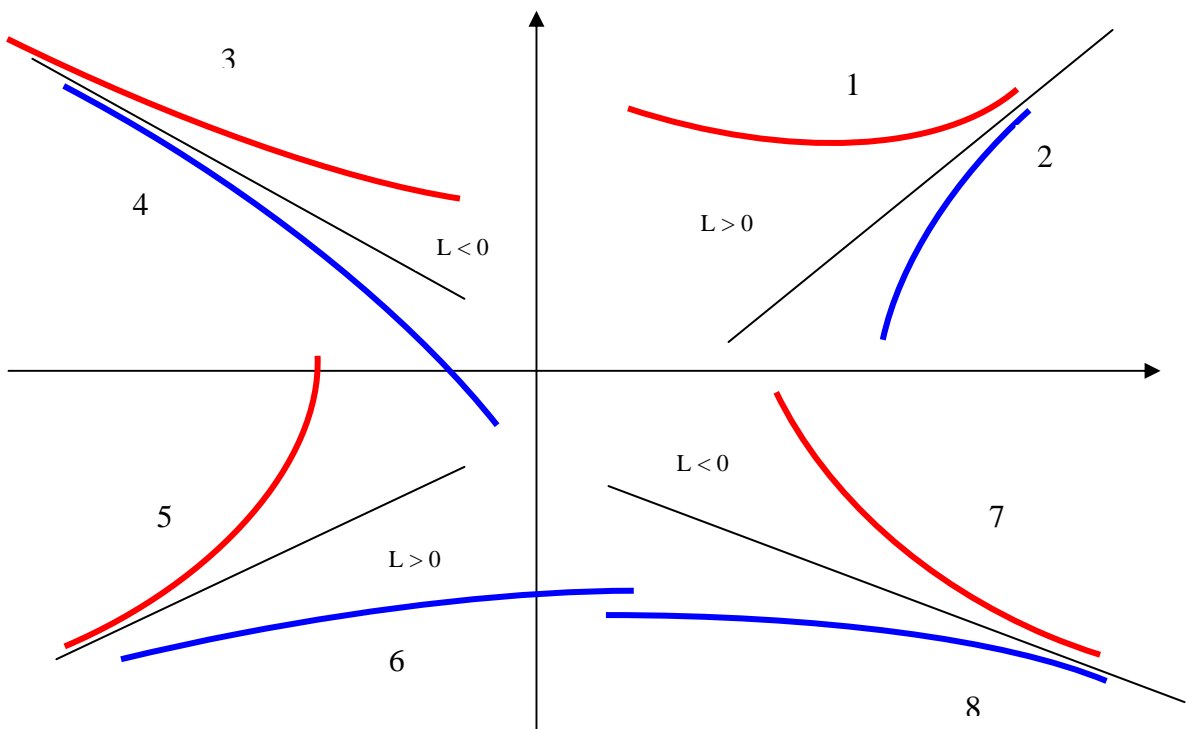
Graficamente (caso $L = m > 0$):

Fig. 3



Casi possibili (in Fig. 4):

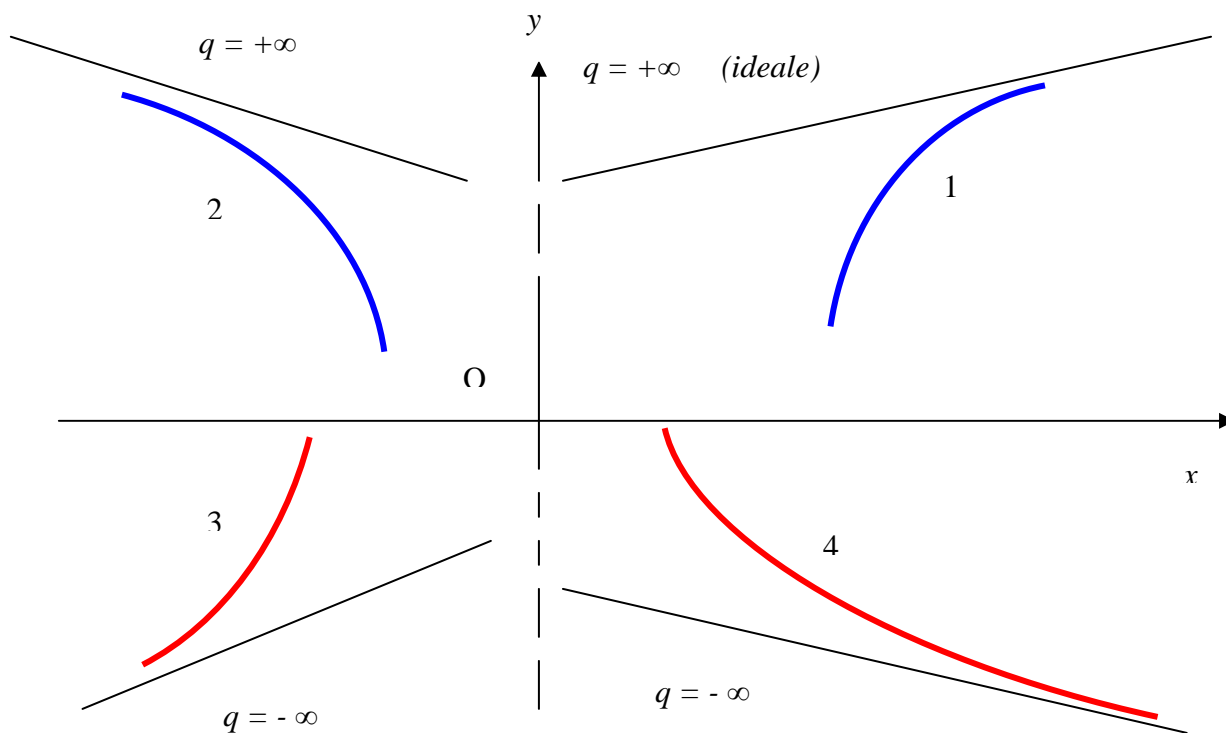
Figura 4.



Consideriamo ora il caso (B), cioè quando q è infinito (ed L è finito, ovviamente).

I casi possibili sono 4. Eccoli in figura:

Figura 5.



N.B. E' evidente che i casi possibili sono solo questi. Infatti potrà solo essere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \pm\infty \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \text{ rispettivamente;}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \pm\infty \quad \text{con} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty, \text{ rispettivamente;}$$

tenendo pure conto che la $f(x)$ non può “tendere” a $+\infty$ “da sopra” la quota $q = +\infty$ (o a $-\infty$ “da sotto” la quota $q = -\infty$).

Eseguiamo la dimostrazione relativamente al caso (1) in fig. 5 :

Ipotesi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = +\infty$ con $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Tesi : $f''(x) < 0 \quad (x > M)$.

Deduciamo subito che $f(x)$ è crescente ($\forall x > M$), quindi $f'(x) > 0$.

Posto $F(x) = f(x) - mx$, si ha $F(x)$ crescente (per il primo limite dell'ipotesi).

Quindi $F'(x) = f'(x) - m > 0$, $f'(x) > m$, $f'(x) > \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$, $f'(x)$ decrescente

ed infine dunque $f''(x) < 0$ ($\forall x > M$, naturalmente), c.v.d.

Analogamente per gli altri casi:

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $q = +\infty$ avremo $f''(x) < 0$, $\forall x < -M$

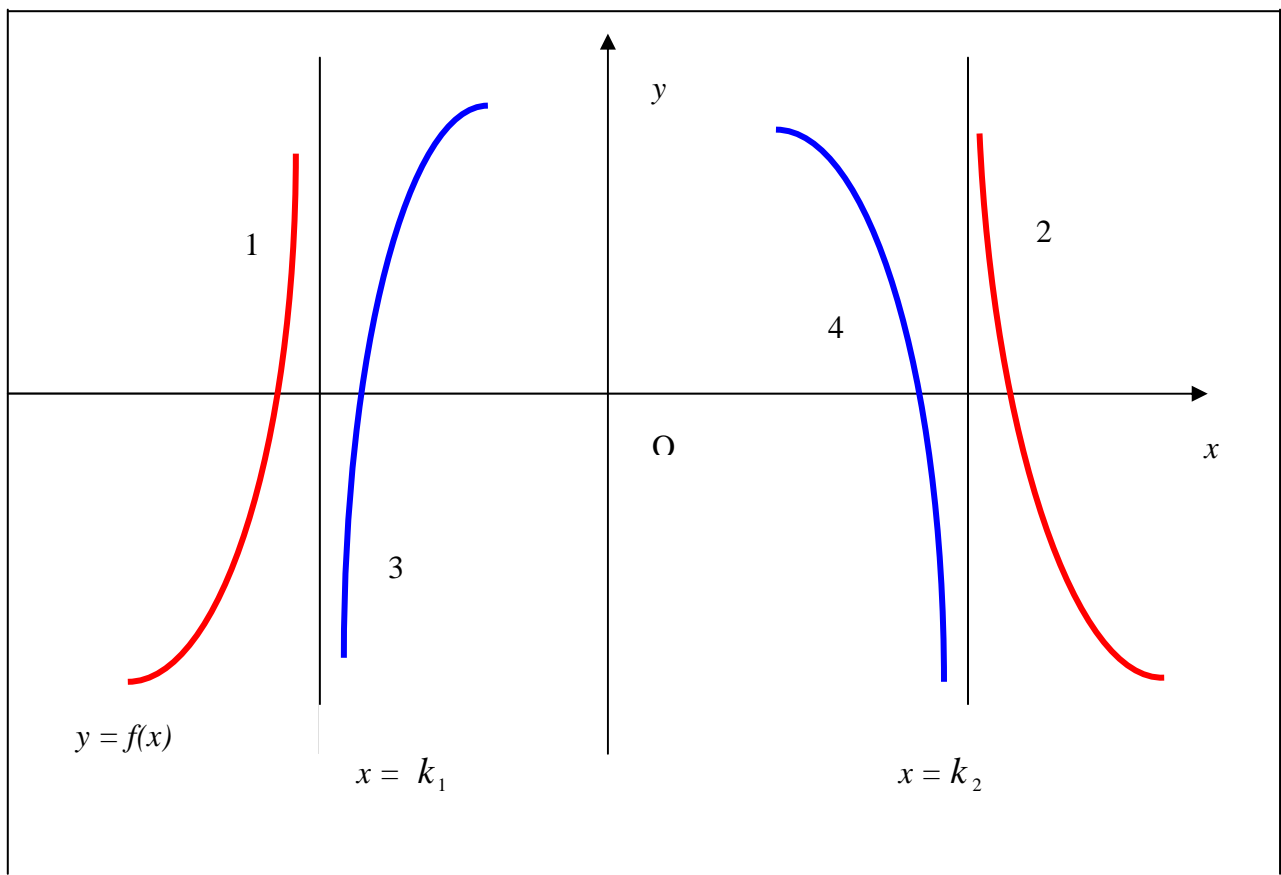
3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $q = -\infty$ “ $f''(x) > 0$, $\forall x < -M$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $q = -\infty$ “ $f''(x) > 0$, $\forall x > M$ ($M > 0$).

I ragionamenti seguiti finora si possono applicare con successo per determinare la concavità di una curva in prossimità dei suoi eventuali asintoti verticali .

Raffiguriamo dapprima i casi possibili:

Figura 6.



N.B. E' quasi superfluo osservare che i segni di k_1 e k_2 non hanno alcuna influenza nei riguardi dei casi possibili.

Prendiamo in considerazione solo il caso (1) della figura 6, poiché in modo analogo si possono trattare gli altri casi.

Formalizziamo quindi il teorema seguente:

TEOREMA.

Ipotesi: $f(x)$ possiede derivata prima e seconda;

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$$

$$\exists h > 0 / f''(x) \text{ ha segno costante in } (c-h, c);$$

Tesi: $f''(x) > 0$ per $x \in (c-h, c)$.

Osservazione preliminare.

Da $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ supponendo, però, che $f''(x)$ abbia segno costante in $(c-h, c)$ si deduce $f'(x) > 0$ in $(c-h, c)$.

Dimostrazione.

Consideriamo un valore $x_0 \in (c-h, c)$. La tangente per $x = x_0$ alla curva di equazione $y = f(x)$ sarà:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0), \quad \text{da cui ("differenza" fra } f(x) \text{ e tangente):}$$

$$f(x) - y = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{ad es. per } x_0 < x < c.$$

$$\exists x_1 \in (x_0, x) / f(x) - y = (x - x_0) f'(x_1) - f'(x_0) (x - x_0) \quad (\text{Lagrange}).$$

$$f(x) - y = (x - x_0) [f'(x_1) - f'(x_0)].$$

$$\exists x_2 \in (x_0, x_1) / f(x) - y = (x - x_0)(x_1 - x_0)f''(x_2) \quad (\text{Lagrange}).$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} [f(x) - y] = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow c^-} [(x - x_0)(x_1 - x_0)f''(x)] = +\infty.$$

Poiché si ha $x - x_0 > 0$ e $x_1 - x_0 > 0$, sarà: $f''(x_2) > 0$, da cui $f''(x) > 0$ per x appartenente ad un conveniente intorno sinistro di c , che è la tesi.

RIASSUMENDO (vedi figura 6):

- 1) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Conc. verso l'alto}$
- 2) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Conc. verso l'alto}$
- 3) $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Conc. verso il basso}$
- 4) $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty \quad \Rightarrow \quad \text{Conc. verso il basso.}$

(2)

MASSIMI E MINIMI VINCOLATI PER UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI REALI $z = f(x,y)$

INTRODUZIONE

Questo argomento viene trattato durante il quinto anno di alcune scuole medie superiori (ad es. ragionieri programmatori).

I testi di Matematica più in uso trattano questo problema utilizzando (anzi, invitando ad utilizzare!) il metodo di Lagrange oppure, meno frequentemente, la derivazione “totale”.

L'alunno viene messo in guardia dall' eseguire, quando sia possibile, sostituzioni avventurose poiché potrebbero venire a mancare le condizioni del teorema di Dini (sulle funzioni implicite).

Orbene, si può provare (almeno inizialmente anche solo con considerazioni “grafiche”: tutt'altro, comunque, che agevoli per lo studente, non sempre dotato di una chiara visione tridimensionale) che, quando sia possibile una sostituzione di variabile (conveniente lo è sempre o quasi), si possono trovare gli estremanti di una funzione $z = f(x,y)$ soggetta al vincolo $\varphi(x,y) = 0$, a patto di fare alcune considerazioni che ora verranno espone, anche nel caso non valga il teorema di Dini, anzi, manco pensando che il suddetto teorema esista.

La trattazione che qui viene presentata è basata (forse) più sull'intuizione (confortata da esempi) che sulla mera dimostrazione analitica. Credo comunque non le manchi il minimo necessario rigore.

METODO DI SOSTITUZIONE PER MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Sia $z = f(x,y)$ una funzione (reale di variabili reali) differenziabile quanto si voglia, rappresentata quindi nello spazio euclideo tridimensionale da una superficie “liscia”. Sia $\varphi(x,y) = 0$ il suo vincolo, tale che l’insieme

$$D = \{ (x,y) \in R^2 / \varphi(x,y) = 0 \}$$

possa rappresentarsi con una curva regolare alla Jordan sul piano xy . Chiamiamo D_x l’insieme formato dai primi elementi delle coppie di D , rappresentabile come la proiezione di D sull’asse x . Analogamente definiamo D_y la proiezione di D sull’asse y . Per le ipotesi fatte su φ , D_x e/o D_y saranno intervalli (anche illimitati) sugli assi x e y .

Supponiamo che il vincolo sia “a variabili separabili”, cioè esprimibile come $f_1(y) = f_2(x)$, f_1 e f_2 continue e derivabili quanto si voglia (in opportuni domini).

Ovviamente l’ideale sarebbe poter esprimere $\varphi(x,y) = 0$ tramite funzioni esplicite $y = \bar{f}(x)$ o $x = \bar{f}(y)$ (per le quali valesse il teorema di Dini in ogni punto (x_0, y_0) interno a D).

Supponiamo pure che la $f(x,y)$ sia del tipo $f[\alpha f_2(x), y]$ o $f[x, \beta f_1(y)]$ o, più in generale, $f[F(f_2(x), y), \dots, (\alpha, \beta \in R)]$.

Cioè sia possibile sostituire nella $f(x,y)$ la $f_1(y)$ o la $f_2(x)$ in modo che essa risulti funzione della sola x o della sola y .

Si può far vedere quel che segue.

Anche se non valessero le condizioni (di Dini) $\varphi'_y \neq 0$ ($\varphi'_x \neq 0$), si potrebbero comunque trovare gli estremanti di $z = f(x,y) = F(x)$ (o $z = \bar{F}(y)$) tenendo conto però anche degli estremi del dominio D_x (o D_y) determinato dalla $\varphi(x,y) = 0$.

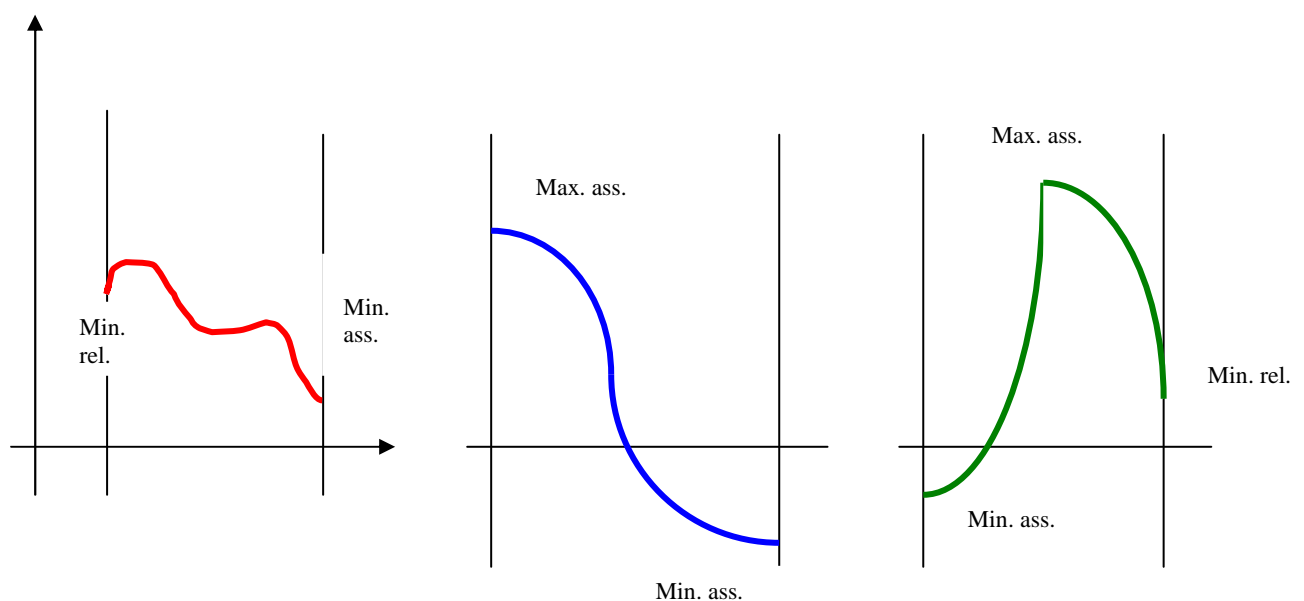
Infatti, supposto che si possa arrivare alla $z = F(x)$, essa è funzione della sola x , il suo grafico è quindi immaginabile come la proiezione sul piano xz della “curva tridimensionale” (o sghemba) individuata dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

I suoi estremanti sono quelli della funzione $z = F(x)$, tenendo pure conto degli eventuali punti angolosi e/o cuspidi che si possono venire a creare (vedi fig. B) e pure degli estremi finiti di D_x per quanto riguarda la variabile x .

Infatti una funzione reale di una variabile reale, continua in un dominio chiuso e limitato (almeno in uno dei due estremi) possiede senz'altro negli estremi (almeno in quello limitato) un massimo od un minimo relativo nell'ipotesi che essa sia pure monotona in convenienti intorni ("destro" o "sinistro") di quegli estremi.

Vedi figure:

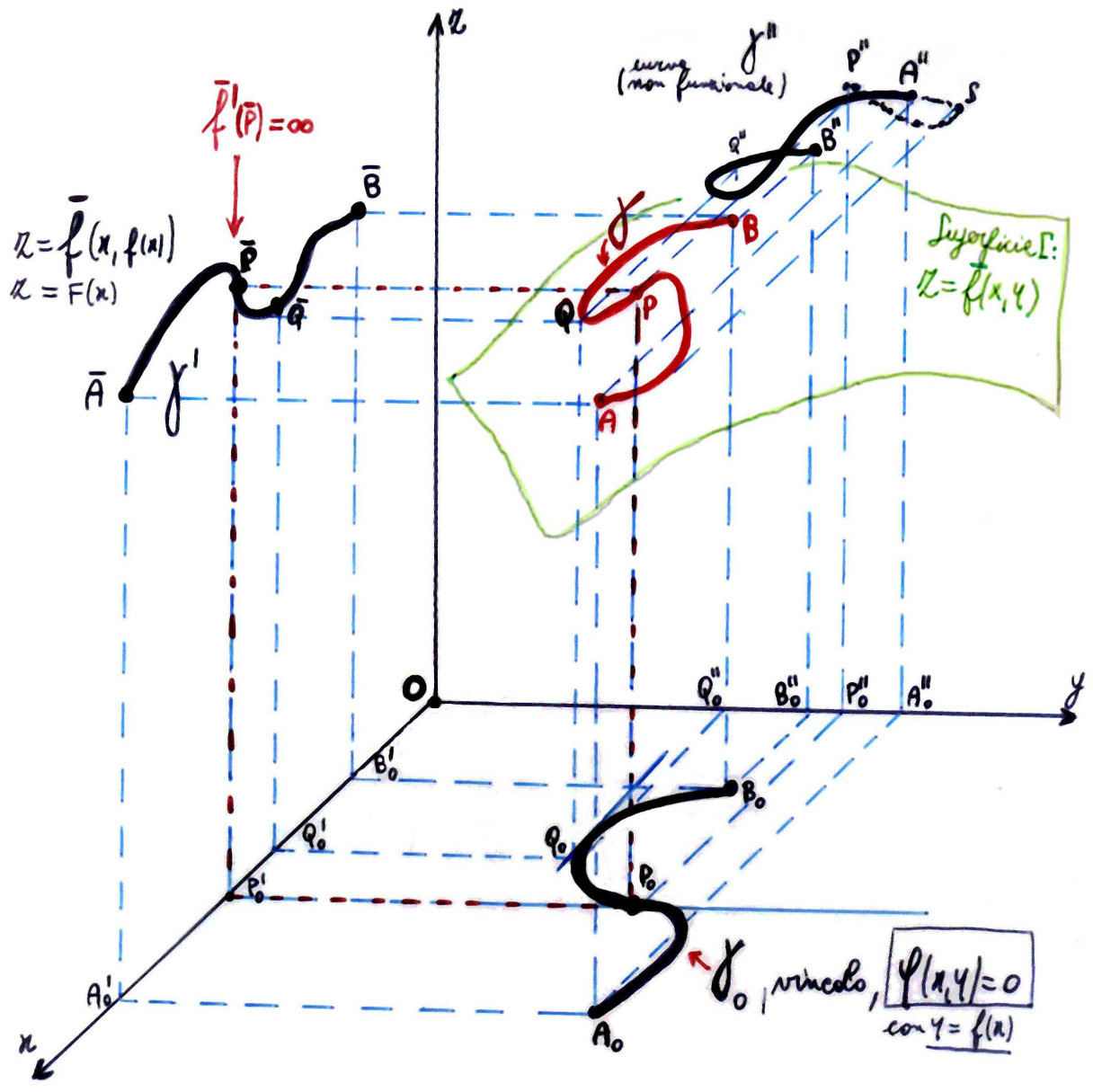


Conviene evitare una sostituzione che dia $z = F_1(x) \cup F_2(x)$ cioè esprimibile attraverso due o più funzioni di x e di stesso (o quasi) dominio D_x anche se il caso suddetto è trattato qui con successo. Vedi fig. C e relativi esempi.

OSSERVAZIONE. Una [delle non molte] difficoltà di questo metodo è quella di trovare gli estremi finiti di D_x (o di D_y).

Lo studio dei punti angolosi e delle cuspidi eventuali di $z = F(x)$ (o $z = F(y)$) è, in generale, più agevole e comunque più comune.

Figura A



Qui è :

$$\varphi'_x(Q_0) = 0$$

$$\varphi'_y(P_0) = 0$$

- Caso in cui γ' (proiezione della curva γ sul piano xz) è grafico di funzione $z = F(x)$ di dominio $D = [x_1, x_2]$, non derivabile in P' (punto di flesso "verticale"). Infatti in P_0 è $\varphi'_y = 0$.

- γ'' (proiezione di γ sul piano yz) non è grafico di funzione, ma è scindibile in più rami funzionali.
- Gli estremanti di γ' corrispondono a quelli di γ (naturalmente nella coordinata x).

N.B. Il flesso in P può essere “normale”. Vedi esempi.

ESEMPI che possono fare riferimento ad una figura come la A:

flesso “normale” (es. 1) e flesso a tangente verticale (es. 2) “provocati” dalla sostituzione (nel senso che, eseguendo una certa sostituzione, il grafico della funzione ottenuta – di una sola variabile – presenta “imprevedibilmente” un flesso).

$$1) \quad \boxed{z = x^3 + y^3} \quad \text{con} \quad \varphi(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x - y^3 = 0}$$

$$\varphi'_y = -3y^2 = 0 \quad \text{per} \quad y = 0 \quad ; \quad \varphi'_x = 1 \neq 0$$

Operando la sostituzione $x = y^3$ si trova :

$$z = y^9 + y^3 \quad \text{con flesso in} \quad (0,0), \text{ crescente, né min. né max.}$$

Sostituendo invece, come vorremmo (“ignorando” il teorema di Dini), $y = \sqrt[3]{x}$, si ha:

$$z = x^3 + x, \quad z' = 3x^2 + 1 \quad \text{che non si annulla mai,}$$

$$z'' = 6x, \quad \text{nulla per } x = 0, \text{ flesso crescente con } z' = 1, \text{ finita.}$$

(FLESSO “NORMALE”)

$$2) \quad \boxed{z = \sqrt[3]{x} + y^2} \quad \text{con} \quad \boxed{x = y^3} \quad ; \quad \varphi'_x = 1, \quad \varphi'_y = 3y^2 \text{ nulla per } y=0, x=0.$$

Sostituzione “normale” $\rightarrow x = y^3$ da cui

$$z = y + y^2; \quad z' = 1 + 2y, \quad \text{nulla per } y = -\frac{1}{2}, x = -\frac{1}{8}.$$

$$z'' = 2 \quad \text{quindi MIN. in } A \left(-\frac{1}{8}; -\frac{1}{2}\right).$$

Nessun estremante in $(0,0)$.

Sostituzione “nostra” (vedasi commento es. precedente su Dini) $y = \sqrt[3]{x}$;

$$z = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$$

P_0 è di flesso per γ_0 . $\varphi'_y(P_0) = 0$. $y = f(x)$.

- γ' è grafico di funzione, ma con cuspidi (talvolta punto angoloso) in P' , comunque riferibile ad un max. rel. corrispondente ad un max. rel. di γ “situato” però in un punto di flesso P_0 per γ_0 (vincolo).

- In figura è pure A' max. ass., B' max. rel. : agli ESTREMI (!) del dominio di γ' , cioè di D_x .

ESEMPI di cuspidi e punto angoloso “provocati” dalla sostituzione. (Fig. B).

(Anche in questo caso si intende che, eseguendo una certa sostituzione, il grafico della funzione ottenuta – di una sola variabile – presenta “imprevedibilmente” un punto di cuspidi o un punto angoloso in cui vi è il max. o il min. cercato) .

$$3) \quad \boxed{z = x^2 + y^2} \quad \text{con} \quad \boxed{x - y^3 = 0} \quad ;$$

$$\varphi'_x = 1 \quad , \quad \varphi'_y = 3y^2 = 0 \quad \text{in} \quad (0,0).$$

Ovviamente la sostituzione $x = y^3$ è la migliore e non presenta problemi (come garantisce il teorema di Dini).

Consideriamo invece $y = \sqrt[3]{x}$ funzione, ma con $y'(0) = \infty$ (ci sia consentita la notazione!), $\varphi'_y(0) = 0$.

Flesso (per γ_0) in $(0,0)$!

Con altri metodi si può trovare MIN. in $P(0,0,0)$.

Noi operiamo così:

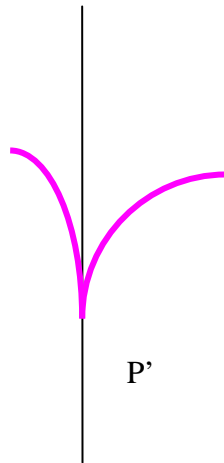
$$z = x^2 + \sqrt[3]{x^2} \quad ; \quad z' = \frac{6x\sqrt[3]{x} + 2}{3\sqrt[3]{x}} \quad , \quad \text{la quale non si annulla, ma indica una}$$

CUSPIDE verso il basso per la curva γ' , grafico di $z = F(x)$.

Si ha quindi un MIN. in $(0,0,0)$ per la $z = f(x,y)$ data !

Infatti è $z'' = 2 - \frac{1}{81x^3\sqrt{x}} < 0$ in $I(0,0)$

ed anche $\lim_{x \rightarrow 0^-} z' = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} z' = +\infty$, c.v.d.



4) $\boxed{z = x^2 + y^4}$ con $\varphi(x, y) = \begin{cases} x - y^2 = 0 & \text{per } x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y^4 = 0 & \text{per } x < 0, y < 0 \end{cases}$

La curva che rappresenta $\varphi(x, y) = 0$ (sul piano xy) ha un flesso⁽¹⁾ in $O(0,0)$ ed è ivi derivabile e perciò continua.

$$\varphi(x, y) : \begin{cases} y^2 = x & \dots \\ y^4 = -x & \dots \end{cases} ; \quad \varphi'_y = \begin{cases} -2y\dots & \\ 4y^3\dots & \end{cases} = 0 \quad \text{per } y = 0$$

(1) NOTA. S'intenda anche: la curva γ_0 , grafico della funzione

$$x = g(y) = \begin{cases} y^2 & \text{per } x \geq 0 \\ -y^4 & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad \text{ha un flesso per } y = 0, \dots$$

Sostituendo:

$$z = \begin{cases} 2x^2 & , x \geq 0 \\ x^2 - x & , x < 0 \end{cases} ; \quad z' = \begin{cases} 4x, & x \geq 0 \\ 2x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Si nota che $O(0,0)$ è un punto angoloso (per γ'): qui è un minimo, c.v.d. (vedi figura seguente).

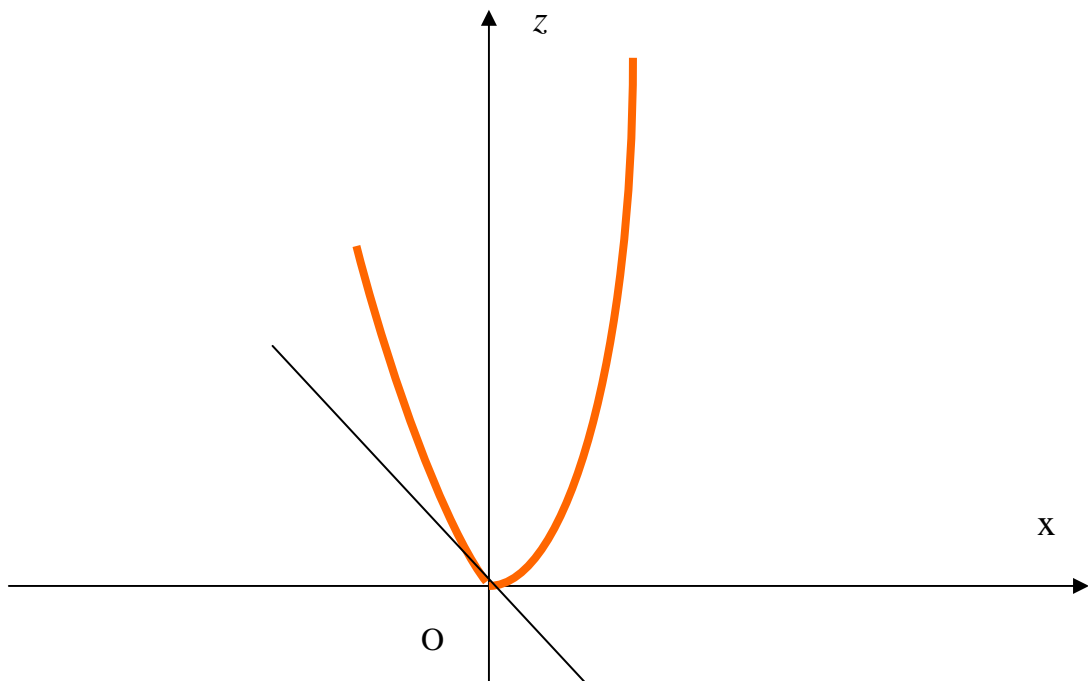
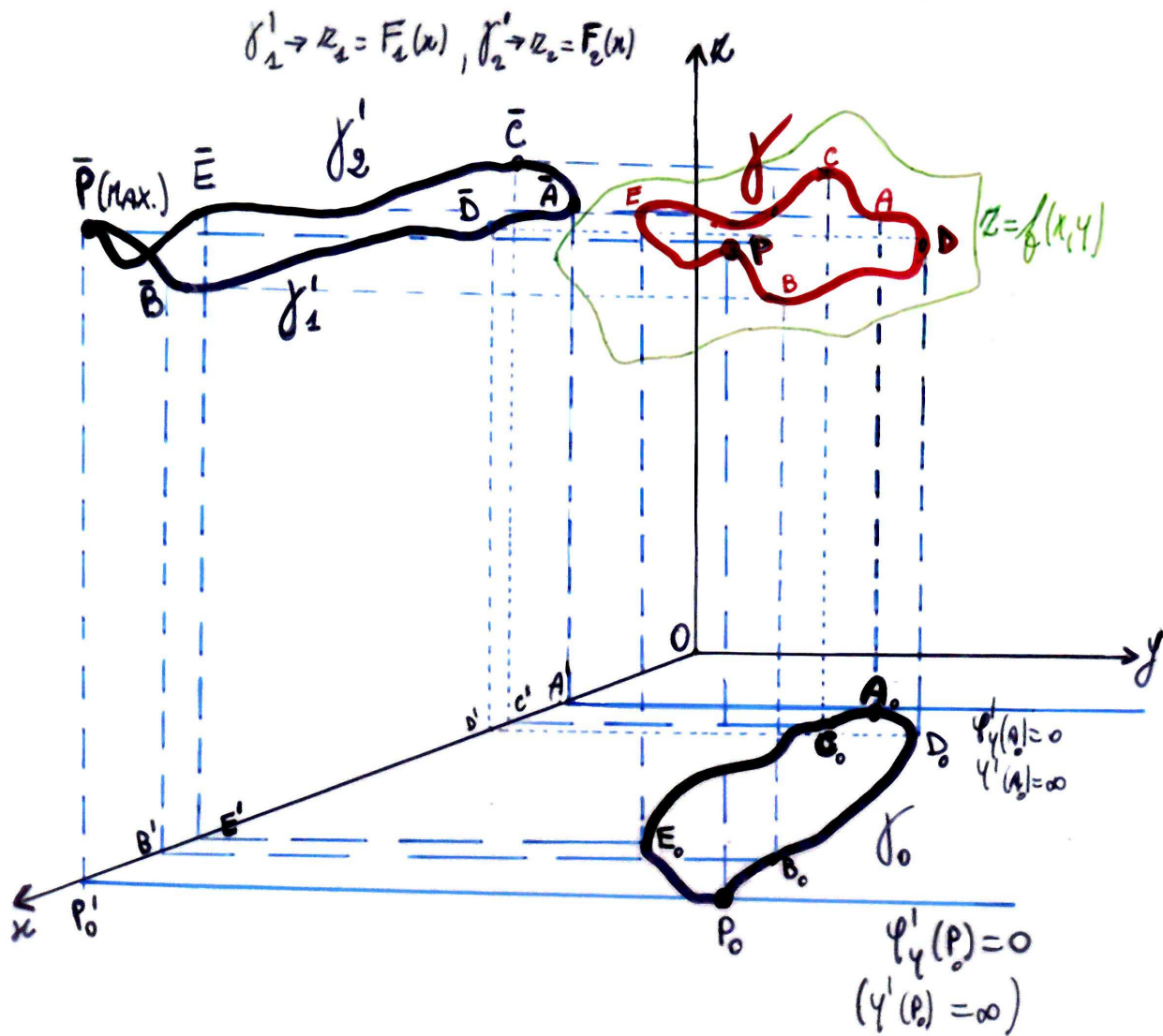


Figura C



In P: MAX. REL.

In A: "nulla".

x_1 e x_2 estremi del dominio individuato da γ'_1 e γ'_2 , rami (alla Jordan) della proiezione di γ sul piano xz .

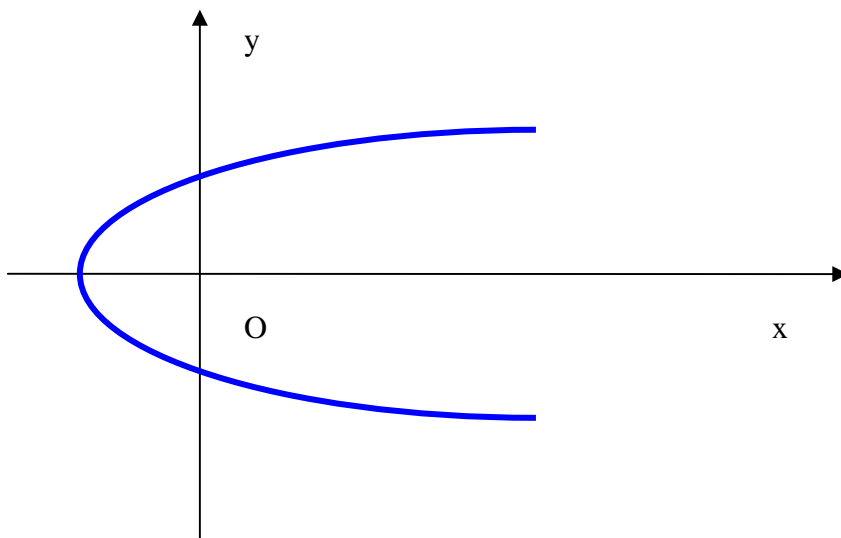
- Questo è un caso in cui la proiezione di γ sul piano xz dà due curve funzionali con un max. rel. in un estremo del loro comune dominio non individuabile con la derivazione.

P' corrisponde a P_0 in cui è $\varphi'_y = 0$.

P_0 è un estremo del dominio per le ascisse dei punti che formano γ_0 .

ESEMPI di max. e min. (rel. e assoluti) agli ESTREMI del dominio del vincolo :
 non sono evidenziati, dopo la sostituzione, tramite derivazione di
 $z = F(x) = \bar{f}(x, f(x))$ e quindi ricercabili solo agli estremi del dominio al finito (vedi
 teorema di Weierstrass).

5) $z = x^2 + y^2 - 1$, col vincolo $x = y^2 - 1$ (parabola nel piano xy)



Da tenere presente: $D : \begin{cases} -\infty < y < +\infty \\ -1 \leq x < +\infty \end{cases}$

Sostituendo $y^2 = x + 1$ si ha

$$z = x^2 + x \quad ; \quad z' = 2x + 1 = 0 \quad \text{per} \quad x = -\frac{1}{2}, \quad y^2 = \frac{1}{2}, \quad \text{da cui}$$

$$A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad z''=2 \rightarrow A \text{ e } B \text{ minimi "normali"}.$$

Ma non basta ! Bisogna considerare gli estremi di x (!)
 $-1 \leq x < +\infty$, quindi il valore -1 .

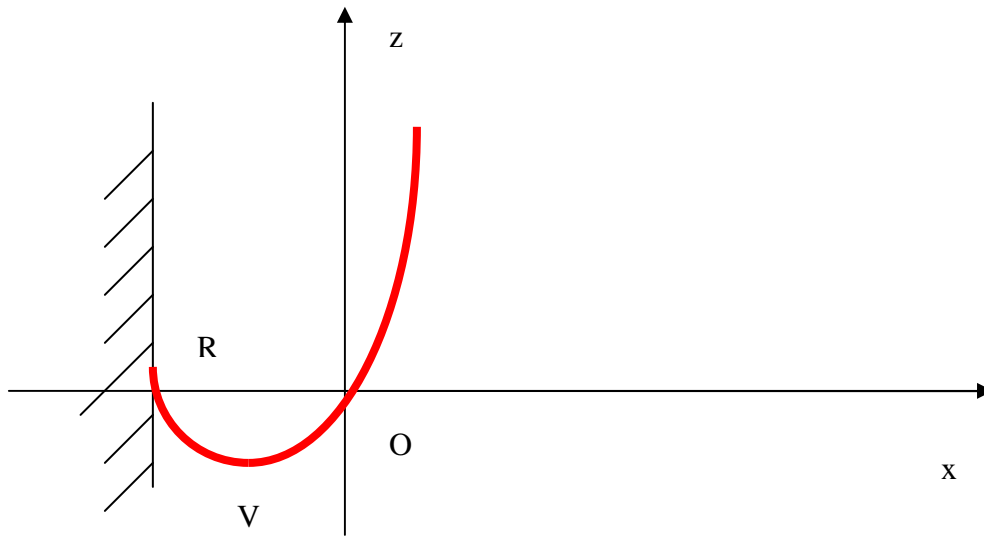
Sul piano xz si ha (vedi figg. B e C):

$$z = x^2 + x, \quad \text{il cui grafico è una parabola di vertice } V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right).$$

MAX. (!) in R $(-1, 0)$

$$\text{MIN. in } V \text{ di ascissa } -\frac{1}{2}, \text{ da cui } \begin{cases} A(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

Naturalmente R non si sarebbe trovato se si fosse studiato solo la derivata prima o le prime derivate in successione.



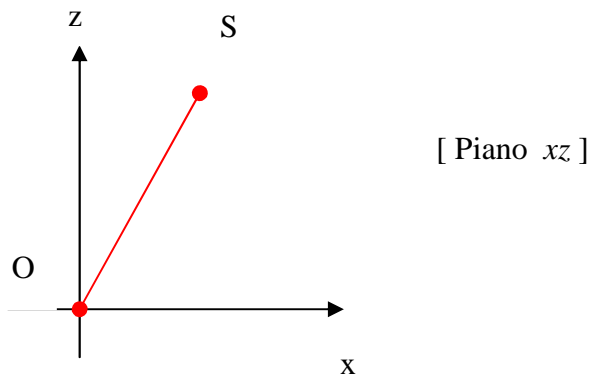
6) $z = x^2 + y^2$ col vincolo $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Usando ad es. la funzione di Lagrange si trova MAX. (assoluto) in S (2,0,4), MIN. (ass.) in O (0,0,0).

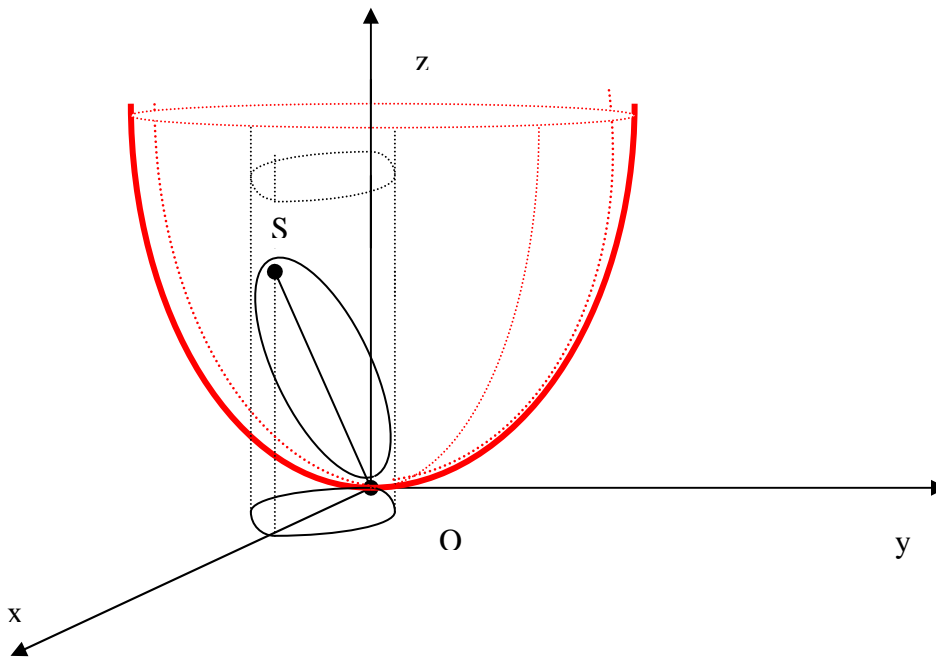
Sostituendo, come vogliamo fare, direttamente $x^2 + y^2 = 2x$, si ha:

$$z = 2x \quad \text{con } 0 \leq x \leq 2.$$

MAX. in S' e MIN. in O, c.v.d. (Vedi figura seguente).



Graficamente in tre dimensioni:



$z = x^2 + y^2$ è l'equazione di un paraboloido rotondo.

Vincolo: circonferenza sul piano xy di centro $(1,0,0)$ e di raggio 1. Quindi cilindro per il riferimento cartesiano tridimensionale xyz .

Il segmento OS è la proiezione sul piano xz ($z = F(x)$) dell'intersezione fra il cilindro $\varphi(x,y) = 0$ e la superficie $z = f(x,y)$.

Si nota bene che O è punto di min. e S è punto di max.

ALTRI ESEMPI (E CASI) RIFERIBILI ALLA FIG. C.

7) Sia $\boxed{z = x + y - 1}$ col vincolo $\boxed{x - y^2 = 0}$.

Vi sono due possibilità di sostituzione:

$$(1) \quad x = y^2 \qquad (2) \quad y = \pm \sqrt{x}$$

Ovviamente la (1) è la più conveniente (Dini...) essendo $\varphi'_x = 1 \neq 0, \forall x$.

Si ottiene, in questo caso, facilmente:

$$z = y^2 + y - 1 \quad ; \quad z' = 2y + 1 = 0 \quad \text{per} \quad y = -\frac{1}{2} \quad , \quad x = \frac{1}{4}$$
$$z'' = 2 > 0 \quad \text{quindi MINIMO in } P\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

Vediamo invece la sostituzione (2) con $\varphi'_y = -2y = 0$ per $y = 0$.

Otteniamo una “doppia funzione”

$$z = z_1 \cup z_2 \quad \text{con} \quad z_1 = x + \sqrt{x} - 1 \quad \text{di dominio} \quad x \geq 0.$$
$$z_2 = x - \sqrt{x} - 1$$

$$z'_1 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{la quale non si annulla mai} \quad (x \neq 0).$$

$$z'_1 > 0 \rightarrow z_1 \text{ crescente} \rightarrow \text{né max. né min. all'interno del dominio.}$$

$$z'_2 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{che si annulla per} \quad x = \frac{1}{4} \rightarrow P\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right).$$

$$z'' = \frac{1}{4\sqrt{x^3}} > 0 \quad \forall x/x > 0, \quad \text{quindi } P \text{ è di MIN. come il caso (1).}$$

Bisogna, secondo il nostro metodo, considerare pure gli estremi finiti del dominio (comune) della z_1 e della z_2 .

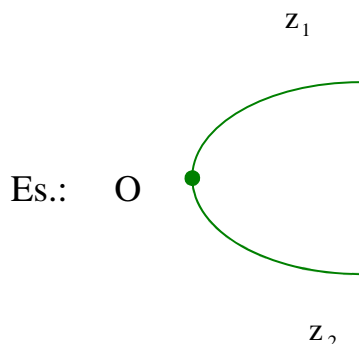
Cioè $x = 0, y = 0$ ($\varphi'_y(0) = 0$).

Troviamo: $\lim_{x \rightarrow 0^+} z'_1(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} z'_2(x) = -\infty$, quindi né max. né min. come c'era da aspettarsi.

Infatti nell'intorno destro di zero si ha:

$$z_1 = \varepsilon - \sqrt{\varepsilon} - 1 < -1 = z_1(0) = z_2(0)$$
$$z_2 = \varepsilon + \sqrt{\varepsilon} - 1 > -1 \qquad (\varepsilon \text{ infinitesimo positivo})$$

Il punto O è la “saldatura” dei rami di z_1 e z_2 e, in questo caso, non è estremante. Vedi fig. C, punto A’.



8) $z = x^2 + y^2 - xy$ con $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y.$$

Consideriamo la sostituzione:

$$y^2 = -x^2 + 1, \quad y = \pm\sqrt{1-x^2} \quad \text{con} \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Avremo:

$$z_1(x) = 1 - x\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad z'_1 = \frac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \quad \text{per} \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$z_2(x) = 1 + x\sqrt{1-x^2} \quad ; \quad z'_2 = \frac{-2x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} \geq 0 \quad \text{per} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Si trovano quindi subito 4 punti:

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad D\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \text{con}$$

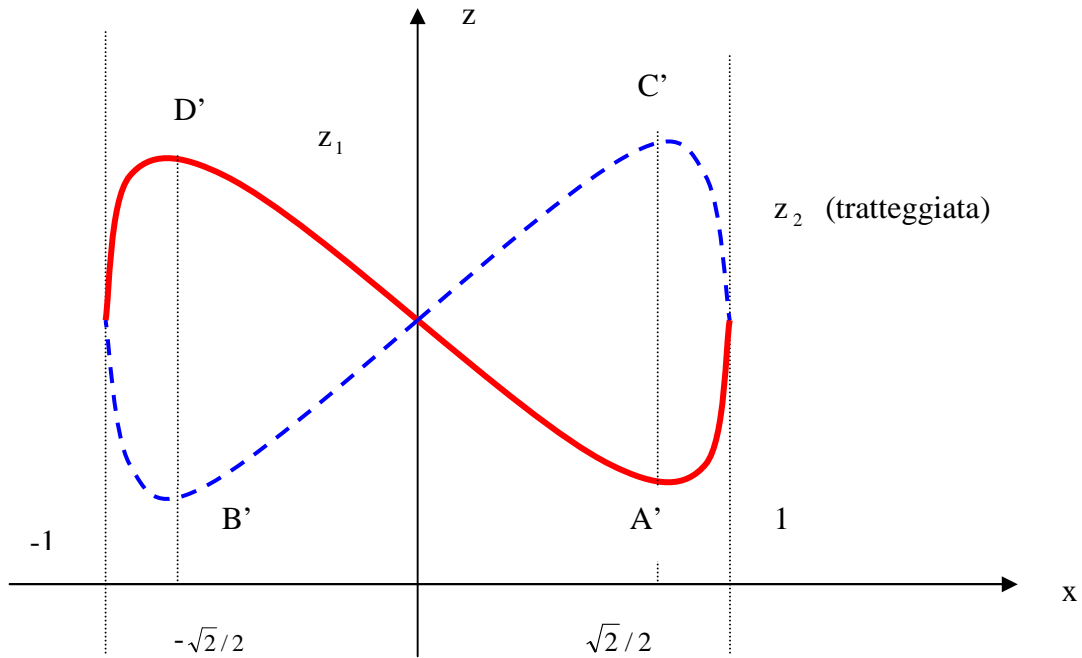
$$z(A) = z(B) = \frac{1}{2}, \quad \text{MIN. ASS.} \quad ; \quad z(C) = z(D) = \frac{3}{2}, \quad \text{MAX. ASS. ("normali")}$$

Infatti:

$$z''_1 = \frac{x(3-2x^2)}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad z''_2 = -z''_1.$$

Tenendo conto pure dei valori di y si hanno le conclusioni di cui sopra.

Per chiarezza, si può immaginare la proiezione sul piano xz della curva γ in questo modo (vedi pure fig. C):



E' pure $\lim_{x \rightarrow -1^+} z'_1(x) = +\infty \equiv \lim_{x \rightarrow +1^-} z'_1(x) = +\infty$, "mezzo flesso" verticale.

$\lim_{x \rightarrow -1^+} z'_2(x) = -\infty \equiv \lim_{x \rightarrow +1^-} z'_2(x) = -\infty$, idem.