

Estratto dal Decreto Coppino (10.10.1867), *Supplemento alla Gazzetta Ufficiale del Regno d'Italia, Firenze 24 ottobre 1867.*

#### ISTRUZIONI E PROGRAMMI PER L'INSEGNAMENTO DELLA MATEMATICA NEI GINNASI E NEI LICEI.

La matematica nelle scuole secondarie classiche non è da risguardarsi solo come un complesso di proposizioni o di teorie, utili in sé, delle quali i giovanetti debbano acquistare conoscenza per applicarle poi ai bisogni della vita; ma principalmente come un mezzo di coltura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio, e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza.

Prefisso per tal modo il fine alla matematica nella istruzione secondaria, esso ne conduce a stabilire i limiti della materia ed il metodo dell'insegnamento. I limiti devono essere abbastanza ristretti, affinché non possa in alcun modo accadere che gli allievi, supposti d'ingegno sufficiente e convenientemente preparati dall'istruzione linguistica, si trovino oppressi da un eccesso di estensione e di difficoltà; anzi giova che la materia sia tanto lontana dal riempir tutto l'orario assegnato ad essa, che il professore abbia comodità, di fare molti esercizi e d'interrogare spessissimo i suoi scolari. Quali parti della scienza convenga allogare entro i limiti così adombrati, è ancora chiaramente designato da ciò che si è detto sopra. Nell'aritmetica e nell'algebra si sono potute omettere tutte quelle teorie speciali, la cui importanza risiede principalmente nelle applicazioni a cui menano o negli sviluppi successivi delle matematiche superiori; ma bisognò invece dare conveniente posto a quei principii, a quelle teorie generali che mostrano, grado per grado, come dal concetto volgare di numero intero si arrivi a quello del numero qualsivoglia, epperò dall'aritmetica comune si entri nell'algebra, dove le operazioni hanno il carattere di tanta universalità. Imperocché senza quei principii e quelle teorie generali, esposte colla più scrupolosa esattezza e con discreta misura, sarebbe affatto impossibile al giovane di formarsi una esatta idea dell'algebra.

Nella geometria, per dare all'insegnamento la massima efficacia educativa, e per ridurre a un tempo la materia entro modesti confini, basta applicare alle nostre l'esempio delle scuole inglesi, facendo ritorno agli *elementi di Euclide*, che per consenso universale sono il più perfetto modello di rigore geometrico.

Il metodo d'insegnamento non può essere che uno, cioè che tutte le singole parti sieno strettamente collegate fra loro e svolte con ordine razionale e con processo rigorosamente scientifico. Di questo metodo è appunto Euclide insuperabile maestro. Ma anche nell'aritmetica e nell'algebra è d'uopo attenersi al più assoluto rigore, procedere con somma cautela, ed evitare ogni sorta di sottintesi, specialmente là dove si estendono le operazioni del calcolo alle varie specie di numeri. Il professore si persuaderà facilmente che gli argomenti da svolgersi secondo le indicazioni che qui si uniscono, formano un sistema, nel quale la natura, i limiti, l'ordine dell'insegnamento sono chiaramente designati. Al professore spetta mostrare il legame di tutte queste parti, la dipendenza loro, e con unità di metodo, con rigore scientifico, comporne un tutto, che sia avviamento alle scienze esatte e compimento della coltura filosofica degli alunni per ciò che riguarda la logica matematica. Non si vuole che ciascuna parte del programma sia svolta con grande estensione, e condotta a minuti particolari; possono invece bastare le proposizioni fondamentali e più generali; ma è necessario che si vada innanzi senza salti, che tutto sia coscienziosamente dimostrato colla più severa esattezza, e che nessuno dei punti toccati rimanga oscuro o dubbioso.

Il professore dovrà sino dal principio dell'anno scolastico stabilire per sé un programma minuto e particolareggiato, nel quale sia determinato con precisione il metodo di coordinazione dei vari argomenti fra di loro, e la via per svolgere ciascuno di essi; si faccia un obbligo rigoroso di essere sempre ordinato, chiaro ed esatto nel suo discorso; si astenga affatto da quelle lezioni accademiche, le quali servono solamente a far pompa di erudizione, e non lasciano alcuna traccia nelle menti dei giovanetti. Al contrario l'opera della scuola sia un continuo scambio di domande e risposte fra maestro e scolaro, per modo che il primo verifichi ad ogni momento se è seguito ed inteso; ed il secondo sia indotto a riflettere sulle cose che ascolta e le faccia sue proprie; e non se ne appaghi finché gli resti alcunché d'incerto. Non si trascurino i frequenti esercizi numerici, sia nella scuola a viva voce, sia per mezzo di lavori, che, proposti dal professore, gli scolari eseguiranno a casa, e poi il professore

correggerà. Mediante tali esercizi gli scolari si abitueranno ad applicare le regole imparate ed a superare da sé difficoltà prima inavvertite.

Ecco ora il programma delle materie assegnate alle singole classi.

### **Classe V ginnasiale**

#### **Geometria**

Libro I d'Euclide.

#### **Aritmetica ragionata**

Sistemi di numerazione

Le prime quattro operazioni sui numeri interi.

Esponenti – calcolo delle potenze.

Divisibilità dei numeri.

Calcolo dei numeri frazionari

### **Classe I liceale**

#### **Geometria**

Libri II e III di Euclide.

#### **Aritmetica ragionata e algebra**

Quadrato di un numero composto di parti

Radice quadrata dei numeri.

Numeri incommensurabili.

Somma e sottrazione algebrica - numeri negativi.

Moltiplicazione e divisione algebrica – esponenti negativi.

Potenze e radici dei monomi - calcolo dei radicali – esponenti frazionari.

### **Classe II liceale**

#### **Geometria**

Libri IV, V, VI, XI, XII di Euclide.

Misura del cerchio, del cilindro, del cono, della sfera (Archimede):

Formole per le aree ed i volumi.

#### **Algebra**

Proporzioni.

Generalità sulle equazioni.

Equazioni di primo grado ad una incognita. Equazioni di secondo grado a due incognite, ed equazioni del quarto grado riducibile al secondo.

Generalità sui sistemi di più equazioni simultanee.

Risoluzioni di più equazioni lineari fra altrettante incognite.

Progressioni per differenza e per quoziente - logaritmi - potenze con esponenti incommensurabili.

#### **Trigonometria**

Linee goniometriche (funzioni circolari) - loro variazioni - riduzione degli archi al primo quadrante - espressione degli archi che corrispondono ad una linea trigonometrica data - relazioni fra le linee goniometriche di uno stesso arco.

Formole per l'addizione, la sottrazione, la duplicazione e la bisezione degli archi.

Relazioni fra gli elementi di un triangolo.

#### **Geometria**

L'insegnamento della geometria comprende i primi sei libri, l'undecimo ed il dodicesimo degli elementi d'Euclide, ai quali si faranno succedere le più essenziali proposizioni di Archimede sulla misura del cerchio, del cilindro, del cono e della sfera. Insegnata col metodo degli antichi, la geometria è più facile e più attraente che non la scienza astratta dei numeri: ond'è che in luogo di posporla all'algebra, se ne è assegnata una parte (I libro d'Euclide) alla quinta classe del ginnasio, ed una anche alla prima del

liceo (II e III libro d'Euclide). Si raccomanda al docente che si attenga al metodo euclideo, perché questo è il più proprio a creare nelle menti giovanili la abitudine al rigore inflessibile nel raziocinio. Soprattutto non intorbidì la purezza della geometria antica, trasformando teoremi geometrici in formole algebriche, cioè sostituendo alle grandezze concrete (linee, angoli, superficie, volumi) le loro misure: ma avvezzi i suoi scolari a ragionare sempre sulle prime, anche là dove se ne considerano i rapporti. Solamente dopo avere terminate le proposizioni d'Euclide e d'Archimede, richieste dal programma, si dedurranno da esse le formole che nella pratica servono per calcolare le aree delle figure rettilinee, l'area del cerchio, la lunghezza della circonferenza, la misura della superficie, ed i volumi del prisma, della piramide, del cilindro, del cono e della sfera.

### **Aritmetica ragionata e Algebra**

Nella quinta classe del ginnasio ha principio l'insegnamento dell'aritmetica come scienza esatta, cioè come primo grado di una rigorosa istituzione matematica. Gli scolari dovrebbero conoscere bene le regole pratiche del conteggio, apprese nelle scuole elementari, ma prevedendosi il caso non improbabile che se ne sia affievolita la memoria, il professore avrà cura di richiamarle per mezzo di sufficienti esercizi. Ed è a tal fine che si sono assegnate a questa classe cinque ore di matematica in luogo di quattro, che sarebbero bastate per compimento del programma.

Astrazione fatta da tali esercizi, il professore incomincerà da esporre chiaramente l'ordine di un sistema di numerazione, e poi passerà alle quattro operazioni fondamentali, dichiarandone la teoria con processo razionale. Nella moltiplicazione non tarderà ad introdurre la notazione degli esponenti, e dimostrerà il teorema che serve per moltiplicare fra loro due potenze di uno stesso numero; il teorema analogo che serve per la divisione, ecc. Esposte le nozioni fondamentali sui numeri primi, esplicherà con evidenza i teoremi più importanti sulla divisibilità dei numeri, insegnerà la scomposizione di un numero ne' suoi fattori primi, la ricerca di tutti i divisori di un numero, la ricerca del massimo multiplo comune a più numeri, quella del massimo comun divisore, sia per mezzo della scomposizione in fattori primi, sia col metodo delle successive divisioni. Mostrerà come la divisione dei numeri interi dia origine ad una seconda specie di numeri: i numeri frazionari. Estenderà ad essi il concetto di moltiplicazione, e le regole per il calcolo delle potenze. Avrà cura che si apprendano bene le regole più spedite per le trasformazioni delle frazioni e per il calcolo decimale.

Passando ora alla prima classe del liceo, si tratterà della formazione del quadrato di un numero composto di parti, e della estrazione (con una data approssimazione) della radice quadrata d'un numero (intero, o frazionario). Di qui si ricaverà il concetto di *numero incommensurabile*; e, data la definizione, si estenderanno a questi nuovi numeri le operazioni aritmetiche e le regole per il calcolo degli esponenti. Questo importante argomento somministrerà al maestro la prima occasione di stradare i suoi scolari nel fecondo metodo dei limiti. Allora comincerà l'uso *sistematico* delle lettere per esprimere *numeri generali* (commensurabili od incommensurabili), e si darà mano all'esposizione del *calcolo letterale*. La sottrazione genera i *numeri negativi*, ai quali si deve pure applicare il concetto delle quattro operazioni, di guisa che in progresso le lettere dell'alfabeto simboleggino indifferentemente numeri positivi o negativi. La divisione dei monomi conduce naturalmente ad ampliare la notazione esponenziale mercé la introduzione degli esponenti negativi, pei quali si dimostrerà che valgono le medesime regole già stabilite per gli esponenti positivi.

La divisione dei polinomi vuol esser trattata con qualche larghezza ed applicata a parecchi casi che in progresso si offriranno di frequente nell'algebra. In particolare si assegni il criterio di divisibilità di un polinomio intero rispetto alla lettera  $x$  per un binomio della forma  $x-a$ , criterio il quale oltre all'includere certi teoremi speciali (come la condizione di divisibilità di  $y^m - z^m$  per  $y^n - z^n$ ) sarà poi utile anche nella teoria della equazione di secondo grado.

Come esercizio di moltiplicazione, gioverà trovare gli sviluppi del quadrato e del cubo di un polinomio.

Definita la radice *massima* (ove  $m$  è intero positivo) di un numero qualunque delle specie fin qui indicate, terrà dietro il calcolo dei radicali monomi; e introdotta la notazione degli esponenti frazionari, si estenderanno a questi le regole degli esponenti interi.

Nella seconda classe del liceo l'insegnamento dell'algebra prende le mosse dalle proporzioni, le quali, per la parte che riguarda i numeri astratti, giova che vengano dopo il V libro di Euclide, dove si tratta dei rapporti fra grandezze concrete. Quest'argomento è di una importanza capitale; ed il professore non

dovrà omettere alcuna diligenza ad ottenere che i suoi scolari acquistino idee precise sul rapporto di due grandezze concrete della stessa specie, commensurabili od incommensurabili, sulla proporzionalità diretta o inversa, semplice o composta, e sulle trasformazioni che può avere una proporzione fra grandezze concrete, senza che a queste si sostituiscano i numeri esprimenti le loro rispettive misure.

In progresso si esporrà con molti esercizi numerici la teoria delle equazioni ad un'incognita di primo e di secondo grado, e quella delle equazioni lineari simultanee fra altrettante incognite. Su questo argomento non è necessario dare qui altre indicazioni, perché le indicazioni premesse parlano abbastanza chiaro. Da ultimo si tratti delle progressioni per differenza e per quoziente, mirando specialmente alla somma dei termini ed alle formole per l'interpolazione. Dalle progressioni si passa naturalmente ai logaritmi, i quali si conetteranno eziandio collo studio della equazione esponenziale  $b^y = x$ . Qui si definiranno le potenze con esponenti incommensurabili, e a questi si estenderanno le regole già note per gli esponenti razionali. La variabilità continua e simultanea di  $x$  ed  $y$  (essendo  $b$  costante), fornirà occasione di esporre il concetto di funzione ( $y$  funzione di  $x$ ).

### **Trigonometria**

Stabilito il quale concetto, si potrà assai opportunamente passare allo studio delle funzioni circolari  $senx$ ,  $tangx$  (e delle loro correlative  $cosx$ ,  $cotx$ ), intorno alle quali basterà che il professore determini i principii fondamentali e faccia conoscere le formole più importanti.

Rispetto alle relazioni fra gli elementi di un triangolo insegni come si passa facilmente da certe formole a certe altre, secondo i diversi casi offerti dal problema della risoluzione dei triangoli obliquangoli.

### **ISTRUZIONI PER L'INSEGNAMENTO DI MATEMATICHE NELLE SCUOLE TECNICHE**

Il fine dell'insegnamento delle matematiche nelle scuole tecniche è quello di fornire ai giovanetti in tempo assai ristretto la maggior somma possibile di cognizioni utili per le applicazioni nelle arti e nei mestieri.

Nell'aritmetica è d'uopo che gli scolari acquistino facilità e sicurezza in ogni sorta, di conteggio nella interpretazione delle forme algebriche, cioè nella intelligenza delle operazioni che vi sono indicate e nella conseguente traduzione della formola in numeri. In particolar modo l'insegnante insisterà nel far ben comprendere i concetti di rapporti e di proporzionalità diretta ed inversa, acciocché gli scolari posseggano un criterio certo per giudicare i casi in cui è applicabile la regola del tre.

Quanto alle regole pratiche del conteggio non occorre che siano rigorosamente dimostrate. Se il maestro crede che le ragioni teoriche possano essere intese da tutti o dalla maggior parte, le esponga: in caso contrario se ne astenga, e si restringa a dichiarare la regola, accompagnandola con numerosi e svariati esercizi.

Nel terzo anno si eserciteranno gli scolari a risolvere problemi numerici relativi a questioni di geometria, mirando principalmente ad applicare il calcolo decimale, la regola del tre ed il sistema metrico.

Nella geometria, mediante il metodo grafico-intuitivo, il docente potrà dare semplici dimostrazioni del maggior numero delle proposizioni richieste dalle indicazioni. Questo insegnamento dovrà essere accompagnato da un continuo esercizio di disegno lineare geometrico: cioè il maestro farà sì che gli scolari disegnino sulla carta con precisione le figure che egli delinea sulla tavola, e li abituerà a seguire sul disegno i ragionamenti che egli stima opportuno di fare. I quali ragionamenti del resto si ridurranno a ricavare dalla figura disegnata la prova intuitiva delle proprietà che le competono. Per tal modo la costruzione insegnata per la soluzione di un problema (come sarebbe quello di condurre la perpendicolare ad una retta da un punto dato fuori di essa) può condurre intuitivamente allo scoprimento di altre verità (luogo dei punti equidistanti da due date, proprietà del triangolo isoscele, ecc.). Non importa che la via battuta per dimostrare una proposizione sia rigorosamente scientifica: importa bensì che gli scolari acquistino la cognizione di quella proposizione e la persuasione della sua verità.

La proporzionalità degli angoli agli archi; i rapporti fra le superficie di due rettangoli; la proporzionalità dei segmenti fatti su due lati di un triangolo da una retta parallela al terzo; la somiglianza dei triangoli e dei poligoni; i rapporti fra le loro aree, sono tutte proposizioni che si riducono col disegno ad evidenza quasi materiale, purché il docente si restringa, come conviene, alla considerazione di

rapporti commensurabili. Del teorema di Pitagora e di altre proposizioni analoghe si conoscono dimostrazioni intuitive: il docente le preferirà a quelle che si usano nell'insegnamento razionale della geometria.

Vi sono poi nel programma alcune parti (per esempio, le misure relative al circolo, ai poliedri, ai corpi rotondi), dove né è possibile seguire il metodo intuitivo, né l'età e la coltura degli alunni consentono un procedimento rigoroso. Ivi basterà che questi apprendano l'enunciamento delle regole pratiche e le sappiano applicare speditamente.

Per ultimo si raccomanda al docente di aver sempre speciale riguardo all'utilità pratica delle cognizioni che vuole impartire: non lasci mai suoi scolari inoperosi, ma sempre li tenga occupati o nelle operazioni grafiche o nei calcoli numerici e non trascuri di far loro conoscere metodi speciali di abbreviazione, gli strumenti ed i ripieghi dei quali si fa effettivo uso sul terreno, o nelle operazioni delle arti e dei mestieri.

## **PROGRAMMI DI MATEMATICHE PER LE VARIE CLASSI DELLE SCUOLE TECNICHE**

### **Anno I**

#### **Aritmetica**

Le quattro prime operazioni sui numeri interi e decimali.

Significato d'una frazione ordinaria - Frazione pura, apparente, impura o mista - Riduzione d'un numero composto in numero frazionario e riduzione reciproca - Trasformazione di una frazione in altre equivalenti - Riduzione di più frazioni allo stesso denominatore.

Le prime quattro operazioni sui numeri frazionari e sui numeri composti, riducendoli prima a numeri frazionari.

Sistema metrico vigente nel luogo prima dell'attuale - Sistema metrico decimale - Conversione delle unità di una specie nelle altre unità della medesima specie - Uso delle tavole di riduzione delle misure antiche nelle attuali applicazioni.

Rapporto - Proporzionalità diretta ed inversa - Regola del tre semplice e composta col metodo di riduzione all'unità - Applicazione alle regole di cambio e di società.

### **Anno II**

#### **Geometria**

Prime nozioni e definizioni relative alle figure geometriche - Linea retta - Superficie piane - Verificazione dei regoli e delle superficie piane.

Rette perpendicolari ed oblique - Angoli adiacenti - Angoli opposti al vertice.

Rette parallele - Angoli con i lati paralleli - Angoli con i lati perpendicolari.

Definizioni relative al circolo - Eguaglianza degli angoli corrispondenti ad archi eguali in due circoli del medesimo raggio - Misura degli angoli - Divisione sessagesimale della circonferenza - Riportatori grafici - Costruzione di angoli uguali ad angoli dati.

Costruzione di triangoli con elementi dati - Condizioni per l'eguaglianza di due triangoli - proprietà del triangolo isoscele - Costruzione di perpendicolari e parallele - Bisezione di rette e di angoli - Punti equidistanti da due punti dati o da due rette date - Strumenti per tracciare linee perpendicolari e parallele sulla carta, sul terreno, ecc.; loro verificazione.

Somma degli angoli d'un triangolo - Angolo esterno - Somma degli angoli interni ed esterni di un poligono convesso.

Costruzione di parallelogrammi, rettangoli, rombi, quadrati - Loro proprietà elementari.

Equivalenza delle figure - Trasformazione di parallelogrammi, triangoli, trapezi, in un rettangolo - Rapporto fra due rettangoli - Area del rettangolo e delle figure piane rettilinee - Area delle figure piane mistilinee e curvilinee per approssimazione.

Regoli divisi - Misura delle rette e delle aree sul terreno e nelle applicazioni alle arti - Regole pratiche per calcolare l'area del cerchio e la lunghezza della circonferenza - Area d'un settore circolare - Lunghezza - d'un'area corrispondente ad un angolo dato.

Teorema di Pitagora - Sue applicazioni.

Proprietà delle corde di un circolo - Costruzione della tangente in un punto dato sulla circonferenza - Centro del circolo a cui appartiene un arco dato - Costruzione del circolo che passa per tre punti dati o tocca tre rette date - Eguaglianza degli archi compresi fra rette parallele.

Misura dell'angolo compreso da due rette che si tagliano sulla circonferenza, dentro e fuori del circolo.

Costruzione del triangolo rettangolo con elementi dati - Costruzione delle tangenti che passano per un punto dato fuori del circolo.

Segmenti fatti sui lati d'un triangolo da una retta parallela al terzo lato - Similitudine dei triangoli - Costruzione di poligoni simili e similmente posti - Rapporto fra le aree dei triangoli e dei poligoni simili - Costruzione della quarta e della media proporzionale - Divisione di una retta in parti eguali e in parti di rapporti dati - Scala ticonica.

Definizioni di rette perpendicolari e parallele ad un piano - Angolo d'una retta con un piano - Angolo diedro - Come si misura.

Angolo poliedro.

Definizioni delle principali specie di poliedri e dei tre corpi rotondi.

Regole pratiche per calcolare la superficie ed i volumi del parallelepipedo retto, del prisma retto, della piramide, del cilindro, del cono e della sfera.

Anno III

### **Aritmetica e calcolo letterale**

Potenze - Calcolo degli esponenti.

Numeri primi - Formazione di una tavola di numeri primi - Criteri di divisibilità dei numeri interi - Scomposizione di un numero intero nei suoi fattori primi - Ricerca di tutti i divisori di un numero - Ricerca del minimo multiplo e del massimo divisore comune a più numeri dati - Applicazioni alla riduzione delle frazioni al minimo denominatore comune.

Ricerca del medesimo comun denominatore col metodo dei residui

Conversione d'una frazione ordinaria in frazione decimale - Caso in cui questa è finita - Casi in cui è periodica - Conversione d'una frazione decimale finita o periodica in frazione ordinaria.

Radice quadrata e cubica dei numeri interi e decimali con una data approssimazione.

Le quattro prime operazioni del calcolo letterale - Riduzione delle formole algebriche a numeri - Risoluzione delle equazioni pure di primo e di secondo grado ad una incognita.