

### Matematiche elementari e Geometria descrittiva

Coll'insegnamento delle Matematiche elementari si vogliono conseguire due fini distinti, entrambi di somma importanza. L'uno è che i giovani acquistino un buon corredo di cognizioni reali, suscettive di utili e non remote applicazioni; e le acquistino in modo da potersene poi giovare con franchezza nei successivi studi, e nell'esercizio delle professioni. L'altro fine, comune egualmente alle scuole classiche, è di rafforzare la facoltà del ragionamento. Per conseguir questo è d'uopo che i metodi d'esposizione siano in ogni parte rigorosamente esatti, e che mai non si anteponga alla severità del ragionamento scientifico il pregio apparente di una illusoria facilità.

La scienza moderna anche nell'insegnamento delle matematiche ha fatto grandi progressi; i nuovi metodi ormai hanno trasformato tutte le teoriche più importanti, rendendole più semplici, più generali, più intimamente fra loro connesse e meglio pieghevoli alle pratiche applicazioni. Rispetto poi all'Aritmetica generale, all'Algebra ed alla Trigonometria, la scienza moderna ci ha recato un altro beneficio coll'introduzione di quei procedimenti rigorosi, la necessità dei quali non era prima sentita abbastanza. Nella trattazione delle Matematiche elementari erano gravi mancanze e inconvenienti; valgano d'esempio i numeri incommensurabili, gli esponenti negativi e i fratti, le formole goniometriche; da definizioni particolari si tiravano conseguenze troppo larghe, sorpassando tacitamente quelle considerazioni che ora si sono riconosciute indispensabili per estendere il significato dei simboli delle operazioni: e mentre da una parte si credeva indispensabile dimostrare ciò che era una pura convenzione, dall'altra si trascurava ad ammettere, come vere in generale, proposizioni non dimostrate che in casi particolarissimi. La scienza attuale, mettendo in rilievo questi difetti, insegnò la vera via da tenersi fin dalle prime definizioni e dalle nozioni fondamentali; così che l'edificio è ora piantato su basi solide ed inconcusse.

La Geometria non aveva inconvenienti di tal fatta; essa è stata sin dai tempi più remoti un insuperato modello di rigoroso ragionamento. I moderni hanno dato opera ad allargare il campo della sua efficacia, creando nuove teorie, atte come le antiche ad entrare in un sistema d'istruzione elementare, e notabili, oltre a ciò, per molteplici e nuove applicazioni. Infatti, mentre in ogni tempo la sintesi della greca geometria fu ammirata per la severa purezza delle sue dimostrazioni, si poteva però rimproverarle che nel risolvere i problemi non corresse veloce come l'analisi algebrica; e che la soluzione d'un problema per via geometrica richiedesse quasi una fortuita divinazione, da essere un privilegio degli ingegni più felici e delle menti più esercitate. La Geometria moderna possiede appunto quei metodi diretti e generali, per la mancanza dei quali la sintesi geometrica sembrava condannata all'immobilità e all'impotenza. La nuova dottrina della proiezione delle forme geometriche somministra costruzioni grafiche per sciogliere in modo uniforme i problemi del 1.° e 2.° grado\*, le quali sono tanto semplici e tanto facili ad apprendersi e ad usarsi, che potrebbero essere paragonate alle regole del conteggio aritmetico. In particolare ne ha guadagnato la teoria delle curve e delle superficie di 2.° grado; le cui costruzioni, abbracciando tutti i casi possibili con processo uniforme e fondandosi su pochissimi principî, hanno portato notevole avanzamento nel disegno geometrico e nella geometria descrittiva.

I professori degli Istituti tecnici vorranno adunque ritemperare i loro corsi di Matematiche elementari e di Geometria descrittiva alle vive fonti della scienza moderna; la quale possiede non solo teorie nuove, ma eziandio metodi nuovi, più semplici o più esatti, per dimostrare le teorie antiche. Quanto ai metodi, è desiderabile che in tutte le scuole siano riformati ogni qualvolta fa d'uopo o riempire lacune o togliere inconvenienti; ma quanto all'introduzione di nuove teorie, gioverà esaminare dapprima qual sia il posto da assegnarsi ad esse.

I quattro anni dell'istruzione matematica debbono dividersi in tre periodi: il 1.° periodo, compreso nel primo biennio, durante il quale l'insegnamento è comune a tutte le Sezioni dell'Istituto; il 2.° periodo, compreso nel 3.° anno, in cui sono ancora riunite la Sezione Fisico-matematica e

---

\* Anche de' gradi superiori, ma allora si esce dal campo della geometria elementare.

l'Industriale; il 3.° periodo, compreso nel 4.° anno che, per la Geometria descrittiva, è ancora comune alle predette due Sezioni, ma per le Matematiche elementari è proprio della Sezione Fisico-matematica.

Nel 1° periodo l'insegnamento sia assai piano e sobrio, e, serbandosi sempre esatto, si diriga di preferenza alle più pronte e più utili applicazioni. Si adottino i nuovi metodi, in quanto rendono rigorosa la trattazione o accorciano le vie; ma la materia dovrà all'incirca essere contenuta dentro ai soliti confini tradizionali, per non sopraccaricare indebitamente quegli allievi che, dopo il primo biennio, non avranno più a fare studi di matematiche pure. La parte analitica del corso, incominciando dalle prime operazioni dell'Aritmetica generale, abbraccerà le equazioni di 2.° grado, le progressioni, i logaritmi colle loro applicazioni. Da ultimo si darà un cenno dei principî dell'analisi combinatoria e del calcolo elementare delle probabilità, e si esporranno le cose più essenziali della teoria delle approssimazioni numeriche. La parte geometrica piglierà pur essa le mosse dalle prime nozioni, comprenderà la moltiplicazione grafica delle linee rette, la trasformazione delle aree piane e la loro riduzione ad una base data; e si chiuderà col determinare la misura della superficie e della solidità dei tre corpi rotondi. Nel 2.° periodo l'insegnamento si verrà elevando, senza trascurare le applicazioni. L'Algebra abbraccerà i principî dell'analisi algebrica, la teoria generale degli esponenti, i numeri complessi e la risoluzione approssimata delle equazioni numeriche. Nella Geometria si esporranno: la teoria della proiezione delle forme geometriche, colle sue applicazioni alla risoluzione grafica dei problemi di 1.° e 2.° grado ed alla costruzione delle curve di 2.° ordine, considerate come proiezioni centrali del circolo; alcune proposizioni complementari di stereometria (sulla misura di corpi solidi), e la determinazione grafica dei baricentri delle figure piane. A tutto ciò si aggiungerà la Trigonometria piana.

Nel 3.° periodo si compirà l'analisi combinatoria, applicandola allo sviluppo delle potenze intere e positive dei polinomi, alla somma delle potenze simili dei termini d'una progressione, ecc. Seguiranno: i principî della teoria dei determinanti coll'applicazione alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari; i principî sulle serie infinite; le frazioni continue; lo studio speciale di alcune equazioni (equazioni binomie, equazioni di 3.° e 4.° grado).

In Geometria si spiegheranno: le proprietà focali delle curve di 2.° ordine; le proprietà proiettive dei conici di 2.° grado e delle figure sulla sfera; i principî della Geometria analitica, fondati sulla determinazione metrica (mediante i rapporti anarmonici) delle forme proiettive. Si stabiliranno in tutta la loro generalità le formole della Goniometria; la Trigonometria sferica; e da ultimo le formole fondamentali della Poligonometria.

La Geometria descrittiva, alla quale è assegnato un biennio (3.° e 4.° anno), può giovare, più di qualunque altro ramo delle scienze matematiche, delle teorie della moderna Geometria. Infatti, i diversi metodi, che la Geometria descrittiva impiega per la rappresentazione grafica dei corpi, delle superficie e delle linee e per la soluzione dei problemi ad esse relativi, non sono che casi particolari della *collineazione* o corrispondenza omografica fra due sistemi piani o fra due sistemi solidi. Perciò il professore, pigliando le mosse dalla proiezione centrale (come metodo di rappresentazione) e dalle proprietà proiettive delle figure, esporrà la teoria della collineazione di due sistemi piani, la costruzione di una figura collineare ad una data, e i casi speciali dell'*affinità* e della *similitudine*; si addenterà maggiormente in ciò che riguarda l'omologia, e ne trarrà le regole che servono pel disegno di prospettiva. Durante l'intero corso, ma più particolarmente per questa introduzione, cerchi il professore di Geometria descrittiva di accordarsi con quello che insegna le Matematiche elementari, così che l'uno si giovi di ciò che l'altro avrà già trattato; giacché entrambi dovranno nella medesima classe occuparsi della proiezione delle forme geometriche. Applicherà poi i principî della prospettiva alla soluzione dei problemi elementari sui punti, sulle rette e sui piani nello spazio. Di poi, passando al caso particolare delle proiezioni parallele, insegnerà il metodo ordinario delle proiezioni ortogonali e quello del disegno axonometrico, e applicherà l'uno e l'altro agli stessi problemi elementari suaccennati. Sul metodo delle proiezioni ortogonali insisterà maggiormente che sugli altri, e in seguito ne farà il soggetto abituale delle esercitazioni degli scolari; affinché questi comprendano tutti i metodi come casi particolari di uno solo, ma riconoscano che di quello delle proiezioni ortogonali dovranno in pratica fare uso più frequente.

Riprenderà poi lo studio della proiezione delle forme geometriche, trattando della collineazione e della reciprocità fra due *stelle* (due figure, ciascuna delle quali sia il sistema di tutte le rette e dei piani uscenti da un punto fisso); e inoltre della collineazione, dell'affinità e dell'omologia fra due sistemi a tre dimensioni. Di qui ricaverà i principî della prospettiva in rilievo.

Di queste premesse teoriche potrà agevolmente fare applicazione alla costruzione dei piani tangenti, delle sezioni piane e dei contorni delle ombre dei coni e dei cilindri; delle superficie gobbe di 2.<sup>o</sup> grado, generate mediante due fasci proiettivi di piani; e delle superficie di 2.<sup>o</sup> grado in generale, che si possono ottenere dall'incontro degli elementi corrispondenti di due stelle reciproche.

L'ultima parte del corso sarà dedicata alla costruzione dei piani tangenti, delle sezioni piane e de'contorni delle ombre delle superficie di rotazione, ed alle intersezioni di due superficie coniche o di due superficie di 2.<sup>o</sup> grado; e, ove avanzi tempo, si potrà dare un cenno delle eliche cilindriche, dell'elicoide sviluppabile e dell'elicoide gobbo a piano direttore. Il programma, che sussegue a questa istruzione, non fa che accennare i titoli dei principali argomenti. Al professore è lasciata libertà di svolgerli con quell'ordine e con quell'ampiezza ch'egli giudicherà più conveniente. Non occorre che nella trattazione delle singole teorie scenda ai più minuti particolari, bastando l'esposizione delle proposizioni cardinali, che sono sempre poche di numero; dagli esercizi numerici o grafici, che dovranno essere frequentissimi in ogni parte dell'insegnamento, egli dovrà trarre occasione per dare il necessario svolgimento ai principi stabiliti nelle lezioni teoriche. È pur dannoso il sistema di spiegare disgregatamente le varie teorie, a cui alcuni si tengono volontariamente legati, sicché non pongono mano all'una, prima di avere esaurito l'altra a fondo. L'importante è che ogni nuova verità si stabilisca su basi sicure; del resto avverrà spesso che una proposizione d'una teoria serbata ad altro tempo, ove sia opportunamente anticipata, riesca preziosa per accorciare e semplificare la trattazione d'altri argomenti, che senza di ciò riuscirebbe intricata e fors'anco oscura. Ce ne porge esempio la Geometria solida, la quale sovente serve a dare soluzioni rapidissime o dimostrazioni intuitive di proposizioni piane, troppo difficili pei metodi della pura planimetria. Il ricorrere allo spazio di tre dimensioni, anche nelle questioni di Geometria piana, è uno dei più efficaci e semplici artifici d'investigazione geometrica non ignoto neppure agli antichi, e contribuisce ad abituare di buon'ora gli scolari a vedere cogli occhi della mente le forme geometriche nello spazio ideale.

È superfluo avvertire che anche l'Algebra e la Geometria non devono andar troppo disgiunte; anzi converrà insegnarle contemporaneamente in modo che si prestino vicendevole aiuto, e la varietà della materia contribuisca a tener desta l'attenzione e la curiosità degli scolari.

Se al professore parrà che gli argomenti accennati nel Programma, non bastino ad occupare tutto l'orario, gli è data facoltà di trattarne a sua scelta alcun altro, che abbia connessione con quelli già sviluppati e si conformi al carattere della scuola. Sarà bene che di tale suo proposito faccia cenno nel Programma particolareggiato, che presenterà al principio di ciascun anno scolastico.

Ma l'efficacia di questi insegnamenti non tanto dipende dalle lezioni orali, quanto dalla molteplicità, varietà e buona coordinazione, degli esercizi degli scolari. Questi devono *lavorare continuamente*: ossia che il maestro li chiami, nel tempo delle lezioni, ad uno ad uno, a risolvere problemi, o a sciogliere difficoltà col suo ajuto; ossia che egli proponga loro temi da trattare a casa., che poi restituirà corretti o annotati. L'insegnamento dell'Aritmetica generale, dell'Algebra e della Trigonometria dev'essere accompagnato da continui esercizi di calcolo numerico, dove i giovani siano avvezzi ad usar sempre le regole abbreviative, che conducono più prontamente e nella forma più semplice al risultato. Così pure l'insegnamento della Geometria, sì descrittiva che elementare, deve per una grandissima parte consistere in lavori grafici, nei quali si richiederà non solo l'esattezza scientifica, ma eziandio la precisione e l'eleganza dell'esecuzione. Pongano i professori, somma cura nella scelta dei temi, avvertendo che le quistioni improvvisate sono quasi sempre inopportune, e che, se un calcolo e una costruzione riescono troppo complicati, gli allievi si annojano e si scoraggiano. I temi vogliono essere preparati prima colla maggior diligenza, ovvero tolti da buone collezioni, talché offrano una chiara e convincente applicazione delle teorie esposte nella scuola. Di tutti questi esercizi di calcolo o di disegno gli scolari siano obbligati a tenere appositi e ordinati quaderni, perché ad ogni uopo essi possano consultarli, e la scuola dar saggio della sua operosità e del grado d'istruzione.

## **Aritmetica generale ed Algebra**

### **Biennio I.**

Operazioni dirette - Operazioni inverse - Formole - Numeri negativi. Addizione e moltiplicazione dei polinomî - Quadrato è cubo di un polinomio.

Divisione - Numeri frazionari - Massimo comune divisore e minimo multiplo dei numeri e dei monomi - Calcolo delle frazioni.

Divisibilità dei numeri interi. Divisione dei polinomi ordinati. Equazioni e problemi di 1.° grado.

Sistemi di equazioni lineari; discussione delle formole di risoluzione. Principi sui limiti - Soluzioni indeterminate - Radici quadrate dei numeri - Numeri irrazionali.

Potenze e radici dei monomi - Calcolo dei radicali aritmetici. Rapporti - Grandezze commensurabili, grandezze incommensurabili. Proporzioni.

Equazioni e problemi di 2.° grado - Equazioni riducibili al 2.° grado - Questioni elementari di massimo o di minimo.

Sistemi di più equazioni lineari e di una quadratica. Progressioni.

Logaritmi - Uso delle tavole - Logaritmi di Leonelli (o di Gauss) - Applicazioni al calcolo di formole aritmetiche.

Interessi composti - Annualità.

Permutazioni, variazioni, combinazioni di elementi dati. Principi sulle probabilità.

Approssimazioni numeriche - Operazioni abbreviate - Errori relativi.

### Anno III.

Principi sull'analisi algebrica - Genesi delle operazioni aritmetiche - Introduzione de' numeri negativi, fratti, irrazionali (reali e complessi) - Esponente frazionario; esponente incommensurabile; esponente negativo; esponente nullo. - Numeri complessi; loro rappresentazione geometrica; calcolo dei medesimi. - Estensione delle operazioni aritmetiche.

Teoremi sulle funzioni algebriche - Divisori di una funzione intera - Divisori razionali - L'equazione algebrica di grado  $n$  ha  $n$  radici - Limiti delle radici reali; radici multiple; radici commensurabili; - Teoremi sulla separazione delle radici - Metodi d'approssimazione per la determinazione delle radici reali di un'equazione numerica - Risoluzione numerica di alcune equazioni trascendenti.

### Anno IV.

Complemento dell'analisi combinatoria - Prodotti, potenze (intere positive) e radici dei polinomi - Serie a differenze costanti - Numeri figurati - Formole d'interpolazione.

Principi sui determinanti - Risoluzione di un sistema d'equazioni lineari.

Principi sulle serie infinite; serie esponenziale; serie logaritmica; serie trigonometriche.

Frazioni continue - Applicazione all'analisi indeterminata di primo grado.

Valori coniugati di una funzione algebrica - Norma di una funzione irrazionale - Eliminazione fra due equazioni algebriche.

Studio speciale di alcune equazioni - Equazioni reciproche - Equazioni binomie; divisione del circolo in parti uguali - Teoremi di Moivre e di Cotes - Equazioni di 3.° e di 4.° grado.

## **Geometria.**

### Biennio I.

Nozioni fondamentali - Angoli - Rette parallele - Proposizioni elementari sul cerchio - Angoli nel cerchio - Triangoli uguali - Quadrilateri - Poligoni regolari.

Divisioni delle rette in parti proporzionali - Moltiplicazione grafica delle rette - Elevazione a potenza - Poligono di moltiplicazione. Figure equivalenti - Teorema di Pitagora - Misura delle aree - Poligoni a contorno intrecciato.

Similitudine de' triangoli e de' poligoni.

Misura del circolo - Trasformazione grafica di una figura piana qualsivoglia; sua riduzione ad una base data.

Intersezione di piani e di rette - Angoli e distanze fra piani e rette nello spazio..

Cono cilindro e sfera.

Piramidi e prismi: eguaglianza, similitudine, simmetria.

Cubatura dei prismi, delle piramidi, del cilindro, del cono, della sfera e delle loro parti.

Quadratura dei tre corpi rotondi.

### Anno III.

Proiezione centrale - Forme geometriche fondamentali - Proprietà armonica del quadrilatero e costruzioni che ne conseguono.

Proiettività delle rette punteggiate e dei fasci di rette; costruzione di una forma proiettiva ad una data - Rapporti anarmonici.

Fasci proiettivi nel cerchio; tangenti punteggiate proiettive - Teoremi sui poligoni inscritti o circoscritti - Serie proiettive di punti in una circonferenza - Costruzione degli elementi uniti di due forme proiettive sovrapposte.

Metodo geometrico di falsa posizione per la risoluzione grafica dei problemi di 2.° grado - Applicazioni.

Involuzione di punti in linea retta o in una circonferenza - Poli e polari nel cerchio - Costruzioni che ne dipendono. - Inscrizione di poligoni i cui lati debbano passare per punti dati. - Teorema sul quadrilatero segato da una trasversale.

Figure polari reciproche - Legge di dualità nel piano.

Le coniche (proiezioni centrali del cerchio) generate mediante due forme proiettive. - Proprietà delle coniche dedotte da quelle del cerchio - Teoremi di Pascal, di Brianchon, di Desargues e loro conseguenze - Costruzione di una conica soggetta a cinque condizioni (punti o tangenti).

Classificazione delle curve di 2° grado - Centro, diametri coniugati ed assi (dedotti come casi particolari dalla teoria dei poli e delle polari) - Proprietà speciali dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola - Costruzioni grafiche.

Complemento di stereometria - Baricentro di una figura geometrica - regola di Guldino - Determinazione grafica del baricentro di una qualsivoglia figura piana (mediante il poligono di moltiplicazione).

### Anno IV.

Fuochi nelle coniche: definizione, proprietà, costruzioni - Proprietà relative ad un solo fuoco - Proprietà relative ai due fuochi - Costruzioni delle coniche, quando fra gli elementi dati vi è un fuoco, o vi sono entrambi i fuochi.

Proprietà proiettive dei coni di 2.° grado e delle figure descritte sulla sfera, dedotte dalle corrispondenti proprietà delle figure piane - Triangoli sferici: eguaglianza, simmetria; perimetro, area - Figure polari - Proiezione stereografica.

Principi di Geometria analitica: concetto fondamentale delle coordinate proiettive - Equazioni simboliche de' luoghi geometrici (di 1.° e 2.° grado) in un piano e nello spazio; teoremi sulle loro mutue intersezioni, dedotte dalle più semplici combinazioni di quelle equazioni - Dimostrazione analitica di alcune proprietà delle coniche, già note per mezzo della proiezione centrale.

## **Trigonometria.**

### Anno III.

Funzioni goniometriche: seno, coseno, tangente e cotangente - Tavole ed uso delle medesime - Relazioni trigonometriche fra gli elementi di un triangolo - Area in funzione dei lati - Problema di Pothenot. Risoluzione dei triangoli rettilinei.

### Anno IV.

Precisa determinazione dell'angolo di due rette e delle sue funzioni goniometriche - Equazioni fondamentali nel triangolo - Formole generali per l'addizione, sottrazione, duplicazione e bisezione degli angoli - Relazione fra le sei distanze di quattro punti in un piano - Area del triangolo, e del quadrilatero inscrittibile, in funzione dei lati.

Trigonometria sferica.

Formole fondamentali della Poligonometria.

## **Geometria descrittiva.**

Proiezione centrale - Collineazione od omografia di due sistemi piani - Affinità - Similitudine - Omologia o posizione prospettiva di due figure collineari, contenute in uno stesso piano - Omologia armonica - Simmetria - Elementi a distanza infinita: punti di fuga, rette di fuga.

Risoluzione di problemi fondamentali, relativi a punti, rette e piani nello spazio - Problema inverso della prospettiva - Ribaltamento de' piani obbiettivi - Trasformazione della prospettiva mediante spostamento del centro di proiezione - Prospettiva di un poliedro - Collocare in posizione omologica due quadrilateri di dimensioni date.

Proiezioni parallele - Metodo ordinario delle proiezioni ortogonali sui due piani rettangolari - Risoluzione de' problemi fondamentali - Trasformazioni - Risoluzione dell'angolo triedro - Intersezioni, ombre proprie e portate di poliedri.

Prospettive rapide - Disegno axonometrico - Teorema di Pohlke - Risoluzione de' problemi fondamentali.

Superficie coniche e cilindriche: piani tangenti, sezioni piane, contorni delle ombre.

Collineazione e reciprocità fra due stelle - Collineazione fra due sistemi a tre dimensioni - Affinità - Omologia - Principi della prospettiva in rilievo.

Generazione dei coni e delle superficie gobbe di 2° grado mediante due fasci proiettivi di piani - Piani tangenti, sezioni piane, contorni delle ombre.

Generazione di tutte le superficie di 2° grado mediante due stelle reciproche - Loro classificazione - Proprietà armoniche, poli e piani polari - Centro, diametri, assi, cono assintoto - Rappresentazione grafica, piani tangenti, sezioni piane, contorni delle ombre.

Superficie di rotazione - Piani tangenti - Sezioni piane - Contorni delle ombre - Esempi: ellissoide di rotazione, iperboloide gobbo di rotazione, toro architettonico.

Intersezioni fra le superficie coniche e cilindriche. Intersezione di due superficie di 2° grado. Intersezione di una sfera con una superficie conica.